DETERMINANTY

G a H nechť jsou grupy

$\cdot : G \times G \longrightarrow G$ $\qquad$ $\circ : H \times H \longrightarrow H$

(1) asociativní

(2) má neutrální prvek

(3) ke každému má inverzní

Homomorfismus grup je zobrazení $f : G \to H$ s vlastností

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y).$$

Homomorfismus má další dvě vlastnosti:

(1) pro neutrální prvek e v G a $\bar{e}$ v H platí

$$f(e) = \bar{e}$$

(2) $\forall x \in G$ $\quad f(x^{-1}) = \left(f(x)\right)^{-1}$

Důkaz: (1)

$$\underline{f(e)} = f(e \cdot e) = \underline{f(e) \circ f(e)}$$

Tuto rovnost vynásobíme $(f(e))^{-1}$ zleva:

$$\underbrace{(f(e))^{-1} \circ f(e)}_{\bar{e}} = (f(e))^{-1} \circ f(e) \circ f(e)$$

$$\bar{e} = \bar{e} \cdot f(e)$$

$$\bar{e} = f(e)$$

(2) $$\underline{f(x) \circ f(x^{-1})} = f(x \cdot x^{-1}) = f(e) = \underline{\bar{e}}$$

Podobnou rovnost vynásobíme $(f(x))^{-1}$ zleva:

$$\underbrace{(f(x))^{-1} \circ f(x)}_{\bar{e}} \circ f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \circ \bar{e}$$

$$\bar{e} \circ f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \circ \bar{e}$$

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

Permutace Grupa permutací S_n je množina bijekcí množiny $\{1, 2, 3, \dots n\}$ na sebe, společně s operací skládání zobrazení.

Definice permutace tabulkou

i	1	2	3	4
$\pi(i)$	4	1	3	2

Znaménko permutace π

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{n \geq i > j \geq 1} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} \in \{1, -1\}$$

Permutace s $\operatorname{sign} = 1$ ...... sudé permutace

$= -1$ ..... liché permutace

$\{1, -1\}$ s operací násobení je grupa

$$\operatorname{sign} : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot)$$

je homomorfismus grup, neboť platí

$$\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = (\operatorname{sign} \pi) \cdot (\operatorname{sign} \sigma)$$

Praktický výpočet znaménka permutace

Nechť π je permutace ze S_n. Dvojice čísel (i, j), kde $i > j$ se nazývá inverzí v permutaci π, jestliže

$$\pi(i) < \pi(j)$$

Pro inverzi je zlomek

$$\frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

z definice znaménka záporný. Proto

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^{\text{počet inverzí}}$$

5

Počítání inverzí

na příkladu

i	1	2	3	4	5	6
$\pi(i)$	6	2	4	5	3	1

Hledáme v dolním řádku dvojice, kde první číslo je větší než druhé

62 64 65 63 61

21

43 41

53 51

31

1

inverze k 6 5

inverze k 2 1

inverze k 4 2

inverze k 5 2

inverze k 3 1

inverze k 1 0

Celkem inverzí 11

6

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^{11} = \underline{\underline{-1}}$$

<u>jiný příklad</u>

i	1	2	3	......	$n-1$	n
$\pi(i)$	n	$n-1$	$n-2$		2	1

počet inverzí je

$$(n-1)+(n-2)+\dots+1+0 = \frac{(n-1)n}{2}$$

n

$$\begin{array}{cccccc} n-1 & + n-2 & \dots\dots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & & n-2 & n-1 \\ \hline n & + n & & + n & + n \end{array} = (n-1)\cdot n$$

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$n = 4k$ nebo $4k+1$

$\frac{n(n-1)}{2}$ je sudé $\operatorname{sign} = \underline{1}$

V opačném případě je $\operatorname{sign} = -1$

Determinant čtvercové matice

Každé čtvercové matici A přiřadíme jistým způsobem číslo $\det A$. Z tohoto čísla můžeme usuzovat na některé vlastnosti matice A, např. zda má inverzní matici. Platí totiž, že

$$A \text{ má inverzi} \iff \det A \neq 0$$

Definice Nechť A je čtvercová matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$. $A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Příklady

$n = 1 \qquad A = (a_{11}) \qquad \det A = a_{11}$

$n = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11} a_{22}$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12} a_{21}$$

$$= (+1)\, a_{11} a_{22} + (-1)\, a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$+ \qquad\qquad -$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

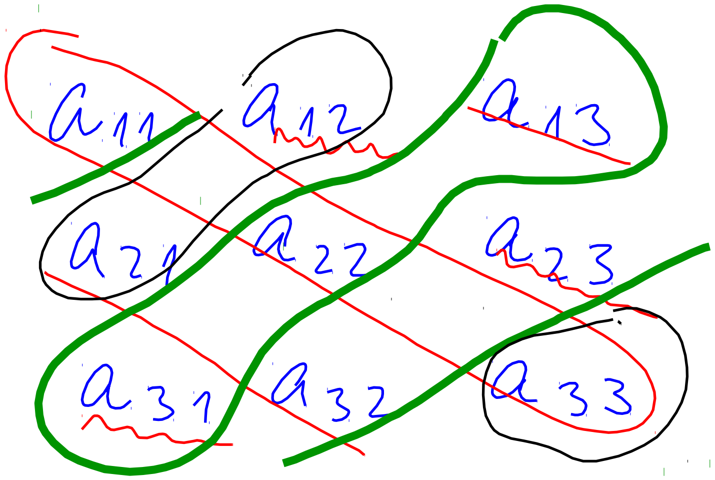
$n = 3 \qquad n! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$$\det A = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11} a_{22} a_{33} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13} a_{21} a_{32} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13} a_{22} a_{31} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12} a_{21} a_{33} = (+1)\, \underline{a_{11} a_{22} a_{33}} + (-1)\, \underline{a_{11} a_{23} a_{32}} +$$

$$(+1)\, \underline{a_{13} a_{21} a_{32}} + (-1)\, \underline{a_{13} a_{22} a_{31}} + (+1)\, \underline{a_{12} a_{23} a_{31}} + (-1)\, \underline{a_{12} a_{21} a_{33}}$$



+ hlavní diagonála
+ rovnoběžné diagonály

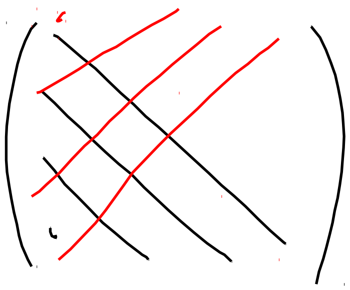
− vedlejší diagonála
+ rovnoběžné diagonály

Výpočet determinantu matice 3×3 podle těchto pravidel se nazývá Sarrusovo pravidlo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = ?$$

Pro matice $n \times n$ s $n \geq 4$ nic podobného neplatí

Matice 4×4 má 8 „uhlopříček", ale $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$



Výpočet determinantu u trojúhelníkových matic

Nechť A je horní trojúhelníková matice $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ pro $i > j$

$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

<u>Důkaz:</u> Součin $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ je součin z definice determinantu pro identickou permutaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$. sign této permutace je $+1$.

Ukážeme, že součiny pro všechny další permutace jsou nulový 0.

Pokud $\sigma(n) < n$, tak $a_{n\sigma(n)} = 0$. Tedy takové permutace dávají nulový součin.

Nechť $\sigma(n) = n$.

Pokud $\sigma(n-1) \neq n-1$, je $\sigma(n-1) < n-1$. Pak ale $a_{n-1\,\sigma(n-1)} = 0$ a součin příslušný dané permutaci je 0.

Nechť $\sigma(n) = n$, $\sigma(n-1) = n-1$.

Pokud $\sigma(n-2) \neq n-2$, pak $\sigma(n-2) < n-2$ a $a_{n-2\,\sigma(n-2)} = 0$. Příslušný součin je také roven 0.

A tak dále, až dostaneme

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots \sigma(n) = n$$

jako jediný potenciálně nenulový součin.

Totéž platí pro dolní trojúhelníkové matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ * & & a_{33} & \\ & & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ pro $i < j$

$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Pravidla pro výpočet determinantu nám říkají, jak se determinant mění při provádění elementárních řádkových a sloupcových operací.

Chceme-li spočítat determinant velké matice, lze ji převést na horní nebo dolní trojúhelníkovou.

Pravidla pro počítání determinantů

ERO

1. Nechť B vznikne z A výměnou i-tého a j-tého řádku. Pak
$$\det B = -\det A$$

2. Nechť matice A má dva stejné řádky, pak
$$\det A = 0.$$

ERO

3. Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem c. Pak $\det B = c \cdot \det A$.

(4) Nechť A a B se liší pouze v i-tém řádku. Nechť C je taková, že pro její řádky platí

$$r_j(C) = r_j(A) = r_j(B) \quad \text{pro } j \neq i$$

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

Pak

$$\det C = \det A + \det B$$

(5) Nechť C vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme

! ERO c-násobek j-tého řádku, kde $j \neq i$. Pak

$$\det C = \det A.$$

(6) $\det A^T = \det A$

(7) Pravidla (1) - (5) platí rovněž pro sloupce.

15

Příklad

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\text{aplikujeme } 5}{\overset{\text{K 1. řádku přičteme ostatní řádky}}{=}} \det\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{=} (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} \underset{5}{\overset{\substack{2.\check{r} - 1.\check{r} \\ 3.\check{r} - 1.\check{r} \\ \text{atd}}}{=}} (a+n-1)\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix}}_{\text{horní trojúhelníková matice}}$$

$$= (a+n-1)\ 1\cdot(a-1)(a-1)\cdots(a-1) = \underline{\underline{(a+n-1)(a-1)^{n-1}}}$$

<u>Důkaz naindel:</u> (1) Výměna 1. a 2. řádku. B vznikne z A výměnou 1. a 2. řádku

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\sigma \circ \pi = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}}$$

Taká permutace vznikla složením permutace $\pi \; \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & & n \end{matrix}$ s permutací σ

$\operatorname{sign} \pi = -1$.

$\operatorname{sign} \sigma \circ \pi = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sing} \pi$
$= -\operatorname{sign} \sigma$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\,\sigma\circ\pi(1)} \cdot a_{2\,\sigma\circ\pi(2)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\pi(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} -\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) \; a_{1\,\sigma\circ\pi(1)} \cdots\cdots a_{n\,\sigma\circ\pi(n)}$$

$$= - \sum_{\sigma\circ\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) \; a_{1\,\sigma\circ\pi(1)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\pi(n)}$$

$$= -\det A$$

2 Matice A se dvěma stejnými řádky má $\det A = 0$.

Nechť A má stejný i-tý a j-tý řádek. Pak matice B, která z A vznikne přehozením i-tého a j-tého řádku se rovná A. Podle předchozího

$$\det A = \det B = -\det A$$

$$2 \det A = 0$$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

3 je jednoduché. Udělejte si za dom. úlohu.

4. A, B $\quad r_j(A) = r_j(B)$ tranne $j = i$.

$C \ldots\ldots$ $r_j(C) = r_j(A) = r_j(B)$ per $j \neq i$

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; c_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; \underset{\substack{\shortparallel \\ b_{1\sigma(1)}}}{a_{1\sigma(1)}} \cdots \underset{\substack{\shortparallel \\ b_{i-1\,\sigma(i-1)}}}{a_{i-1\,\sigma(i-1)}} \left(a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}\right) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A + \det B$$

5 K 1. řádku přičteme c-násobek 2. řádku.
Aplikujeme předchozí pravidla na matice A a B, kde B je matice

$r_j(B) = r_j(A)$ pro $j = 2, 3, \dots n \cdot 1$.

$r_1(B) = c \cdot r_2(A)$

Potom na C, kde $r_j(C) = r_j(A)$ $j \neq 1$

$$r_1(C) = r_1(A) + r_1(B)$$

platí

$$\det C = \det A + \det B = \det A + c \det D$$

kde $r_1 D = r_2(A)$, matice D má ale stejný 1. a 2. řádek. Podle pravidla 2 je $\det D = 0$.
Proto

$$\det C = \det A + c \det D = \det A.$$