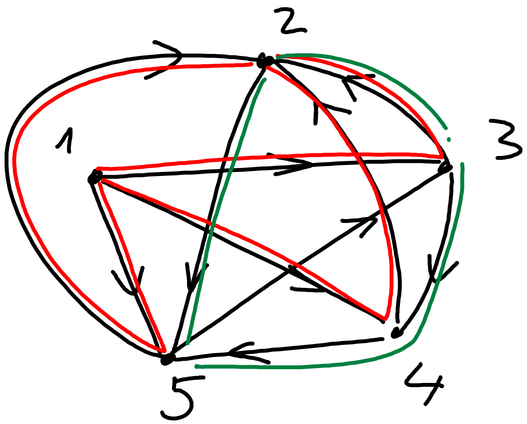
2 příklady k násobení matic



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 =$$

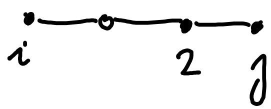
$(A^2)_{ij}$ = počet cest délky 2 z i do j

(2)

$$A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A^3$$

$$(A^3)_{ij} \quad \dots\dots$$

$$(A^3)_{ij} = \overbrace{\underbrace{(A^2)_{i1}\, A_{1j}}_{\substack{\text{počet cest délky 3}\\ \text{z } i \text{ do } j\text{, které}\\ \text{jdou přes 1}}} + \underbrace{(A^2)_{i2}\, A_{2j}}_{\substack{\text{cesty délky 3}\\ \text{z } i \text{ do } j\text{, které}\\ \text{jdou přes 2}}} + \dots + (A^2)_{i5}\, A_{5j}}^{\text{počet cest délky 3 z } i \text{ do } j} =$$



3

Násobení matic a Markovovy procesy

Úloha o mlsném hazardérovi:

Mlsný hazardér má 3 kremrole. Hází mincí

orel + 1 kremrole

panna − 1 kremrole

Konec hry nastane, když má 0 nebo 5 kremrolí

Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí na 4 kolech?

4

<u>Markovův proces</u>   děj, který nabývá n stavů

(stavy ... počet nemocných   0, 1, 2, 3, 4, 5)

P_{ij} ... pravděpodobnost, že se ze stavu j dostaneme do stavu i

$P = (P_{ij})$ je Markovova matice

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1$$

Pravděpodobnostní vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ x_i = pravděpodobnost, že proces je ve stavu i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

5

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$$

je pravděpodobnostní vektor, popisující situaci v čase k

Jaký je vztah mezi $x(k+1)$ a $x(k)$

$$x(k+1) = P \cdot x(k)$$

$$x_i(k+1) = P_{i1} \cdot x_1(k) + P_{i2} \cdot x_2(k) + \dots + P_{in} \cdot x_n(k)$$

6

<u>Opil ke krčmolím</u>

Stavy 0, 1, 2, 3, 4, 5 krčmoly. Příslušná Markovova matice je

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stav na začátku

$$x(1) = P \cdot x(0), \quad x(2) = P x(1) = P \cdot P x(0) = P^2 x(0)$$

$$x(3) = P \cdot x(2) = P^3 x(0), \quad x(4) = P \cdot x(3) = P^4 x(0)$$

7

Pravděpodobnost, že hra skončí po 4 kolech je

součet pravděpodobností, že po 4 kolech má hráč 0 nebo 5 korun

$$x_0(4) + x_5(4)$$

$$x(4) = P^4 \cdot x(0) = P^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.\text{ sloupec } P^4 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/16 \\ 0 \\ 5/16 \\ 0 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

$$x_0(4) = \frac{1}{8}, \quad x_5(4) = 3/8$$

Pravděpodobnost je $\frac{1}{8} + 3/8 = \frac{1}{2}$

8

VÝPOČET INVERZNÍ MATICE

A čtvercová matice $n \times n$, E jednotková matice $n \times n$

$$A \cdot E = A = E \cdot A$$

Inverzní matice k A je matice B taková $n \times n$

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Lemma 1

Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní

Dk: Nechť B a C jsou inverzní k A. Pak

$$\underline{A \cdot C} = E = \underline{A \cdot B} \quad \text{vynásobíme B zleva}$$

9

$$\underbrace{B \cdot A}_{} \cdot C = \underbrace{B \cdot A}_{} \cdot B$$
$$E \cdot C = E \cdot B$$
$$C = B$$

Inverzní matici k A budeme značit A^{-1}.

<u>Lemma 2</u> Jestliže A má inverzi A^{-1} a B má inverzi B^{-1}, pak $A \cdot B$ má inverzi $B^{-1} \cdot A^{-1}$

<u>Dk</u>. $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{E})\, A^{-1} =$

$= (A\, E)\, A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E.$

Součin $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1}(A \cdot B)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

(10)

Elementární řádkové operace

(1) Násobení řádku číslem $c \neq 0$
(řádku)

A matice $\quad e(A)$ je výsledek EŘO provedené na A

Platí
$$e(A) = e(E) \cdot A \qquad e \text{ .. vynásobení 1. řádku}$$

$$e\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

11

(2) Výměna 1 a 2 řádku

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \\ \dots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

$\checkmark$ $\qquad e(E) \qquad A$

(3) K 1 řádku přičteme c-násobek 2. řádku

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11}+ca_{21}, & a_{12}+ca_{22}, & a_{13}+ca_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & & \dots \end{pmatrix} =$$

$$/\ 12$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & & \end{pmatrix}}_{e(E)} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{i1} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \end{pmatrix} -$$

Dokázali jsme následující

<u>Věta</u> Je-li e nějaká elementární řádková operace, pak platí

$$e(A) = e(E) \cdot A$$

13

Elementární matice je čtvercová matice, která vznikne provedením element. řádk. operace na jednotkovou matici.

<u>Věta.</u> Všechny element. matice mají inverzní. Inverzní matice je také elementární

<u>Důkaz:</u>

$$\begin{pmatrix} c & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^{-1} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$c \neq 0$

14

Výměna 1. a 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$e(E) \cdot \underbrace{e(E)}_{A} = e\big(e(E)\big) = E$$

2× prohodíme 1 a 2. řádek, dostaneme původní matici

1. (15)

(3) k 1. řádku přičteme c-násobek 2 řádku

$$\begin{pmatrix}1 & c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -c+c=0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\end{pmatrix}$$

$$e(E)\cdot\overbrace{\left(\tilde{e}(E)\right)}^{A} = \underbrace{e(\tilde{e}(E))}_{e(A)} = E$$

přičtení −c násobku
2. řádku k 1 řádku

(16)

ALGORITMUS pro výpočet inverzní matice

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{ERO}} (\tilde{A} \mid \ldots) \quad \tilde{A} \text{ je ve schod. tvaru}$$

(1) $\tilde{A}$ má nulový řádek $\Rightarrow$ pak A nemá inverzní matici

(2) $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, $\Rightarrow$ ~~pak~~ A^{-1} existuje a my pokračujeme ve výpočtu

$$(\tilde{A}, \ldots) \xrightarrow{\text{ERO}} (E, B) \quad \text{úplná Gaussova eliminace}$$

B je hledaná inverzní matice

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$E \qquad B$

$\tilde{A}$ nemá nul. řádek

→ pokračujeme

18

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Důkaz algoritmu</u>:

$$(A \mid E) \overset{e_1}{\rightsquigarrow} \big(e_1(A) \mid e_1(E)\big) = \big(e_1(E)\cdot A \mid e_1(E)\big)$$

$$\overset{e_2}{\rightsquigarrow} \big(e_2(E)\cdot e_1(E)\cdot A \mid e_2(E)\cdot e_1(E)\big) = \big(E_2 \cdot E_1 \cdot A \mid E_2 \cdot E_1\big)$$

$$\rightsquigarrow (\tilde{A} \mid \dots) = \big(E_k E_{k-1} \dots E_1 \cdot A \mid E_k E_{k-1} \dots E_1\big)$$

19

Jestliže $\tilde{A}$ má nulový řádek, pak nemá inverzní matici. Neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} \neq E.$$

Kdyby A měla inverzní, pak

$\tilde{A} = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ by také měla inverzní

$(\tilde{A})^{-1} = A^{-1} E_1^{-1} \ldots \cdot E_k^{-1}$

Tedy A nemůže mít inverzní.

Jestliže $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, pak (protože je čtvercová $n \times n$ a je ve schod. tvaru) má v každém řádku vedoucí koeficient – v i-tém řádku na i-tém místě.

Můžeme provést úplnou Gaussovu eliminaci.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & * & & \\ 0 & 0 & * & \\ & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{A}|\dots) = (\overbrace{E_k E_{k-1} \dots E_1 A}^{B \cdot A} | E_k E_{k-1} \dots E_1) \overset{\text{ero}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow (\underbrace{E_s E_{s-1} \dots \dots E_1 A}_{E} | \underbrace{E_s E_{s-1} \dots E_1}_{B})$$

21

Vidíme, že

$$B \cdot A = \underline{E_s E_{s-1} \ldots E_1 A = E}$$

$$\underbrace{E_s^{-1} E_s}_{E} E_{s-1} \ldots E_1 A = E_s^{-1}$$

$$E_{s-1} \ldots E_1 A = E_s^{-1}$$

$$E_{s-1}^{-1} E_{s-1} \ldots E_1 A = E_{s-1}^{-1} E_s^{-1}$$

$$E_{s-2} \ldots E_1 A = E_{s-1}^{-1} E_s^{-1}$$

$$\boxed{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_s^{-1}}$$

$$A \cdot B = \left(E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_s^{-1}\right) \cdot \left(E_s E_{s-1} \ldots E_1\right) = E$$