Připomenutí:

lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_k$

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$$

lineární obal vektorů $u_1, \dots, u_k$

$$[u_1, \dots, u_k] = \{ a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K} \}$$

— je to nejmenší v. podpr. obsahující $u_1, \dots, u_k$

<u>Lineární nezávislost</u>

Vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou <u>lineárně závislé</u>, jestliže nějaká jejich lin. komb.

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$$ pro nějakou k-tici skalárů $(a_1, \dots, a_k)$ různou od $(0, \dots, 0)$

$\neq$

Lineárně nezávislé: jediná lin. komb.

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$$

je ta s $(a_1, \dots, a_k) = (0, \dots, 0)$.

Př. • jediný vektor $\vec{0}$ ... lin. záv.

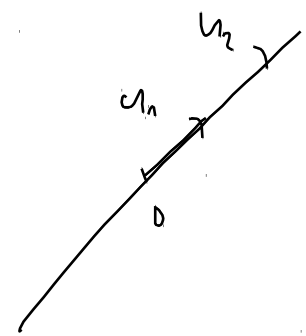
protože $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ $\qquad a_1 = 1$

• jediný vektor $u \neq \vec{0}$ ... lin. nezáv.

protože $a \cdot u = \vec{0} \Longrightarrow a = 0 \ \underbrace{\text{nebo } u = \vec{0}}_{\text{nenastává}}$

• $u_2 = 2u_1$ jsou lin. záv., protože

$$2u_1 - u_2 = 0$$



- $u_3 = 2u_1 + u_2$

  $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_3 jsou lin. záv.

  $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$

$u_2 = -2u_1 + u_3$
$u_1 = -\frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3$

- $u_k = a_1 u_1 + \dots + a_{k-1} u_{k-1}$

  $\Rightarrow$ $u_1, \dots, u_k$ jsou lin. záv.

  $a_1 u_1 + \dots + a_{k-1} u_{k-1} - u_k = 0$

Lemma. Vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou lin. závislé, právě když nějaký z nich je lin. komb. ostatních.

Dk. $\Leftarrow$ jsme právě provedli

$\Rightarrow$ Nechť $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$ a $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$ a nechť např. $a_k \neq 0$.

Potom vydělením a_k dostaneme

= vynásobením $\frac{1}{a_k}$

$$a_k u_k = -a_1 u_1 - \dots - a_{k-1} u_{k-1}$$

$$u_k = -\frac{a_1}{a_k} u_1 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} u_{k-1}$$

a u_k je lin. komb. $u_1, \dots, u_{k-1}$ s koef. $-\frac{a_1}{a_k}, \dots, -\frac{a_{k-1}}{a_k}$. $\square$

Př. Jsou vektory $u_1 = (1,2,1,0)^T$, $u_2 = (1,1,-1,2)^T$, $u_3 = (1,0,1,1)^T$ v $\mathbb{R}^4$ lin. nez.? Zkoumejme, které lin. komb.

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$ jsou nulové

! u_1, u_2, u_3 lin. nez. $\iff$ jediné řešení je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

porovnáním jednotlivých složek:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

[matice obsahující dané vektory ve sloupcích

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$-x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 = 0$

$\leadsto$ Jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

tj. jediná lin. komb. $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$

je ta s $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

$\leadsto$ u_1, u_2, u_3 jsou lin. nez.

Řekneme, že $u_1, \dots, u_n \in U$ <u>generují</u> v.p. U, jestliže

$U = [u_1, \dots, u_n]$, tj. jestliže každý vektor $u \in U$

je lin. komb. $u_1, \dots, u_k$

$\exists x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}: \quad u = x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$

Řekneme, že U <u>má konečnou dimenzi</u>, jestliže ex. konečná množ. vektorů $u_1, \dots, u_n \in U$, která generuje U.

<u>Př.</u> $\mathbb{R}^n$ má konečnou dimenzi: $\mathbb{R}^n = [e_1, \dots, e_n]$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Máme napsat lib. vektor z $\mathbb{R}^n$ jako lin. komb. $e_1, \dots, e_n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

$\mathbb{R}_n[x]$ ... polynomy stupně $\leq n$ s koef. z $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_n[x] = [1, x, x^2, \dots, x^n] \implies \mathbb{R}_n[x]$ má konečnou dim.

protože $p(x) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \dots + p_n x^n$

je lin. komb. $1, x, x^2, \dots, x^n$

$\mathbb{R}[x]$ nemá kon. dim.

$C[0,1]$ nemá kon. dim.

Báze vekt. pr. U je n-tice $(u_1, \ldots, u_n)$, kde $u_i \in U$,

t.ž.
- $u_1, \ldots, u_n$ generují U
- $u_1, \ldots, u_n$ jsou lin. nez.

Př. (e_1, e_2, e_3) je báze $\mathbb{R}^3$

– e_1, e_2, e_3 generují $\mathbb{R}^3$ ✓ $\mathbb{R}^3 = [e_1, e_2, e_3]$

– lin. nez.: $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .... jsou lin. nez.

Není to jediná báze $\mathbb{R}^3$, např. (u_1, u_2, u_3) je báze

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zobecnění

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$

Př. $\mathbb{R}_3[x]$ má bázi $(1, x, x^2, x^3)$

podobně
- generování ✓
- lin. nez. $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = 0 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} a_0, a_1, a_2, a_3 = 0$.

Chceme:
- Každý konečně dimenzionální vekt. prostor má bázi
- Každé 2 báze mají stejný počet vektorů ↪ dimenze

Věta – o výběru lin. nez. vektorů

$v_1, \dots, v_k \in U$ lin. nez.

$u_1, \dots, u_\ell \in U$ libovolné vektory

Potom lze z $u_1, \dots, u_\ell$ vybrat $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

1) $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nez.

2) $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell]$

Důsledek. Každý systém lin. nez. vektorů v konečně dim. prostoru lze doplnit do báze.

Speciálně: Každý konečně dim. prostor má bázi

Důkaz důsledku

Nechť $v_1, .., v_k$ jsou lin. nez., chceme je doplnit do báze. Protože U je konečně dim., ex. $u_1, .., u_\ell$ t. ž. $[u_1, .., u_\ell] = U$ (generují U).

Podle věty lze z $u_1, .., u_\ell$ vybrat $u_{i_1}, .., u_{i_r}$ t. ž.

- $v_1, .., v_k, u_{i_1}, .., u_{i_r}$ jsou lin. nez.
- $[v_1, .., v_k, u_{i_1}, .., u_{i_r}] = [v_1, .., v_k, u_1, .., u_\ell] = U$

  (protože $U = [u_1, .., u_\ell] \subseteq [v_1, .., v_k, u_1, .., u_\ell] \subseteq U$
  $\Rightarrow$ rovnost.)

Jinými slovy, $v_1, .., v_k, u_{i_1}, .., u_{i_r}$ tvoří bázi.

Důkaz věty. Indukcí podle ℓ ... počet vektorů $u_1, \dots, u_\ell$.

- $\ell = 0$ triviální
- $\ell \geq 1$ indukční krok

$$\underbrace{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{\ell-1}}, u_\ell$$

použijeme indukční předpoklad; dostaneme $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ t. ž.

- $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nez.
- $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{\ell-1}]$

používáme IP pro $\ell - 1$

Jsou 2 možnosti:

1) u_l je lin. kombinací $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$

→ nezařadíme ho do vybraných vektorů

- $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nez. ✓
- $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-1}] \ni u_l$

$= [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-1}, u_l]$

2) u_l není lin. komb. $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$

→ zařadíme ho do vybraných vektorů

- $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, u_l$ jsou lin nez. ?
- $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, u_l] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-1}, u_l]$ ✓

Předp., že $v_1, \ldots, v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}, u_\ell$ jsou lin. záv.

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + b_1 u_{i_1} + \cdots + b_r u_{i_r} + c \cdot u_\ell = 0 \quad (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c) \neq (0, \ldots, 0)$$

Kdyby $c \neq 0$, šlo by u_ℓ napsat jako lin. komb. zbylých — nejde

Takže $c = 0$, ale pak $v_1, \ldots, v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}$ jsou lin. záv., spor. $\square$