BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou <u>lin. závislé</u>, jestliže rovnice

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = \vec{0}$$

v neznámých $a_1, a_2, \ldots a_k$ má netriviální řešení
$(a_1, a_2, \ldots a_k) \neq (0, 0, \ldots 0)$.

$u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou <u>lin. nezávislé</u>, jestliže rovnice

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = \vec{0}$$

má pouze triviální řešení $(a_1, \ldots a_k) = (0, 0, \ldots 0)$

<u>Jiná formulace</u>: Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže pro všechny k-tice čísel $(a_1, a_2, \ldots a_k)$ platí

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = \vec{0} \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_k) = (0, 0, \ldots 0)$$

implikace

<u>Lemma</u>: Vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou lin. závislé, právě když jeden z nich je lin. kombinací ostatních.

<u>Dk</u>: $\Leftarrow$ Nechť $u_k = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1}$. Pak platí

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k = \vec{0}$$

přičemž $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, -1) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow$ Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$ a nechť např. $a_k \neq 0$.

Potom

$$a_k u_k = -a_1 u_1 - a_2 u_2 - \dots - a_{k-1} u_{k-1} \quad \Big| \cdot a_k^{-1}$$

$$u_k = -\frac{a_1}{a_k} u_1 - \frac{a_2}{a_k} u_2 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} u_{k-1}$$

u_k je lin. kombinací ostatních vektorů. $\square$

(3)

<u>Příklad</u> Jsou vektory $u_1 = (1,2,1,0)^T$, $u_2 = (1,1,-1,2)^T$, $u_3 = (1,0,1,1)^T$ $\in \mathbb{R}^4$ lin. nezávislé?

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{0}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnáme 1., 2., 3. a 4. složku vektorů. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 \phantom{{}+a_3} &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Vektory jsou lin. nezávislé.

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor U, jestliže

$$\forall u \in U \ \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

(Jinak zapsáno lin. obalu: $[u_1, u_2, \dots u_n] = U$)

Prostor U je vektorovým prostorem konečné dimenze, jestliže existuje n-tice vektorů, které generují prostor U.

Říkáme, že dimenze je nekonečná. Čemu se rovná budeme definovat až později.

Příklady $\mathbb{R}^n$ je prostor konečné dimenze. Každý vektor můžeme napsat jako lin. kombinaci vektorů

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots\dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_n[x]$ polynomy stupně nejvýše n

Každý takový polynom je lin. kombinací polynomů

$$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n.$$

$\mathbb{R}[x]$ prostor všech polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$

– není prostor konečné dimenze.

$C[0,1]$ spojité funkce na $[0,1]$

– není prostor konečné dimenze

Báze vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ je n-tice vektorů $u_1, u_2, \ldots u_n$ taková, že

(1) generují vekt. prostor U

$$\forall u \in U \ \exists (a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{K}^n \qquad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

(2) jsou lin. nezávislé

$$\forall (a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathbb{K}^n \qquad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Příklady $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) je báze $\mathbb{R}^3$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ukážeme, že e_1, e_2, e_3 generují $\mathbb{R}^3$.

jsou lin. nezávislé

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \vec{0}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$a_3 = 0$

Generatoare $\mathbb{R}^3$ şi bază

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} a_1 &= x_1 \\ a_2 &= x_2 \\ a_3 &= x_3 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Lin. independent

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}_3[x]$ polynomy stupně nejvýše 3 s reálnými koeficienty

$1, x, x^2, x^3$ tvoří bázi

Každý polynom st ≤ 3 je jejich lin. kombinací

$$a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = 0$$

Naším cílem bude dokázat

(1) každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi,

(2) každé dvě báze v prostoru U mají stejný počet prvků.

Věta o výběru lin. nezávislých vektorů

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in U$ jsou lin. nezávislé.
Nechť $u_1, u_2, \dots u_l \in U$ jsou libovolné.
Potom lze z druhého seznamu vybrat nějaký $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l]$

Důsledek: Každý seznam lin. nezávislých vektorů v prostoru konečné dimenze lze doplnit na bázi.

Speciálně: Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Dk: Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je seznam lin. nezávislých vektorů. Protože U je prostor konečné dimenze, existují v něm vektory $u_1, u_2, \dots u_\ell$ takové, že $[u_1, u_2, \dots u_\ell] = U$.

Aplikujme nahrazování na tyto dva seznamy. Podle věty lze vybrat vektory $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé,

(2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1 \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_\ell]$

Vektory $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}$ tvoří bázi. (1) říká, že jsou lin. nezávislé

Dále platí

$$U = [u_1, u_2, \dots u_k] \subseteq [\underbrace{v_1, v_2, \dots v_k, u_1, \dots u_l}_{\text{všechny jsou v } U}] \subseteq U$$

Musí tedy $[v_1, v_2 \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_l] = U$.

Z (2) plyne

$$[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1, \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_l] = U.$$

Tedy $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}$ generují U.

Důkaz věty o výměně lin. nezávislých vektorů

Indukcí podle počtu vektorů $u_1, u_2, \dots u_\ell$, tj. podle ℓ.

Nechť $\ell = 1$. Máme $v_1, v_2, \dots v_k$ lin. nezávislé a nějaké u_1.

Mohou nastat dvě možnosti:

(1) u_1 je lin. kombinací $v_1, \dots v_k$. Pak ho nevyměníme.

Zřejmě $v_1 \dots v_k$ jsou lin. nezávislé. Musíme dokázat, že

$$[v_1, \dots v_k] = [v_1, \dots v_k, u_1].$$

Máme zřejmě $[v_1, \dots v_k] \subseteq [v_1, \dots v_k, u_1]$

Chceme dokázat opačnou inkluzi.

Nechť $u \in [v_1, \dots v_k, u_1]$, $u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b \cdot u_1$

Víme, že $u_1 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$. Proto

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k)$$
$$= (a_1 + b c_1) v_1 + \dots + (a_k + b c_k) v_k \in [v_1, \dots v_k].$$

$$[v_1, \dots v_k, u_1] \subseteq [v_1, \dots v_k]$$

(2) u_1 není lin. kombinací $v_1, v_2, \dots v_k$. V tomto případě u_1 vybereme.

Zřejmě

$$[v_1 \dots v_k, u_1] = [v_1 \dots v_k, u_1]$$

Stačí dokázat, že $v_1, \dots, v_k, u_1$ jsou lin. nezávislé.

Nechť $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b u_1 = 0$

Kdyby $b \neq 0$, mohli bychom u_1 vyjádřit jako lin. kombinaci $v_1 \dots v_k$

$$u_1 = -\frac{a_1}{b} v_1 - \dots - \frac{a_k}{b} v_k$$

ale u_1 není lin. kombinací $v_1 \dots v_k$. Proto $b = 0$.

Tedy $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$

Protože $v_1 \dots v_k$ jsou lin. nezávislé, je $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Tedy $v_1 \dots v_k, u_1$ jsou lin. nezávislé.

<u>Indukční krok</u> Nechť tvrzení platí pro $\ell \geq 1$. Dokážeme ho pro $\ell + 1$.

$v_1, \dots, v_k$ lin. nezávislé, $u_1, \dots, u_\ell, u_{\ell+1}$ libovolné.

Podle ind. předpokladu lze z $u_1, \dots, u_\ell$ vybrat $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_\ell]$

Musíme rozhodnout, zda $u_{\ell+1}$ vybrat či nevybrat.

(A) Je-li $u_{\ell+1}$ lin. kombinací $v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}$, pak ho nevybereme.

Pak musíme dokázat

$$[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}, u_{\ell+1}]$$
$$= [v_1, \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_{\ell+1}]$$

B) $u_{\ell+1}$ není lin. kombinací $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_\ell}$. Pak ho vybereme

Musíme dokázat, že

$$v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_\ell}, u_{\ell+1} \text{ jsou lin. nezávislé.}$$

Provádí se stejně jako pro $\ell = 1$.

Dále musíme ukázat, že

$$[\underbrace{v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_\ell}}, u_{\ell+1}] = [\underbrace{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_\ell}, u_{\ell+1}]$$

Dokážeme z ind. předpokladu (2).

Početní algoritmus pro předchozí větu

Mějme vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in \mathbb{K}^m$. Chceme vybrat $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ lin. nezávislé a takové, že

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell].$$

$u_1, u_2, \dots u_\ell$ napíšeme jako sloupce do matice $m \times \ell$. S touto maticí provádíme řádkové el. operace tak, abychom ji převedli do schodovitého tvaru. V tomto schodovitém tvaru máme sloupce $i_1, i_2, \dots, i_r$, ve kterých leží vedoucí koeficienty řádků.

Vektory $u_{i_1}, u_{i_2} \dots u_{i_r}$ mají požadované vlastnosti.

Zdůvodnění

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & & i_3 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} i_1 = 1 \\ i_2 = 2 \\ i_4 = 4 \end{array}$$

$u_1\ u_2\ u_4$ jsou lin. nezávislé – dokážeme

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = \vec{0}$$

Matice příslušné hom. soustavy je

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{operace}]{\text{stejné řádk.}} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_4 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}$$

u_1, u_2, u_4 jsou LN.

Nyní dokážeme, že u_3 je lin. kombinací předchozích, tj u_1 a u_2. To vede k řešení soustavy

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u_3$$

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{operace}]{\text{stejné řádk.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava s touto maticí má řešení.

Tedy u_3 je lin. kombinací u_1 a u_2.