Požadavky ke zkoušce

- 3 části

(1) písemky v semestru na cvičeních
8× za 2 body, je potřeba získat 8 bodů
Kdo nesplní píše náhradní písemku na začátku.

(2) Písemka ve zkouškovém
- část početní (max 12 b) k nim se přičte $\frac{\text{počet bodů v semestru} - 8}{2}$
- část teoretickou (max 10b)

Podmínky početní část aspoň 7b
teor. část aspoň 5b

(3) Úvodní zkouška – seznam věcí, které je nutno bezpodmínečně umět (v interaktivní osnově)

Ke každé definici je potřeba znát netriviální příklady!

POČÍTÁNÍ S REÁLNÝMI A KOMPL. ČÍSLY

$\mathbb{R}$ reálná čísla

$\mathbb{C}$ kompl. čísla

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\quad + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

$\{(a,b),\ a \in \mathbb{K},\ b \in \mathbb{K}\}$

sčítání | násobení

$x, y, z \in \mathbb{K}$ $\quad x + y = y + x$ $\qquad x \cdot y = y \cdot x$ komutativní

$(x+y)+z = x+(y+z)$ $\qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ asociativní

$\exists 0$ $\quad x + 0 = x$ $\qquad \exists 1$ $\quad x \cdot 1 = x$ neutrální prvek

$\forall x\ \exists (-x) \quad x+(-x)=0$ $\qquad$ $\forall x \neq 0\ \exists x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$ inverzní prvek

Distributivita $\qquad (x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$

Stejné vlastnosti mají rovněž racionální čísla $\mathbb{Q}$, ale celá čísla $\mathbb{Z}$ a přirozená čísla $\mathbb{N}$ má některý z těchto vlastností nemají.

SOUSTAVY LIN. ROVNIC

Soustava k rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots x_n$ je

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

a_{ij} je koeficient v i-té rovnici u neznámé x_j, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathbb{K}$

Matice soustavy je tabulka $k \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Jestliže všechny b_i jsou rovny 0, hovoříme o homogenní soustavě

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0$$

Má vždy aspoň jedno řešení, a to $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Nehomogenní soustava – aspoň jedna $b_i \neq 0$.

Řešení soustavy je n-tice $x_1, x_2, \dots x_n$ čísel z K takových, že vyhovuje rovnicím.

Ekvivalentní soustavy jsou soustavy, které mají stejnou množinu řešení.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou úpravy, které převádějí danou soustavu na soustavu ekvivalentní, tj. nemění množinu řešení.

$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ Není ekvivalentní úprava

6

Seznam elementárních ekvivalentních úprav

(1) Jednu rovnici vynásobíme číslem různým od 0.

(2) Dvě rovnice přehodíme (změníme pořadí).

(3) K dané rovnici přičteme násobek jiné rovnice.

Tyto úpravy mají odraz v úpravách matic, které soustavy reprezentují. Těmto úpravám matic říkáme elementární řádkové operace (EŘO, ERO)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

(1) Daný řádek vynásobíme číslem $k \neq 0$

(2) Dva řádky přehodíme.

(3) K danému řádku přičteme násobek jiného řádku.

Které soustavy umíme hned vyřešit?

Vedoucí koeficient i-tého řádku matice je první nenulový koeficient v tomto řádku.

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0$$

<u>Schodovitý tvar matice</u> je tvar matice takový, že

(1) nulové řádky jsou za nenulovými

(2) Je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak vedoucí koeficient řádku $(i+1)$ je $a_{i+1,l}$, kde $l > j$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

je ve schodovitém tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

není ve schodovitém tvaru

TVRZENÍ Soustavu, která má matici ve schod. tvaru, umíme snadno vyřešit.

Mohou nastat dvě možnosti

1. V matici soustavy je řádek

$$\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \;\middle|\; c \neq 0\right).$$

V tomto případě soustava nemá řešení.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0 \neq c$$

2. Výše uvedený řádek v matici není. To znamená, že nenulové řádky mají nenulové koeficienty u některé neznámé.

Řešení demonstrujme na příkladu matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad -2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

- neznámé, které nestojí v nedoucích koeficientů, zvolíme libovolně
- zdola počítáme neznámé v nedoucích koeficientů pomocí již spočítaných nebo zvolených neznámých

$x_5 = p$ libovolné číslo z K

$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$ z 3. rovnice

$x_3 = -x_5 - 2x_4 = -p - 2(1-2p) =$
$= 3p - 2$ z 2. rovnice

$x_2 = q$ libovolné

$$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 + 2(3p-2) - (1-2p) - p$$
$$= 7p - 2$$ z první rovnice

Všechna řešení soustavy jsou 5-tice

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7p-2,\ q,\ 3p-2,\ 1-2p,\ p) \qquad p \in \mathbb{K},\ q \in \mathbb{K}$$

<u>Věta:</u> Každou matici lze převést pomocí elementárních řádkových operací na schodovitý tvar.

Důkaz je algoritmem. Nazývá se GAUSSOVA ELIMINACE

- nechť 1. sloupec s nenulovým číslem je j-tý
- nechť 1. nenulové číslo v tomto sloupci je a_{ij}

= vyměníme 1. a i-tý řádek

označíme to a_{1j}

$$
\begin{array}{c}
 \\
\left(\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & 0 & a_{ij}\neq 0 & & \\
 & & \vdots & &
\end{array}\right)
\end{array}
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc}
0 \cdots & 0 & a_{1j}\neq 0 & \\
0 \cdots & 0 & \vdots & \\
\vdots & & a_{kj} & \\
0 & 0 & \vdots &
\end{array}\right)
$$

Jestliže $a_{kj}\neq 0$, pak od k-tého řádku odečteme

$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ - násobek 1. řádku. Tím na místě $(k\ j)$

dostaneme $a_{kj}-\frac{a_{kj}}{a_{1j}}a_{1j}=0.$

Po těchto úpravách bude mít matice tvar

$$
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & a_{1j}\neq 0 & \\
0 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & B \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}\right)
$$

Škrtneme 1. řádek a prvních j-sloupců.
Dostaneme matici B a s ní provádíme stejné operace.

To provádíme tak dlouho, až získáme schod. tvar.

Příklad:

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - x_4 = 1 \quad (-2) \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array}
\underset{\text{výměna a 3. řádky}}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ (-2) \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ (-6) \end{array}
\end{array}
$$

od 3. řádku odečteme 2. $\sim$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ (0) \end{array}
$$

Z posledního řádku vidíme, že soustava nemá řešení.

14

Řešení zadané upravené soustavy je

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2$$
$$5x_2 - 8x_3 + x_4 = -6$$

$x_4 = p$, $x_3 = q$

$$5x_2 = -6 + 8x_3 - x_4 = -6 + 8q - p$$

$$x_2 = -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{p}{5}$$

$$x_1 = 2 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 - \frac{6}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{p}{5} - 4q + p$$
$$= \frac{4}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p$$