OPERACE S MATICEMI

Matice $k \times n$ (nebo k/n) je tabulka s k řádky a n sloupci, kde v každém poli je zapsáno reálné nebo komplexní číslo.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} & \cdots & A_{kn} \end{pmatrix}}_{n \text{ sloupců}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} A \\ A \\ A \\ A \end{pmatrix}}\right\} k \text{ řádků}$$

2

A_{ij} je číslo zapsané v i-tém řádku
a v j-tém sloupci

řádek sloupec

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ matice $1 \times n$, říkáme jí řádkový vektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$ ..... matice $k \times 1$, hovoříme o sloupcovém vektoru

Sčítání matic – sčítat můžeme matice stejných rozměrů, sčítání provádíme na složkách

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Uvažujeme reálné nebo komplexní matice $A_{ij} \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, sčítání v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ má mnohé hezké vlastnosti a ty se přenáší na sčítání matic.

(1) komutativita $A+B=B+A$

(2) asociativita $(A+B)+C = A+(B+C)$

(3) $\exists$ nulová matice $\mathbb{O}_{ij}=0$ $\quad A+\mathbb{O}=A$

(4) Ke každé matici A existuje opačná matice $-A$, $(-A)_{ij} = -A_{ij}$

$$A + (-A) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 8 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 12 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

Násobení matice číslem $c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$(cA)_{ij} = cA_{ij} \qquad (-8) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -16 & -24 \\ 8 & 0 & -64 \end{pmatrix}$$

Násobení skalárem má očekávané vlastnosti.

(1) $(c+d)A = cA + dA$

(2) $c(A+B) = cA + cB$

(3) $c(dA) = (cd)A$

(4) $1 \cdot A = A$

Násobení matic – motivace pomocí soustav lin. rovnic

1 rovnice o 1 neznámé

$$a \cdot x = b$$

k rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n = b_k$$

Matice soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (A|b)$$

$$a\,x = b$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Soustavu chceme napsat ve formě násobení matic A a x, kde výsledkem je matice b.

$$A \cdot x = b$$

Násobení matice $k \times n$ maticí $n \times 1$ je matice $k \times 1$.

Aby násobení odpovídalo soustavě rovnic definujeme

$$(A \cdot x)_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

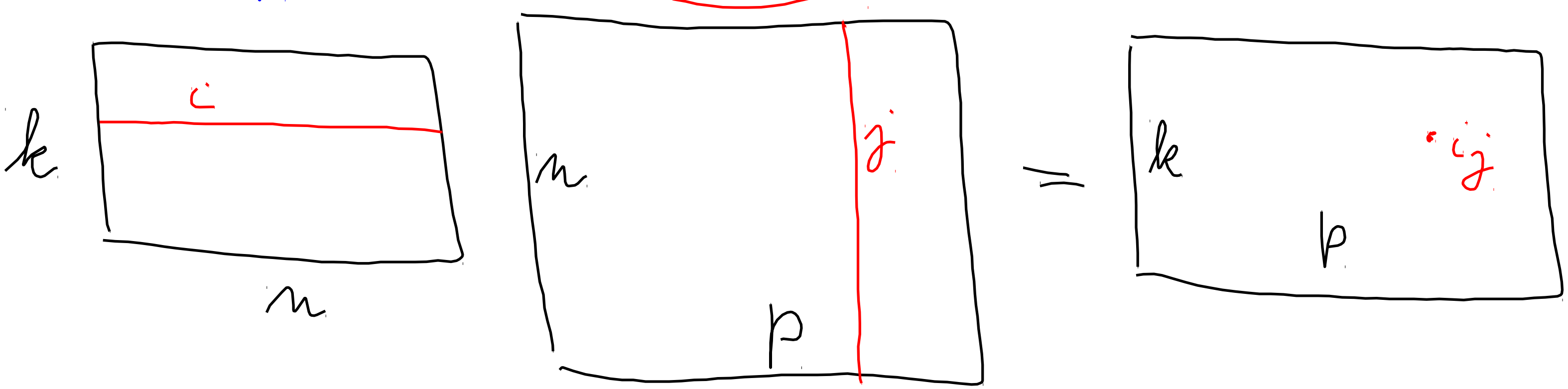
$$(A \cdot x)_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$(A \cdot x)_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

Násobení řádku $1 \times n$ a sloupce $n \times 1$ je číslo (matice 1×1)

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$$

Toto násobení umožňuje definovat násobení matic A a B, kde
A je matice $k \times n$, B je matice $n \times p$.
Výsledkem je matice $k \times p$



9

$$(A\cdot B)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -1 & 40 & 13 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Takto definované násobení umožňuje zapsat soustavu rovnic pomocí násobení.

$$A\cdot x = b$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- príklady

A matice $k \times n$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{k1} \end{pmatrix} = S_1(A)$$

1. slopec matice A

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ \vdots \\ a_{k3} \end{pmatrix}$$

3. slopec matice A

Řádek $\underbrace{(1,0,0\dots0)}_{k}$ násobíme matici A typu $k\times n$

$$(1\ 0\ 0\dots0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}\end{pmatrix} = (a_{11}\ a_{12}\ \ a_{1n}) = r_1(A)$$

1. řádek matice A

$(0\ 1\ 0\dots\ 0)\ A = r_2(A)$ 2. řádek matice A.

Jednotková matice typu $n\times n$, A typu $k\times n$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1\end{pmatrix} \qquad A\cdot E_n = (s_1(A)\ s_2(A)\dots s_n(A)) = A$$

jednotková matice E_k typu $k \times k$

$$E_k = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\} k}_{k}$$

$$E_k \cdot \underset{k\times n}{A} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = A$$

Vlastnosti násobení

NENÍ KOMUTATIVNÍ !

$$\underset{k\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} \qquad \underset{n\times p}{B} \circ \underset{k\times n}{A}$$

abychom mohli násobit musí být $p = k$.

Nechť tedy A je typu $k \times n$ a B je typu $n \times k$.

$$\underbrace{A \cdot B}_{\text{typu } k \times k} \qquad \underbrace{B \cdot A}_{\text{typu } n \times n}$$

Abychom mohli mluvit o komutativitě musí být $n = k$.

Obě matice musí být čtvercové stejného typu

A, B $n \times n$ Ani potom obecně neplatí

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(14)

Násobení matic je asociativní

$$\underset{n\times k}{(A}\cdot\underset{k\times p}{B)}\cdot\underset{p\times s}{C}=\underset{n\times k}{A}\cdot(\underset{k\times p}{B}\cdot\underset{p\times s}{C)}$$

Má-li smysl jedno násobení má smysl i druhé násobení.

$$[(A\cdot B)\cdot C]_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{p}(A\cdot B)_{i\alpha}C_{\alpha j}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{\beta=1}^{k}A_{i\beta}B_{\beta\alpha}\right)\cdot C_{\alpha j}=\sum_{\substack{\alpha=1,\dots p\\ \beta=1,\dots k}}A_{i\beta}B_{\beta\alpha}C_{\alpha j}$$

Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání matic

$$\underbrace{\underbrace{A}_{k\times n} \cdot \overbrace{(\underbrace{B}_{n\times p} + \underbrace{C}_{n\times p})}^{n\times p}}_{k\times p} \qquad \underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{k\times p} + \underbrace{(A\cdot C)}_{k\times p}}_{k\times p}$$

<u>Důkaz:</u>

$$(A\cdot(B+C))_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}(B+C)_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(A_{i\alpha}B_{\alpha j} + A_{i\alpha}C_{\alpha j}\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}C_{\alpha j} = (A\cdot B)_{ij} + (AC)_{ij}$$

Jednotková matice

$$\underbrace{A}_{k\times n} \cdot \underbrace{E_n}_{n\times n} = A \qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{E_k}_{k\times k} \cdot \underbrace{A}_{k\times n} = A$$

Inverzní matice k matici A je matice B taková, že

$$\underbrace{\underbrace{A}_{k\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times k}}_{k\times k} = \underbrace{\underbrace{B}_{n\times k} \cdot \underbrace{A}_{k\times n}}_{n\times n} = E$$

$$\boxed{n = k}$$

Aby vůbec definice měla smysl, musíme uvažovat matici A čtvercovou

17

Inverzní matice k matici A typu $n\times n$ je matice B typu $n\times n$ taková, že

$$A\cdot B = B\cdot A = E_n$$

Existuje nenulová matice, která nemá inverzní matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. řádek je dvojnásobkem 1. řádku, tedy matice $\neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+2b_{21} & b_{12}+2b_{22} \\ 2b_{11}+4b_{21} & 2b_{12}+4b_{22} \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice k matici A typu $k\times n$ je matice A^T typu $n\times k$ taková, že

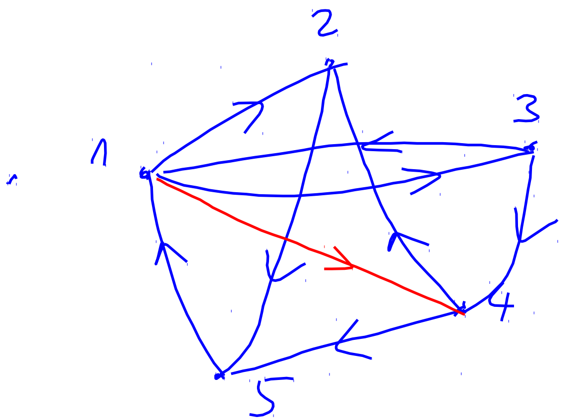
$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Za DÚ dokažte, že

$$\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{A}_{k\times n}\cdot\underbrace{B}_{n\times p}}_{k\times p}\right)^T}_{p\times k} = \underbrace{\underbrace{B^T}_{p\times n}\cdot\underbrace{A^T}_{n\times k}}_{p\times k}$$

Orientované grafy a násobení matic



Vrcholy grafu 1, 2, 3, 4, 5

Orient. hrany 12, 13, 31, ...

Tento graf lze zapsat pomocí matice 5×5

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je v grafu hrana } ij \\ 0 & \text{jestliže tam není} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolik existuje cest z 1 do 5 délky 2?

$1 \to 2 \to 5$

$1 \to 4 \to 5$

délky 2

Počet cest můžeme zjistit tak, že provedeme násobení

z i do j

$$A \cdot A = A^2$$

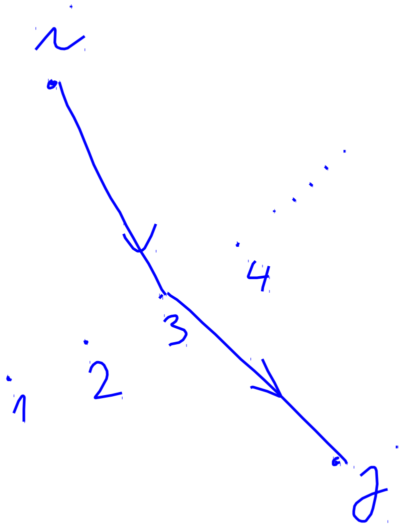
$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$(A^2)_{ij}$ toto číslo

určuje počet cest

délky 2 z i do j

21



Počet ciest z i do j =

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\text{počet ciest z } i \text{ do } k)}_{A_{ik}} \underbrace{(\text{počet ciest z } k \text{ do } j)}_{A_{kj}}$$

63

$$= (A \cdot A)_{ij}$$

Stejným spôsobom lze ukázať, že počet ciest dĺžky n z i do j je číslo v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n \text{ krát}}$