DETERMINANTY

Opakování: A matice $n \times n$ nad K

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

A horní nebo dolní trojúhelníková

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Jak se determinant mění při řádk. a sloupc. úpravách

1. B vznikne z A výměnou řádků (sloupců) $\det B = -\det A$
2. i-tý řádek vynásobíme číslem c $\det B = c \det A$
3. K i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého $(i \neq j)$ $\det B = \det A$

2

Věta:
$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \underbrace{}_{k} \; \underbrace{}_{n-k} \end{array} = \det B \cdot \det C$$

Důkaz:
$$\det = \sum_{\sigma \in S_n} \ldots \ldots$$

$$\sigma(k+1, k+2, \ldots n) \cap \{1, 2, \ldots, k\} \neq \emptyset \implies a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

jestliže $\sigma(k+1) = 2$, pak $a_{k+1\,\sigma(k+1)} = 0$

Pro ostatní permutace je

$$\sigma(1, 2, \ldots k) = \{1, 2, \ldots k\}$$
$$\sigma(k+1, k+2, \ldots n) = \{k+1, k+2, \ldots n\}$$

③

K danimu σ definujeme

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(k) & k+1 & k+2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \sigma(k+1) & \sigma(k+2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\pi \circ \tau = \sigma$$

$$\tau \circ \pi = \sigma$$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k \\ \sigma(k+1)-k & \sigma(k+2)-k & & \sigma(n)-k \end{pmatrix}$$

$$\det = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\tau \circ \pi} \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \tau \; b_{1\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(k)}$$

$\sigma(1, \ldots k) = \{1, \ldots k\}$

$\sigma(k+1, \ldots n) = \{k+1, \ldots n\}$

$$\cdot\, a_{k+1\,\sigma(k+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$c_{1\,\sigma(k+1)-k} \cdots c_{n-k\,\sigma(n)-k}$$

4

$$= \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \tilde{\pi} \in S_{n-k}}} \operatorname{sgn}\tau \; b_{1\tau(1)}\, b_{2\tau(2)} \cdots b_{k\tau(k)} \cdot \operatorname{sgn}\pi \; c_{1\tilde{\pi}(1)} \cdots c_{n-k\,\tilde{\pi}(n-k)}$$

$$= \left(\sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}\tau \; b_{1\tau(1)}\, b_{2\tau(2)} \cdots b_{k\tau(k)} \right) \cdot \left(\sum_{\tilde{\pi} \in S_{n-k}} \operatorname{sgn}\tilde{\pi} \; c_{1\pi(1)} \cdots c_{n-k\,\tilde{\pi}(n-k)} \right)$$

$$= \det B \;\; \det C .$$

$$5 \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{5} \overset{\text{ERO}}{\sim} \begin{array}{c} \overbrace{}^{2}\;\overbrace{}^{3} \\ \left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}\,2 \\ \}\,3 \end{array} \Rightarrow \det = \det B \cdot \det C$$

5

Příklad Vandermondův determinant

$$\underbrace{D_n = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & & & & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

po úpravách zjistíme, že

$$= \text{něco} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \text{něco} \cdot D(x_2, x_3 \dots x_n)$$

Výpočet dokončíme indukcí

$$x_2^i - x_1^i = (x_2 - x_1)(x_2^{i-1} + x_2^{i-2}x_1 + \dots + x_1^{i-1})$$

(6)

$$D(x_1 \ldots x_n) \underset{\text{odečteme 1 řádek}}{\overset{\text{od 2., 3., \ldots n-tého řádku}}{=}} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & \ldots & & & \\ 0 & x_n - x_1 & \ldots & & & \end{pmatrix} \underset{\text{z i-tého řádku}}{\overset{\text{vytkneme } x_i - x_1}{=}}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1) \det \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^n \\ \hline 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & x_2^2 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3 \ldots & x_2^{n-2} \ldots \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \ldots & \end{array}\right)$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1) \det(1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

7

$=$ od $(n-1)$. sloupce odečteme
x_1- násobek $(n-2)$-ho sloupce
od $(n-2)$-ho sloupce odečteme
x_1- násobek $(n-3)$-ho sloupce
atd
od 2 sloupce (x_2+x_1)
odečteme x_1- násobek
1. sloupce (1)

$$= (x_2-x_1)\dots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & - & - & - & - \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$D(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\, D(x_2, x_3, \dots x_n)$$

$$\Rightarrow D(x_1, x_2 \dots x_n) = \prod_{1\le j<i\le n-1}(x_i - x_j) \cdot D(x_{n-1}, x_n)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

8

$$= \prod_{1 \le j <} (x_i - x_j)$$

CAUCHYOVA VĚTA Nechť A a B jsou matice $n \times n$. Potom

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důkaz: Ukážeme si, že pomocí přičítání sloupců lze upravit

$$\left.\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}\right\}2n \overset{\text{ESO}}{\sim} \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{přehazování řádků}}{\overset{\text{EŘO}}{\sim}} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A \cdot B \end{pmatrix}$$

$2n$

9

Výpočet

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \overset{\text{analogie}}{\underset{\text{předch. věty}}{=}} \det A \det B$$

$$\| $$

$$\det \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix} \overset{\text{analogie předchozí}}{\underset{\text{věty}}{=}} (-1)^n \det(-E) \cdot \det(A\cdot B)$$

$$= (-1)^n (-1)^n \det (A\cdot B) = \det (A\cdot B)$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \sim$$

K 3. sloupci přičteme b_{11}-násobek 1. sloupce a b_{21}-násobek 2. sloupce

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \overset{(A\cdot B)_{11}}{\overset{\shortparallel}{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \underset{(A\cdot B)_{21}}{\underset{\shortparallel}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} \end{pmatrix}$$

K 4. sloupci přičteme b_{12}-násobek 1. sloupce a b_{22}-násobek 2. sloupce

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

11

Cauchyova věta říká, že

$$\det : \underset{\substack{\parallel \\ \text{matice } n\times n, \\ \text{které mají} \\ \text{inverzi}}}{GL(n, \mathbb{K})} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

s operací násobení

$\det(A \cdot B) = \det A \, \det B$

je <u>homomorfismus</u> grup

$GL(n, \mathbb{K})$ .. grupa s násobení matic

Má-li A inverzi, pak $\det A \neq 0$.

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad \det(A \cdot A^{-1}) = \det E$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \implies \det A \neq 0.$$

12

Laplaceův rozvoj determinantu

A matice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij})$

A_{ij} je matice $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 6 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinant matice A_{ij} značíme $|A_{ij}|$ a nazýváme <u>minor</u> nebo <u>subdeterminant</u> det A.

13

Číslo $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$

nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

Věta: Laplaceův rozvoj determinantu podle i-té řádku

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

(14)

Příklad Provedeme rozvoj determinantu podle 1 sloupce

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & & \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & & \\ \vdots & & & & & \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}}_{D_{n+1}} = a_n(-1)^{1+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & -1 & & \\ 0 & x & -1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x \end{pmatrix}}_{a_n x^n}$$

$$+ \underbrace{a_{n-1}(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ 0 & x & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}}_{a_{n-1}x^{n-1}} + a_{n-2}(-1)^{3+1} \det \overbrace{\begin{pmatrix} - & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & - & \\ 0 & & x & -1 \\ & & & \ddots & x \end{pmatrix}}^{a_{n-2}x^{n-2}} + \ldots = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$(-1)x^{n-1}$

15

Jiný způsob – rozvoj podle posledního řádku

$$= \underbrace{a_0 (-1)^{n+1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ x & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & x & -1 \end{pmatrix}}_{a_0 \underbrace{(-1)^{n+2} (-1)^{n}}_{1}} + x \overbrace{(-1)^{n+1+n+1}}^{1} \overbrace{\det \begin{pmatrix} a_n & -1 & & \\ a_{n-1} & x & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & x \end{pmatrix}}^{D_n}$$

$$D_{n+1} = a_0 + x \cdot D_n$$

$$D(a_0, \dots a_n) = a_0 + x\, D(a_1, a_2 \dots a_n)$$

$$D(a_0, \dots a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

16

Důkaz rozvoje podle i-tého řádku

Jestliže A, B, C mají stejné všechny řádky s výjimkou i-tého a

$$r_i(A) = r_i(B) + r_i(C)$$

pak $\quad \det A = \det B + \det C$

Lze zobecnit pro více sčítanců. Toto použijeme na matici A v Lapl. rozvoji

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \; a_{i2} \; 0 \ldots 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \; 0 \; 0 \quad a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + a_{i2} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \; 1 \; 0 \ldots 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + a_{in} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots 1 \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

17

$$i \to \begin{pmatrix} / & / & / & / & / & / & / & / \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ / & / & / & / & / & / & / & / \end{pmatrix}$$
$$\uparrow j$$

výměnou sloupců $(j-1)$ krát dostaneme

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ j \cdot 1 .\ 2 \ldots (j-1).\ (j+1). \ldots \end{array}$$

pořadí ostatních sloupců bude zachováno

změna det je dána $(-1)^{j-1}$

Totéž s řádky

$$\begin{pmatrix} / & / & / & / & / & / \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ / & / & / & / & / & / \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i-1 \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array}$$

změna det $(-1)^{i-1}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline / & / & / & / \\ / & / & / & / \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i-1 \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array} = \det A_{ij}$$
$$1.\ 2 \cdot j-1\ j+1 \ldots$$

18

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j-1+i-1} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$