Soustavy lineárních rovnic

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{N} & \text{přirozená čísla } 1, 2, \ldots \\ \mathbb{Z} & \text{celá čísla } 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mathbb{Q} & \text{racionální čísla} \\ \mathbb{R} & \text{reálná čísla} \\ \mathbb{C} & \text{komplexní čísla} \end{array}\right\} \mathbb{K}$$

Sčítání je zobrazení $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\underset{\in \mathbb{K}\times\mathbb{K}}{(a, b)} \longmapsto (a+b) \in \mathbb{K}$$

2

Násobení $\quad \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K} \quad (a,b)\mapsto a\cdot b$

Vlastnosti těchto operací

komutativní $\quad a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$

asociativní $\quad (a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a\cdot b)\,c = a\cdot(b\,c)$

násobení je distributivní vzhledem ke sčítání

$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$$

$\mathbb{K}\neq\mathbb{N}$ $\quad$ prvek 0 $\quad a+0=a$

prvek 1 $\quad a\cdot 1 = a$

3

„ . . . $\mathbb{N}$

pro každé $a \in \mathbb{K}$ existuje opačné číslo $-a \in \mathbb{K}$

$$a + (-a) = 0$$

$\mathbb{K} \neq \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

pro každé $a \neq 0$ existuje převrácené číslo $a^{-1} \in \mathbb{K}$

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Na cvičeních se probere podrobněji počítání s kompl. čísly

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a + ib$ $\quad (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i\,(b+d)$

$$(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

(4)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + ib \qquad \bar{z} = a - ib$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z \neq 0 \neq 0 + i0$$

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

5

Soustava k rovnic o neznámých $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

$$Ax = b$$

a_{ij} koeficient v i-tém řádku u x_j

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

6

Homogenní soustava

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0$$

Řešení soustavy – n-tice čísel $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, která vyhovuje všem rovnicím.

Homogenní soustava má vždy řešení $0, 0, \dots, 0 \in \mathbb{K}$

<u>Ekvivalentní soustavy</u> jsou soustavy, které mají stejné množiny řešení.

7

Ekvivalentní úprava – úprava (změna) soustavy, která nemění množinu řešení

Elementární ekvivalentní úpravy

- vynásobení rovnice nenulovým číslem
- výměna dvou rovnic (změna pořadí rovnic)
- k jedné rovnici přičteme násobek jiné rovnice

Elementární ekv. úpravy se projevují na maticích soustav pomocí tzv. elementárních řádkových operací

- vynásobení řádku nenulovým číslem
- prohození dvou řádků

8

- k dané rovnici přičteme q-násobek jiné rovnice

Schodovitý tvar matice

vedoucí koeficient řádku matice je první koeficient tohoto řádku $\neq 0$

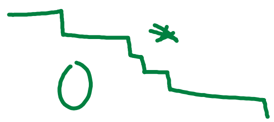
Schod. tvar matice znamená

(1) nulové řádky jsou na konci matice (dole)

(2) je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak

$$a_{i+1,k} = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots i$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{a_{ij}} \\ \cline{5-5} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



(9)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Matice ve schod. tvaru, odpovídá soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

· Tuto soustavu umíme vyřešit

Neznámé, které nestojí u ved. koeficientů (x_5, x_2) volíme libovolně

$x_5 = p$, $x_2 = s$

a ~~Ned~~ neznámé u ved. koeficientů spočítáme od spoda nahoru

(10)

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$$

$$x_3 = -x_5 - 2x_4 = -p - 2(1-2p) = -2 + 3p$$

$$x_1 = 2x_3 - x_4 - x_5 + 3 = -4 + 6p - 1 + 2p - p + 3$$
$$= -2 + 7p$$

Řešení $(-2+7p,\ s,\ -2+3p,\ 1-2p,\ p) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K} = \mathbb{K}^5$

Obecně: Máme-li soustavu s maticí ve schod. tvaru, pak obsahuje-li matice řádek

$$0\ 0 \ldots\ .\ 0 \mid b \neq 0,$$

pak soustava nemá řešení.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0\, x_n = b \neq 0$$

11

V obecném případě má soustava řešení, které najdeme tak, že neznámé, které neleží u ved. koeficientů, zvolíme za parametry a neznámé, které stojí u ved. koeficientů, spočítáme zdola nahoru.

Věta (Gaussova eliminace)

Každou matici lze pomocí elementárních řádkových operací převést na schodovitý tvar.

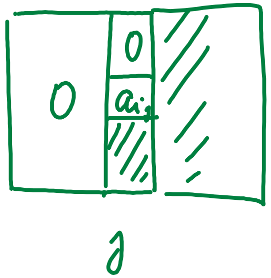
Důkaz spočívá v algoritmu, který se nazývá Gaussova eliminace.

12

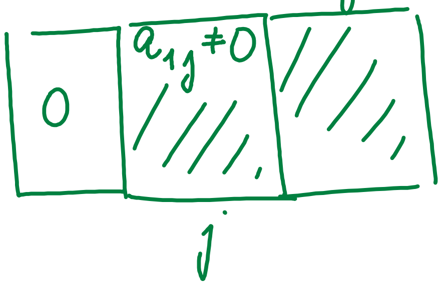
Mějme matici A typu $k \times n$ (k řádků a n sloupců)

Nechť 1. nenulový sloupec je j-tý. Nechť i je nejmenší číslo takové, že

$$a_{ij} \neq 0$$



Vyměníme i-tý a 1. řádek

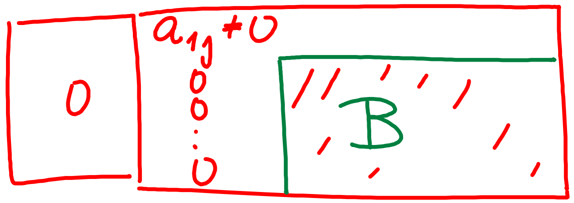


Nechť $a_{sj} \neq 0$. Potom k s-tém řádku přičteme $-\dfrac{a_{sj}}{a_{1j}}$ násobek 1. řádku.

13

V s-tém řádku a j-tém sloupci po této operaci bude stát číslo

$$a_{sj} + \left(-\frac{a_{sj}}{a_{1j}}\right) a_{1j} = a_{sj} - a_{sj} = 0$$



Nechť B je matice vzniklá z matice A po daných úpravách bez 1. řádku a prvních j-sloupců.

S maticí provádíme stejné úpravy.
Po konečném počtu kroků dostaneme schod. tvar.

(14)

$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2 \qquad\qquad\quad -x_4 &= 1\\
3x_1+2x_2+4x_3-2x_4 &= 0\\
x_1-x_2+4x_3-x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6\\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)
$$

soustava nemá řešení

$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=3$$