Vektorový prostor

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

V ... množina spolu s operacemi

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u + v$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$
$$(k, v) \longmapsto k \cdot v$$

Příklady: 1) množina M ... zobrazení $M \to \mathbb{K}$

$$\mathrm{Map}(M, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^M$$

sčítání a násobení skaláry: $f,g \in \mathbb{K}^M$, $k \in \mathbb{K}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

nulový vektor = nulové zobrazení

$$\vec{O}(x) = 0$$

Speciální případy:

- $M = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{K}^M \equiv \mathbb{K}^n$

$$f \rightsquigarrow (f(1), \dots, f(n))$$

$$(f: k \mapsto x_k) \leftsquigarrow (x_1, \dots, x_n)$$

- $M = \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{K}^M \equiv Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$

$$f \longmapsto (a_{ij} = f(i,j))$$

$$(f: (i,j) \mapsto a_{ij}) \longleftarrow (a_{ij})$$

② Spojitá zobrazení $I \to \mathbb{R}$

I … interval v $\mathbb{R}$

tvoří vekt. prostor $C(I)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

! $f+g$, kf opět spojité

tj. prvky $C(I)$

$+ : C(I) \times C(I) \to \underline{\underline{C(I)}}$

Všimněme si, že $C(I) \subseteq \mathbb{R}^I$,

ale ne libovolná podmnožina

Z axiomů vekt. prostoru lze odvodit další vlastnosti:

- $0 \cdot \vec{u} \overset{?}{=} \vec{0}$

$0 \cdot \vec{u} = (0+0) \cdot \vec{u}$

$= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}$

$0 \cdot \vec{u} + \vec{0} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}$

$\Downarrow$

$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$

- $k \cdot \vec{0} \overset{?}{=} \vec{0}$

$k \cdot \vec{0} = k \cdot (\vec{0} + \vec{0})$

$= k \cdot \vec{0} + k \cdot \vec{0}$

$k \cdot \vec{0} + \vec{0} = k \cdot \vec{0} + k \cdot \vec{0}$

$\Downarrow$

$\vec{0} = k \cdot \vec{0}$

$u + v = v + u$

$u + (v + w) = (u + v) + w$

$\exists \vec{0}: \ \vec{0} + u = u = u + \vec{0}$

$\forall u \ \exists -u: \ u + (-u) = \vec{0} = (-u) + u$

$a(bu) = (ab)u$

$1u = u$

$(a+b)u = au + bu$

$a(u+v) = au + av$

$u + v = u + w \overset{?}{\Rightarrow} v = w$

$\downarrow (-u)+$

$\underbrace{(-u) + u}_{\vec{0}} + v = \underbrace{(-u) + u}_{\vec{0}} + w$

$\vec{0} + v = \vec{0} + w$

$v = w$

Pokud $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$, potom $k = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{0}$:

Opačnou implikaci jsme právě dokázali

<u>Pokud by $k \neq 0$</u>, pak existuje $k^{-1} = \frac{1}{k}$

$$k \cdot \vec{u} = \vec{0} \qquad / \, k^{-1} \cdot$$

$$k^{-1}(k \vec{u}) = k^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$(k^{-1} \cdot k) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

- $(-1)\cdot\vec{u} \overset{?}{=} -\vec{u}$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{u} = (1+(-1))\cdot\vec{u} = 1\cdot\vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} = \vec{u} + (-1)\cdot\vec{u}$$

$$\vec{0} = \vec{u} + (-\vec{u})$$

$$\Longrightarrow \quad (-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}.$$

(odečtením $\vec{u}$

Vektorové podprostory

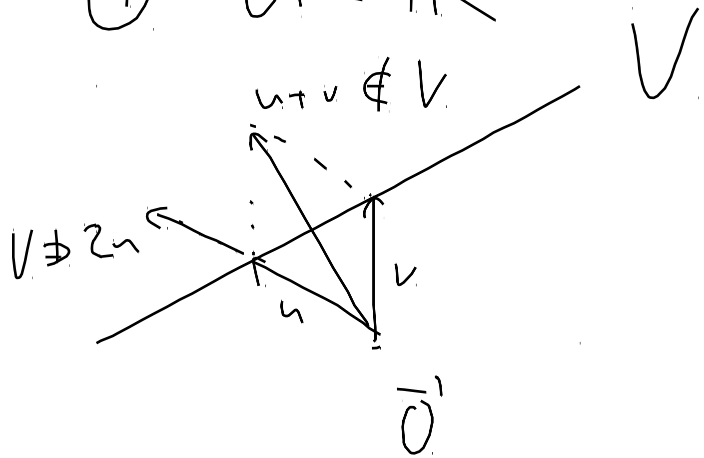
Př. $C(I) \subseteq \mathbb{R}^I$

Podmnožina $V \subseteq U$ vektorového prostoru U nad $\mathbb{K}$ se nazývá vektorový podprostor, jestliže

- $\vec{0} \in V$
- $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$
- $v \in V,\ k \in \mathbb{K} \Rightarrow k\cdot v \in V$

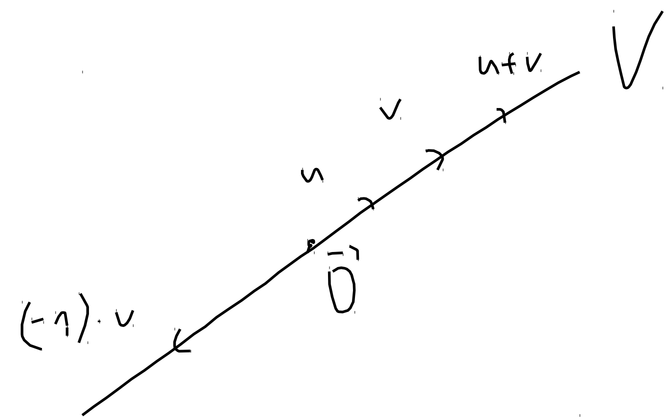
Příklad

① $U = \mathbb{R}^2$



Není

② $U = \mathbb{R}^2$



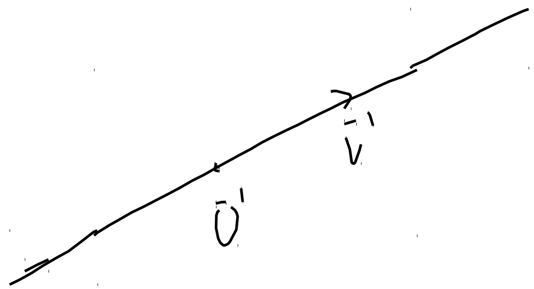
Je

Obecně: $\{\vec{0}\}$ je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ ——— || ——— $\mathbb{R}^2$

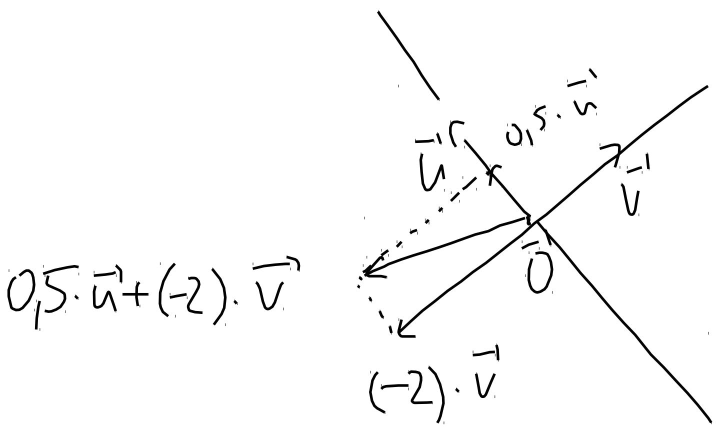
$V \subseteq \mathbb{R}^2$ vekt. podpr.

$\vec{0} \neq \vec{v} \in V$ ... potom V musí obsahovat také všechny násobky $k \cdot \vec{v}$, tj. celou přímku obsahující $\vec{v}$.



Pokud V obsahuje i nějaký vektor mimo tuto přímku

pak $V = \mathbb{R}^2$



Vekt. podpr. $\mathbb{R}^2$ jsou právě $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ a všechny přímky procházející počátkem.

V $\mathbb{R}^3$: $\{0\}$, přímky proch. počátkem, roviny proch. počátkem, $\mathbb{R}^3$

Příklad $A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$. Potom

$V = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0 \} \subseteq \mathbb{K}^n$ je vektorový podprostor

Platí: · $\vec{0} \in V$, protože $A \cdot \vec{0} = \vec{0}$

· $x, x' \in V$, tj. $Ax = \vec{0}$, $Ax' = \vec{0}$, potom

$A(x+x') = Ax + Ax' = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

· $x \in V$

$\Rightarrow A(kx) = k \cdot Ax = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Lineární kombinace

$u_1, \dots, u_n \in U$ vektory, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$

Výraz $k_1 \cdot u_1 + \dots + k_n \cdot u_n$ nazveme <u>lineární kombinací</u> vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Lemma. $V \subseteq U$ vekt. podpr.

$v_1, \dots, v_n \in V \implies$ každá lin. komb. leží opět ve V

Dk. Indukcí vzhledem k n

$n=1$: $\quad a_1 \cdot v_1 \in V \quad$ podle definice

$n>1$: $\quad a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = \underbrace{\underbrace{(a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1})}_{\in V \text{ podle ind. předp.}} + \underbrace{a_n v_n}_{\in V \text{ podle def}}}_{\in V \text{ podle def.}}$ $\square$

Lineární obal vektorů

$u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ vektory

Lineární obal $[u_1, \dots, u_n]$ těchto vektorů je

$$[u_1, \dots, u_n] = \{ a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \in U \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k} \}$$

Speciální případ

$$[\emptyset] = \{\vec{o}\}$$

Věta. Lin. obal vektorů je vektorový podprostor.

Dk. $v, w \in [u_1, \dots, u_n]$

$$\left.\begin{aligned} v &= a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \\ w &= b_1 u_1 + \dots + b_n u_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow v + w = (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + (b_1 u_1 + \dots + b_n u_n)$$

$$= a_1 u_1 + b_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b_n u_n$$

$$= (a_1 + b_1) u_1 + \dots + (a_n + b_n) u_n.$$

Podobně pro násobek $k \cdot v$

$$k \cdot v = (k a_1) u_1 + \dots + (k a_n) u_n.$$

$\blacksquare$

Důsledek. $[u_1, \dots, u_n]$ je nejmenší vektorový podprostor obsahující $u_1, \dots, u_n$.

Dk. $[u_1,\dots,u_n]$ je vekt. podpr. obsahující $u_1,\dots,u_n$.

Je-li V jiný takový, pak $u_1,\dots,u_n \in V \Longrightarrow \underbrace{a_1u_1+\dots+a_nu_n \in V \quad \forall a_1,\dots,a_n}$

$[u_1,\dots,u_n] \subseteq V$

proto nejmenší $\square$

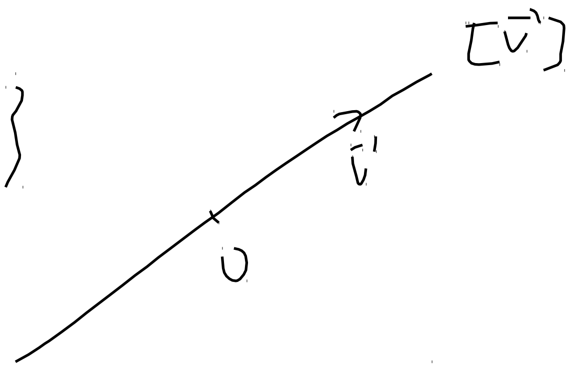
Pr. V rovině $\mathbb{R}^2$

$n=0$: $[\emptyset] = \{\vec{o}\}$

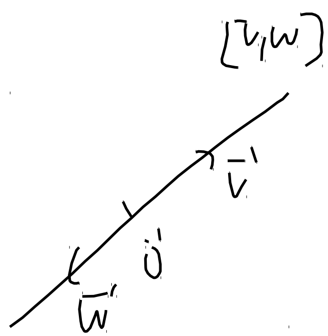
$([\,] = \{\vec{o}\}?)$

$n=1$: $[\vec{o}] = \{a\cdot\vec{o}\} = \{\vec{o}\}$

$n=1$: $v \neq \vec{o}$ $\quad [\vec{v}] = \{a\cdot\vec{v}\}$



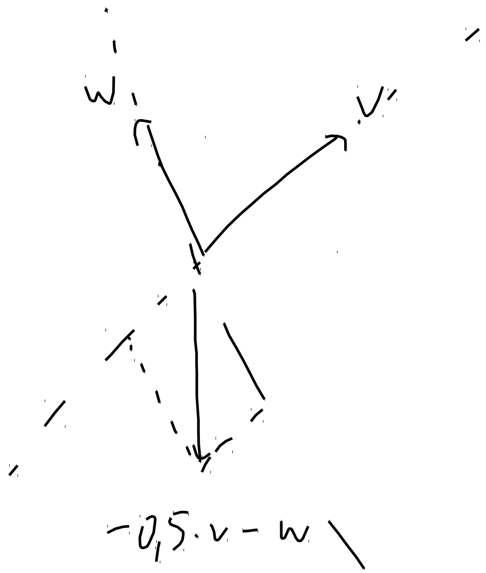
$n=2$: $w = a\cdot v$



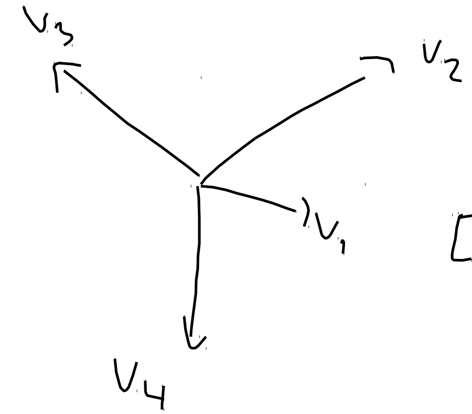
$[v,w] = \{cv+dw\} = \{cv+dav\}$

$= \{(c+da)v\} = \{kv\} = [v]$

w není násobkem v



$[v, w] = \mathbb{R}^2$



$[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^2$

Př. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$?

$\exists ?\ x_1, x_2$ t.ž. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 + 2x_2 \\ x_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

soustava 4 rovnic:

$$1 = x_1 \longrightarrow x_1 = 1$$

$$2 = 2x_1 + 2x_2 \longleftarrow 2 \neq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3$$

$$3 = x_2 \longrightarrow x_2 = 3$$

$$4 = x_1 + x_2$$

nemá řešení, tj. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ nelze napsat jako lin. komb. $(*)$

a tedy neleží v lin. obalu $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$.