Báze, dimenze a souřadnice

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ je báze prostoru U, jestliže

(1) jsou tyto vektory lin. nezávislé

$\forall (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

(2) $\forall u \in U \quad \exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \qquad u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Minule jsme dokázali, že každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Dnes ukážeme, že každé dvě báze prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Steinitzova věta:

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n]$.

Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé, pak $k \le n$.

Důkaz nepřímý. Místo implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Nechť $k > n$.

$$(*)\left\{\begin{aligned} v_1 &= a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots\dots a_{n1} u_n = (u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\ &\ \vdots \\ v_j &= a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \dots + a_{nj} u_n = (u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\ &\ \vdots \\ v_k &= \end{aligned}\right.$$

(*) můžeme napsat jedinou rovnicí

$$\underline{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} A}$$

A má rozměry $n \times k$. My předpokládáme, že $k > n$.

Proto homogenní soustava

$$A \cdot x = 0 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad 0 \in \mathbb{K}^n$$

Po úpravě matice $\boxed{A}$ na schod. tvar máme nejvýše

n vedoucích koeficientů. Tedy aspoň $k-n$ neznámých můžeme

zvolit libovolně, různé od 0. Tedy soustava $Ax = 0$

má netriviální řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_k \end{pmatrix}$.

Vezmeme tato řešení $x_1, x_2, \dots, x_k$ a lineární kombinaci

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = (v_1\ v_2\ \dots\ v_k)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix} =$$

$$= (u_1\ u_2 \dots u_n)\,\underbrace{A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}}_{0} = (u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Dokázali jsme, že existuje k-tice $(x_1, \dots, x_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ taková, že

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = \vec{0}.$$

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. závislé.

Důsledek: Každé dvě báze prostoru U mají stejný počet prvků.

Důkaz: Nechť $(v_1, \dots v_k)$ a $(u_1, \dots u_n)$ jsou dvě báze.

Chceme dokázat, že $k = n$.

(1) Dokážeme, že $k \leq n$

$v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. nezávislé

$v_1, v_2, \dots v_k \in U = [u_1, u_2, \dots u_n]$

Podle Steinitzovy věty je $k \leq n$.

(2) Důkaz, že $k \geq n$.

$u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé

$u_1, u_2, \dots u_n \in U = [v_1, v_2, \dots v_k]$

Podle Steinitzovy věty $n \leq k$

Definice dimenze Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze nad $\mathbb{K}$.
Dimenze vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ je definována jako počet vektorů
nějaké jeho báze. Značení $\dim_{\mathbb{K}} U$.

Příklady

$U = \mathbb{K}^n$, vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ vektor $\mathbb{K}^n$ má bázi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \mathbb{K}_n[x]$ polynomy s koeficienty v $\mathbb{K}$ stupně nejvýše n

vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$$\dim \mathbb{K}_n[x] = n+1$$

vektor U má bázi $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

$U = \mathbb{C}^2$ vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$$

$U = \mathbb{C}^2$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$

báze $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ je tvořená $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$

$$(a+ib,\ c+id) = a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$$

Nechť $a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0+i0,\ 0+i0)$

$$(a+ib,\ c+id) = (0+i0,\ 0+i0)$$

$$a+ib = 0+i0 \Rightarrow a=0,\ b=0$$

$$c+id = 0+i0 \Rightarrow c=0,\ d=0$$

Tedy $(1,0)$, $(i,0)$, $(0,1)$ a $(0,i)$ jsou v $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ lin. nezávislé.

Tyto vektory nejsou lin. nezávislé nad $\mathbb{C}$.

$$(i,0) = i(1,0)$$

$$(0,i) = i(0,1)$$

4 UŽITEČNÉ VĚTY O DIMENZI

1. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n \in U$ jsou lin. nezávislé. Pak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tvoří bázi U.

Důkaz pomocí věty z minulé přednášky.
Každý seznam lin. nezávislých vektorů lze doplnit na bázi.
Doplníme $v_1, \ldots, v_n$ na bázi. Kdybychom přidali nějaký vektor, pak by báze měla více než n prvků. To je ale ve sporu s tím, že $\dim U = n$.

2. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ generují U. Pak $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tvoří bázi.

Použijeme větu o výběru lin. nezávislých vektorů ze skupiny lin. obalem. Lze vybrat vektory $u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$ lin. nez. a $[u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}] = [u_1, u_2, \ldots, u_n] = U$.

Tím dostaneme bázi $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$. Kdyby $k < n$, je to spor s tím, že $\dim U = n$. Proto musí být $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots i_k = n$.
Tedy $u_1, \dots, u_n$ je báze U.

③ Nechť V je podprostor U. Je-li U konečné dimenze, je rovněž V konečné dimenze a

$$\dim V \leq \dim U$$

Nechť V není konečné dimenze. Máme posloupnost vektorů

$v_1, v_2, v_3, \dots \in V$ $\quad v_2 \notin [v_1],\ v_3 \notin [v_1, v_2], \dots,$
$v_n \notin [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$

Nechť $\dim U = k$.
Pak vektory $v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}$ jsou lin. nezávislé. Podle ①
Podle St. věty $v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \in U = [u_1, u_2, \dots u_k]$ báze U

implikuje $k+1 < k$, spor. Tedy V má konečnou dimenzi.
Vezmeme jeho bázi $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ $(\dim V = \ell)$
Tyto vektory jsou lin. nezávislé v U, můžeme je doplnit
na bázi U. Proto

$\ell = \dim V \leq$ počet vektorů báze $U = \dim U$.

(4) Je-li $V \subseteq U$ vekt. podprostor a $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$,
pak $V = U$.

Nechť $v_1, \dots, v_k$ je báze V. Tyto vektory jsou lin. nezávislé
ve V, tedy i v U. Víme, že $\dim U = \dim V = k$. Proto
podle (1) tvoří $v_1, v_2, \dots v_k$ bázi U. Proto $U = V$.

Souřadnice

Lemma Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi prostoru U, právě když platí

$$(*) \quad \forall u \in U \ \exists! (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

existuje právě

Důkaz: Definice báze, vektory $u_1, u_2, \dots u_n$ splňující

$$(1) \quad \forall (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i = \vec{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

$$(2) \quad \forall u \in U \ \exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

Platí, že $(*) \Rightarrow (2)$.

Dokážeme, že $(*) \Rightarrow (1)$. Nechť $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \vec{0}$. Víme, že

$$\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i = \vec{0}$$

Podle $(*)$ existuje jediná n-tice čísel, která nám dává vektor $\vec{0}$.

Proto $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Dokázali jsme (1).

(1) a (2) $\Rightarrow$ (*)

$\forall u \in U \quad \exists a_1 \dots a_n \qquad u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

$\qquad\qquad \exists b_1, \dots b_n \qquad u = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

Druhou rovnici odečteme od první:

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \dots + (a_n - b_n)u_n$$

Podle (1) je $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$

Tedy $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Toto tvrzení nám umožňuje definovat souřadnice vektoru.

Definice Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ prostoru U je n-tice čísel $a_1, a_2, \dots a_n$ takových, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Předchozí věta zaručuje, že souřadnice jsou definovány jednoznačně

Označení Souřadnice vektoru u v bázi α zapisujeme **do sloupce** takto

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ kde } u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

Příklad Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

$$\mathbb{R}_2[x] = U \qquad \alpha = (1, x, x^2) \qquad \beta = (1, x-1, (x-1)^2)$$

$$u = x^2 + x - 1 \qquad x^2 + x - 1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2$$

$$(x^2+x-1)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2+x-1 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{3}(x-1) + \underline{1}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + x - \underline{1}$$

$$(x^2+x-1)_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vekt. prostor U nad $\mathbb{K}$ s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$. Přiřazení souřadnic v bázi α nám definuje zobrazení

$$(\ \ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$u \longmapsto (u)_\alpha$$

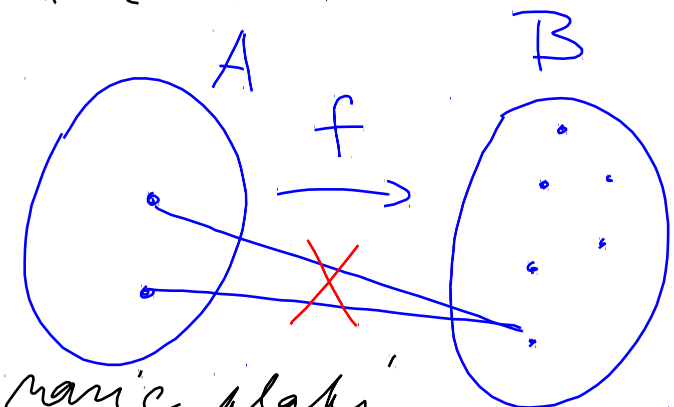
Toto zobrazení je bijekce. Navíc je to zobrazení na (surjektivní)

Zobrazení na znamená: $\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ existuje u, tak že

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Zobrazení je prosté: jestliže $(u)_\alpha = (v)_\alpha \Rightarrow u = v$.

$$(u)_\alpha = (v)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = v$$



Tedy $(\ )_\alpha : U \to \mathbb{K}^n$ je bijekce a navíc platí:

(a) $$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

(b) $$(cu)_\alpha = c(u)_\alpha$$

Dokažme (a). Nechť $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ a $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$u + v = \underbrace{a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n}_{u} + \underbrace{b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n}_{v} = (a_1+b_1)u_1 + \dots + (a_n+b_n)u_n$$

Tedy $$(u+v)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

Průnik a součet vekt. podprostorů

Nechť V a W jsou dva podprostory v U.

Potom jejich průnik je také vekt. podprostor.

<u>Proč?</u> $\vec{o} \in V$, $\vec{o} \in W \Rightarrow \vec{o} \in V \cap W$, tedy $V \cap W \neq \emptyset$.

Jestliže $u_1, u_2 \in V \cap W$, pak $u_1, u_2 \in V \Rightarrow u_1 + u_2 \in V$

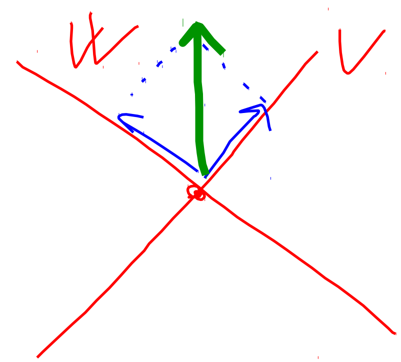
pak $u_1, u_2 \in W \Rightarrow u_1 + u_2 \in W$

Proto $u_1 + u_2 \in V \cap W$.

Obdobně by se dokázalo, že $u \in V \cap W \Rightarrow cu \in V \cap W$

Sjednocení $V \cup W$ podprostorem obecně není.

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}^2$



Součet takových vektorů neleží ve sjednocení.

Součet vektorových podprostorů

U vekt. prostor, V a W jeho podprostory. Definujme

$$V+W=\{u\in U;\ \exists v\in V\ \exists w\in W:\ u=v+w\}$$

(Jinak lze napsat takto:

$$V+W=\{v+w\in U;\ v\in V,\ w\in W\}$$

V+W je podmnožina vekt. prostoru U. Ukážeme, že je to vekt. podprostor:

Protože V a W jsou neprázdné, tak V+W je neprázdná.

$u_1, u_2 \in V+W$ $\qquad u_1 = v_1+w_1 \qquad v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W$

$\qquad u_2 = v_2+w_2$

$$u_1+u_2 = v_1+w_1+v_2+w_2 = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in V}+\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W} \in V+W$$

Analogicky pro násobek.

$V+W$ je vekt. podprostor. Určitě platí $V \subseteq V+W$, $W \subseteq V+W$

$v \in V$, $v = \underset{\substack{\cap \\ V}}{v} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{\vec{0}} \in V+W$

Lze dokázat, že $V+W$ je nejmenší vekt. podprostor v U obsahující V i W. (tedy i $V \cup W$)

V lineární algebře je součet podprostorů náhradou sjednocení podprostorů.