Matice lin. zobrazení a matice přechodu

$\varphi : U \to V$ báze U $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

báze V $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$

$(\varphi)_{\beta,\alpha}$ je matice $k \times n$ se sloupci

$$(\varphi(u_1))_\beta \quad (\varphi(u_2))_\beta \quad \dots\dots \quad (\varphi(u_n))_\beta$$

Pro tuto matici platí

$u \in U$ $$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha \qquad (*)$$

Vlastnosti: ① $(id)_{\alpha,\alpha} = E$

② $(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$

2

3. φ je lin. izo

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left[(\varphi)_{\beta,\alpha}\right]^{-1}$$

Zvláštním případem je matice přechodu

U vekt. prostor s bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta \; (u_2)_\beta \; \dots \; (u_n)_\beta \right)$$

<u>Vlastnosti:</u> (*) $\forall u \in U \quad (u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$

1. $(id)_{\alpha,\alpha} = E$
2. Bereme $\varphi = \psi = \psi \circ \varphi = id \quad (id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta} \cdot (id)_{\beta,\alpha}$

3

3. $(id)_{\alpha,\beta} = (id)_{\beta,\alpha}^{-1}$

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ V RŮZNÝCH BAZÍCH

$\varphi : U \to V$ lineární zobrazení

V U máme báze α, α'

Ve V máme báze β, β'

Jaký je vztah mezi

$(\varphi)_{\beta,\alpha}$ a $(\varphi)_{\beta',\alpha'}$

4

Věta.

$$(\varphi)_{\beta',\alpha'} = (id)_{\beta',\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\alpha'}$$

Důkaz: Platí $\varphi = \underbrace{id_V \circ \varphi} \circ id_U$

Podle vlastnosti 2 je

$$(\varphi)_{\beta',\alpha'} = (id_V \circ \varphi)_{\beta',\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\alpha'} = (id_V)_{\beta',\beta} \, (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\alpha'}$$

Speciální případ této věty

$\varphi : U \longrightarrow U$ v U jsou báze α a β

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta} = P^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} P$$

$$B = P^{-1} A P$$

5

Definice Dvě čtvercové matice A a B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice P tak, že

$$B = P^{-1} A P.$$

Relace A je podobná matici B je relací ekvivalence:

1. A je podobná A $\qquad A = E^{-1} A E$
2. symetrie: A je podobná B $\Rightarrow$ B je podobná A

DP: $\quad B = P^{-1} A P \quad / \; P$ zleva

$PB = AP \quad / \; P^{-1}$ zprava

$PBP^{-1} = A$

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1} B (P^{-1})$$

6

3 tranzitivní

A je podobná B , B je podobná C $\Rightarrow$ A je podobná C

$B = P^{-1} A P \qquad C = Q^{-1} B Q$

$C = Q^{-1} B Q = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A (PQ)$

7

GRUPY A PERMUTACE

Definice: Neprázdná množina G s operací $\circ : G \times G \longrightarrow G$ se nazývá **grupa**, jestliže tato operace má následující vlastnosti:

1. asociativita
   $\forall\, a, b, c \in G \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. existence jednotkového prvku (neutrální prvek)
   $\exists\, e \in G \;\; \forall\, a \in G \qquad a \circ e = e \circ a = a$
3. existence inverzního prvku
   $\forall a \in G \;\; \exists\, a^{-1} \in G \qquad a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$

Příklady

1 $GL(n,\mathbb{R})$ = { matice $n\times n$ s reálnými koeficienty, které mají inverzní matice }.

operace je násobení matic

$$\cdot : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Násobením dvou matic, které mají inverzi, dostaneme matici, která má rovněž inverzi.

Násobení není komutativní!

1. Násobení matic je asociativní
2. E jednotková matice je neutrální (jednotkový) prvek
3. $A\cdot A^{-1} = E$

(2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{násobení})$ je také grupa, protože je operace komutativní,

mluvíme o komutativní grupě

abelovské grupě

(3) $(\mathbb{Z}, +)$ celá čísla se sčítáním tvoří rovněž komutativní grupu

(4) $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ s operací násobení je rovněž komutativní grupa

Permutace jsou bijekce množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ do sebe.

$P_n = \{ f : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots, n\},\ f \text{ je bijekce} \}$

operace je skládání zobrazení

10

Skládání zobrazení je asociativní.

Jednotkový prvek je identické zobrazení.

Inverzní prvek je inverzní zobrazení

Obecně skládání zobrazení NENÍ KOMUTATIVNÍ.

π je permutace, bijekce $\pi : \{1, 2, \dots n\} \to \{1\ 2, \dots n\}$

lze ji zapsat tabulkou

i	1	2	3		$n-1$	n
$\pi(i)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$		$\pi(n-1)$	$\pi(n)$

Obráceně, ke každému pořadí prvků $1, 2, \dots n$ najdeme bijekci.

Zapomeneme li 1. řádek, dostaneme pořadí prvků $1, 2, \dots n$, což je permutace ve smyslu střední školy.

11

Příklad na skládání:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupa permutací P_n má

$n!$ prvků

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

12

Homomorfismus grup

Nechť G a H jsou dvě grupy. Potom zobrazení

$$f : G \longrightarrow H$$

se nazývá homomorfismus grup, jestliže platí

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$$

operace G   operace v H

Příklad: U, V vektorové prostory s operací sčítání vektorů jsou komutativní grupy. $\varphi : U \longrightarrow V$ lineární zobrazení je HOMOMORFISMUS GRUP neboť platí $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$. $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$ $\varphi(-u) = -\varphi(u)$

(13)

Lemma Je-li $f : G \to H$ homomorfismus grup, pak

(i) $f(e_G) = e_H$

(ii) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Důkaz:

(i) $\forall g \in G \qquad e_G \cdot g = g$

$$f(e_G)\cdot f(g) = f(e_G \cdot g) = f(g) = e_H \cdot f(g)$$

$$f(e_G)\, f(g) = e_H\, f(g) \quad \Big|\ (f(g))^{-1}$$

$$f(e_G)\, \underbrace{f(g)\,(f(g))^{-1}}_{e_H} = e_H\, \underbrace{f(g)\,(f(g))^{-1}}_{e_H}$$

14

$$f(e_G)\cdot e_H = e_H \cdot e_H$$

$$\underline{f(e_G) = e_H}$$

(ii)

$$g\cdot g^{-1} = e_G$$

podle (i)

$$\underline{f(g)\cdot f(g^{-1})} = f(g\cdot g^{-1}) = f(e_G) = \underline{e_H}$$

$$f(g)\cdot f(g^{-1}) = e_H$$

$$f(g)\cdot f(g^{-1}) = f(g)\cdot (f(g))^{-1}$$

/ vynásobíme $(f(g))^{-1}$ zleva

$$\underbrace{(f(g))^{-1} f(g)}_{e_H}\ f(g^{-1}) = \underbrace{(f(g))^{-1} f(g)}_{e_H}\ (f(g))^{-1}$$

$$\underline{f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}}$$

15

<u>Příklad</u> $G = (\mathbb{R}, +)$ je kom grupa

$H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ je kom grupa

$(0, \infty)$

$f(x) = e^x$ exponenciální funkce

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

říká, že f je homomorfismus grup.

$l(y) = \log y \qquad l : H \to G$

$\log(y_1 \cdot y_2) = \log y_1 + \log y_2$

inverzní zobrazení je rovněž homomorfismus grup

izomorfismus grup

16

Znaménko perm je zobrazení

$$\mathrm{sign}: P_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$$

$$\mathrm{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Příklad: $\pi = \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}$

$$\mathrm{sign}\,\pi = \frac{1-4}{\underbrace{2-1}_{j-i}} \cdot \frac{3-4}{3-1} \cdot \frac{2-4}{4-1} \cdot \frac{3-1}{3-2} \cdot \frac{2-1}{4-2} \cdot \frac{2-3}{4-3} = (-1)^4 = 1$$

(17)

<u>Praktický výpočet</u>

transverze v permutaci je dvojice (i, j) taková, že

$$i < j \quad \text{ale} \quad \sigma(i) > \sigma(j)$$

V definici znaménka, každá transverze přispěje záporným činitelem

$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} < 0$$

Znaménko permutace je pak rovno

$$(-1)^{\text{počet transverzí}}$$

(18)

Příklad

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

počet transpozic: hodit číslo za 6 menších +
hodit číslo za 3 menších
hodit číslo za 2 menších
za 1
za 5 m. menších
za 4

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\,2 \\ +\,1 \\ +\,0 \\ 1+ \\ 0 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^9 = -1$$

(19)

Věta. Znaménko permutace jako zobrazení

$$\operatorname{sign} : P_n \to \{1,-1\}$$

je homomorfismus grup, tj.

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \pi$$

Důkaz:

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{j-i} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} \cdot \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} \cdot \underline{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j-i}} = \operatorname{sign} \sigma \cdot \underline{\operatorname{sign} \pi}$$

20

Platí, že

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} = \operatorname{sign} \sigma$$

jestliže dvojice $\{i, j\}$ probíhají všechny dvojice $i < j$

pak $\{\pi(i), \pi(j)\}$ probíhají rovněž všechny dvojice čísel z $\{1, \dots n\}$,

která jsou různá

$$\frac{8-1}{3-4} = \frac{1-8}{4-3}$$