

Příklady - Kinetická teorie plazmatu

1. Příklad

Integrál Maxwell-Boltzmannova rozdělení nutný pro výpočet makroskopických veličin plazmatu (koncentrace částic, driftová rychlost, energie) často vede na výpočet integrálu ve tvaru:

$$I(t) = \int_0^{\infty} v^t \exp(-\alpha v^2) dv. \quad (1)$$

- (a) Dokažte, že obecně tento integrál můžeme převést na tzv. Gamma funkci ve tvaru: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \exp(-x) dx$.
- (b) Dokažte, že pro Gamma funkci platí: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
- (c) Pro $z \in \mathbb{N}$ dokažte, že $\Gamma(n) = (n-1)!$
- (d) Stanovte $\Gamma(\frac{1}{2})$. (Možná budete muset využít řešení integrálu $I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy$).
- (e) Dále vypočítejte: $\Gamma(1)$, $\Gamma(5)$, $\Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{7}{2})$.

2. Příklad

Maxwell-Boltzmannovo rozdělení velikosti rychlosti je dáno vztahem:

$$F(v) = 4\pi C v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]. \quad (2)$$

- (a) Normováním na koncentraci částic n , stanovte konstantu C .
- (b) Stanovte nejpravděpodobnější rychlost v_p .
- (c) Stanovte střední rychlost $\langle v \rangle$.
- (d) Stanovte odmocninu ze střední kvadratické rychlosti $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
- (e) Porovnejte tyto rychlosti.

3. Příklad

Rozdělení kinetické energie částic, jejichž rozdělení rychlostí je Maxwell-Boltzmannovo, je dáno vztahem:

$$G(E) = AE^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{E}{kT}\right]. \quad (3)$$

- (a) Normováním na koncentraci částic n , stanovte konstantu A .
- (b) Stanovte nejpravděpodobnější energii E_p a zjištěte, jaké rychlosti odpovídá.
- (c) Stanovte střední energii $\langle E \rangle$ a zjištěte, jaké rychlosti odpovídá.