souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je taková n-tice čísel $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, že platí

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \qquad (x_1, \dots, x_n)^T = (u)_\alpha$$

Reinterpretace:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & U \\ (x_1, \dots, x_n)^T & \longmapsto & x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \end{array}$$

α báze $\Leftrightarrow$ toto zobrazení je bijekce

inverzní zobrazení

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longleftarrow & U \\ (u)_\alpha & \longmapsfrom & u \end{array}$$

jediná n-tice $(x_1, \dots, x_n)^T \longmapsfrom u$

t.ž. $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

tj. $(x_1, \dots, x_n)^T = (u)_\alpha$

Platí $(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$, $(cu)_\alpha = c(u)_\alpha$

$\hookrightarrow$ $(u)_\alpha = (x_1, \dots, x_n)^T \iff u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$(v)_\alpha = (y_1, \dots, y_n)^T \iff v = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$

$\Downarrow$

$$(u+v)_\alpha = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)^T \iff u+v = (x_1+y_1)u_1 + \dots + (x_n+y_n)u_n$$

$$= (x_1, \dots, x_n)^T + (y_1, \dots, y_n)^T$$

$$= (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$\hookrightarrow$ stejně pro $c \cdot u$

Průnik a součet vekt. podprostorů

$V, W \subseteq U$ vekt. podpr.

Pak $V \cap W$ je vekt. podpr.

- $O \in V \cap W$, protože $O \in V$, $O \in W$
- $u_1, u_2 \in V \cap W \overset{?}{\Longrightarrow} u_1 + u_2 \in V \cap W$

$u_1, u_2 \in V \Rightarrow$ $u_1 + u_2 \in V$, protože V je vekt. podpr.

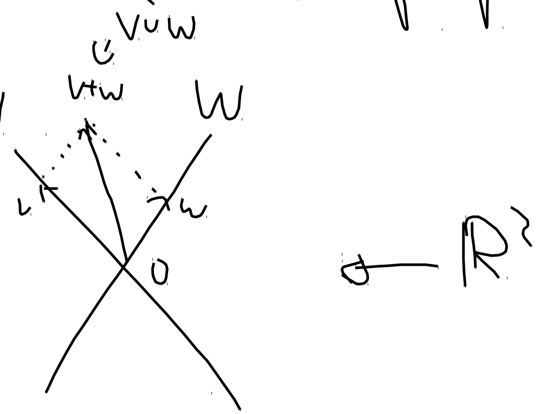
$u_1, u_2 \in W \Rightarrow$ $u_1 + u_2 \in W$ stejně

$\Longrightarrow u_1 + u_2 \in V \cap W$

- podobně pro násobek $c \cdot u$

Sjednocení vekt. podpr. obecně není vekt. podpr.

Pr.



$V + W = \mathbb{R}^2$

$V, W \leq U$ vekt. podpr.

Definujeme jejich <u>součet</u> $V+W$:

$$V+W = \{ v+w \in U \mid v \in V,\ w \in W \}$$

$$\left(= \{ u \in U \mid \exists v \in V\ \exists w \in W : u = v+w \} \right)$$

Ukážeme nyní, že $V+W$ je vekt. podpr.

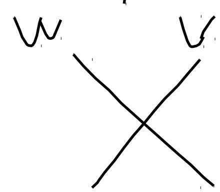
- $0 = 0 + 0 \in V+W$
- $u_1, u_2 \in V+W$, tj. $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$, kde $v_i \in V$, $w_i \in W$

  potom $u_1 + u_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$
- podobně pro $c \cdot u$

Platí $V \subseteq V+W$, $W \subseteq V+W$

$v \in V \Rightarrow v = v + 0 \in V+W$

Lze dokázat (snadno), že $V+W$ je nejmenší vekt. podpr. obsahující V, W (tím pádem $V \cup W$)



$\subseteq \mathbb{R}^2$

Př. $U = \mathbb{R}^2$

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

2	1	1	0
1	1	1	1

$V = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$W = \{(y,-y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Ukážeme, že $V+W = \mathbb{R}^2$, tj. že každý vektor z $\mathbb{R}^2$ je součtem

$$(x,y) = \underbrace{(a,a)}_{\in V} + \underbrace{(b,-b)}_{\in W} \quad \text{pro vhodná } a,b$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= a+b \\ y &= a-b \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{x-y}{2}$$

$V \cap W = \{0\}$ $\qquad$ $\big((a,a) = (b,-b) \Leftarrow a=b,\ a=-b \rightsquigarrow a=b=0 \big)$

Př. $U = \mathbb{R}^4$

$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

$W = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_2, y_4 \in \mathbb{R} \}$

Ukážeme, že $V + W = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(V+W) = 4$

$\subseteq$ vždy

$\supseteq$ chceme ukázat že každý vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) lze napsat jako součet $v \in V$, $w \in W$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0, 0, 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{\in W}$$

$$= (x_1, -x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4) + (0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0)$$

$$V \cap W = \{ w \in W \mid w \in V \} = \{ \underbrace{(0, y_2, 0, y_4)}_{\text{obecný vektor z } W} \in \mathbb{R}^4 \mid 0 + y_2 + 0 + y_4 = 0 \}$$

$$= \{ (0, y_2, 0, -y_2) \in \mathbb{R}^4 \} = \{ y_2 \cdot (0,1,0,-1) \} = [(0,1,0,-1)]$$

$((0,1,0,-1))$ je báze $V \cap W$
- generuje
- je lin. nez.

$$\Longrightarrow \dim V \cap W = 1$$

$$V = [(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)] \Rightarrow \dim V = 3$$

$$W = [(0,1,0,0),(0,0,0,1)] \Rightarrow \dim W = 2$$

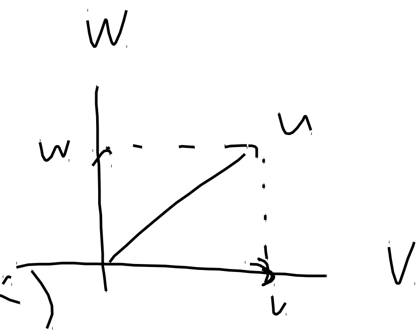
Platí $\underset{4}{\dim(V+W)} = \underset{3}{\dim V} + \underset{2}{\dim W} - \underset{1}{\dim(V \cap W)}$

Součet $V+W$ se nazývá <u>direktní</u>, a označuje se $V \oplus W$, jestliže $V \cap W = \{0\}$.

<u>Lemma.</u> Součet $V+W$ je direktní, právě když

$$\forall u \in V+W \quad \exists!\ v \in V,\ w \in W \ \text{ t.ž. } \ u = v + w$$

ex. jediná



<u>Důkaz.</u> $\Rightarrow$ nechť $V \cap W = \{0\}$ (tj. součet je direktní) a předpokládejme sporem, že nějaký vektor <u>u</u> má dvě různá vyjádření

$$v_1 + w_1 = u = v_2 + w_2 \qquad v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_1 - v_2}_{\cap\, V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\cap\, W} \in V \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 = w_2 - w_1, \text{ tj. } v_1 = v_2,\ w_1 = w_2, \text{ spor.}$$

$\Leftarrow$ chceme $V \cap W = \{0\}$, tj.

nechť $u \in V \cap W$ a chceme $u = 0$

$$\underset{\substack{\cap\\ V}}{u} + \underset{\substack{\cap\\ W}}{0} = u = \underset{\substack{\cap\\ V}}{0} + \underset{\substack{\cap\\ W}}{u}$$

Z jednoznačnosti vyjádření plyne $u = 0$, $0 = u$. $\square$

<u>Věta</u>. U kon. dim., $V, W \leq U$ vekt. podpr. Pak platí

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

<u>Pozn</u>. analogie $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

<u>Důkaz</u>. Máme podprostory

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, phantom, "\subseteq" {sloped}] & \\ V \cap W \arrow[ur, phantom, "\subseteq" {sloped}] \arrow[dr, phantom, "\subseteq" {sloped}] & & V+W \\ & W \arrow[ur, phantom, "\subseteq" {sloped}] & \end{tikzcd}$$

Nechť $(u_1, \ldots, u_k)$ je báze $V \cap W$

Protože tvoří lin. nez. podmn. V, lze ji doplnit do báze $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_\ell)$ podpr. V

Podobně ji lze doplnit do báze $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ podpr. W

Ukážeme, že pak $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_m)$ je báze $V+W$.

Z toho pak bude plynout tvrzení věty:

$$\dim (V \cap W) = k$$
$$\dim V = k + \ell$$
$$\dim W = k + m$$
$$\dim (V+W) = k + \ell + m$$

- $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_m)$ generuje $V+W$:

  každý prvek $V+W$ lze psát jako $v + w$

vektor $v \in V$ vyjádříme v bázi jako

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell$$

podobně

$$w = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m$$

$$\Longrightarrow \quad v + w = (a_1 + c_1) u_1 + \dots + (a_k + c_k) u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m .$$

- $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_m)$ jsou lin. nez.:

nechť

$$\underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell}_{v \in V} + \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_m w_m}_{w \in W} = 0$$

tedy $v + w = 0 \iff \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} = -\underset{\substack{\cap \\ V}}{v} \in V \cap W \Rightarrow w$ je lin. kombi $u_1, \dots, u_k$

řekněme

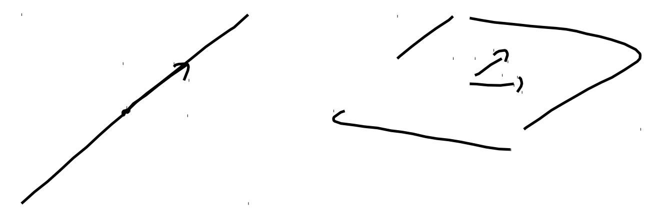
$$\left.\begin{aligned} w &= d_1 u_1 + \dots + d_k u_k \\ &\parallel \\ & c_1 w_1 + \dots + c_m w_m \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & d_1 u_1 + \dots + d_k u_k - c_1 w_1 - \dots - c_m w_m = 0 \\ & \text{Protože je } (u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m) \text{ lin. nez.:} \end{aligned}$$

platí $c_1,\dots,c_m = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow v = -w = 0$
$d_1,\dots,d_k = 0$

Tedy $v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell = 0$
a z lin. nez. $(u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_\ell)$ pak plyne $a_1,\dots,a_k, b_1,\dots,b_\ell = 0$.
Dohromady $a_i, b_i, c_i = 0 \Rightarrow u_i, v_i, w_i$ jsou lin. nez. $\square$

Jak počítat součet podprostorů:

$V = [v_1,\dots,v_k]$, $W = [w_1,\dots,w_\ell]$



Součet $V+W$ pak je

$$V+W = \{v+w \mid v \in V, w \in W\}$$
$$= \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_\ell w_\ell\} = [v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_\ell]$$

Jak počítat průnik podprostorů?

$V = [v_1, v_2, v_3]$, $W = [w_1, w_2, w_3]$

$V \cap W = \{ u \in U \mid u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \}$

Ptáme se na řešení $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ soustavy rovnic

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = 0$$

$\rightsquigarrow$ homogenní soustava rovnic

- vyřešíme parametricky

např. $b_3 = p$ $\qquad$ a_3, a_2, a_1 nepodst.

$b_2 = q$

$b_1 = 3p - 2q$

?
pro $\underline{b_3 = p}$, $\underline{b_2 = q}$, $\underline{b_1 = 3p - 2q}$, p, q lib.,
ex. a_1, a_2, a_3 t.ž.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

Jinými slovy $b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$ pak leží v $V \cap W$

$$\rightsquigarrow \quad V \cap W = \{ (3p - 2q) w_1 + q \cdot w_2 + p \cdot w_3 \}$$

$$= \{ p \cdot (3 w_1 + w_3) + q(-2 w_1 + w_2) \}$$

$$= [3 w_1 + w_3 , -2 w_1 + w_2]$$