# Lineární zobrazení

Definice: Nechť $U$ a $V$ jsou vekt. prostory nad $\mathbb{K} = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lineární, jestliže

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall u \in U \qquad \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u)$

Ekvivalentně lze (1) a (2) psát jedinou podmínkou

(*) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(a u_1 + b u_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$

Příklady: (1) Střední škola

„lineární funkce"   $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $\mathbb{R}$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b$$

Toto zobrazení je lineární podle naší definice, právě když $b = 0$.

$$f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b$$

$$f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = ax + ay + 2b$$

Rovnost nastane právě když $b = 2b$, tj. $b = 0$.

Funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$   $f(x) = ax$ je lineární

$$f(kx) = a(kx) = k(ax) = k\,f(x)$$

**Příklad 2** NEJDŮLEŽITĚJŠÍ

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \qquad \varphi(x) = Ax$, kde

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad A$ je matice ~~matice~~ $k \times n$

$\varphi(x) = Ax \in \mathbb{R}^k$

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = A\cdot x + Ay = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(a\cdot x) = A(ax) = a(Ax) = a\varphi(x).$$

$a \in \mathbb{R}$

**Příklad 3** $U = \mathbb{C}^n$, $V = \mathbb{C}^k$, $K = \mathbb{C} \qquad \varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$

$\varphi(x) = Ax$, $A$ je matice ~~matice~~ nad $\mathbb{C}$.

$k \times n$

<u>Příklad 4</u> Souřadnice. $V$ je vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ nad $\mathbb{K}$. Zobrazení

$$( \;\; )_\alpha : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$u \longmapsto (u)_\alpha \; \text{.. souřadnice vektoru } u \text{ v bázi } \alpha$$

Toto zobrazení je lineární.

Vlastnosti

$$(u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$(a u)_\alpha = a(u)_\alpha$$

jsme si ukazovali.

## Příklad 5

$$U = \{ f : M \to \mathbb{K} \}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{K} \qquad \varphi(f) = f(m_0) \quad \text{pro pevné } m_0 \in M$$

$$\varphi(f+g) = (f+g)(m_0) = f(m_0) + g(m_0) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)(m_0) = a \cdot f(m_0) = a\,\varphi(f)$$

## Příklad 6 Derivace

$$U = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ má v každém bodě derivaci} \}$$

$$V = \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \} \qquad \varphi : U \to V$$

$$\varphi(f) = f'$$

$$\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)' = af' = a\,\varphi(f)$$

**Příklad 7** $\quad U = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{spojitá} \}$

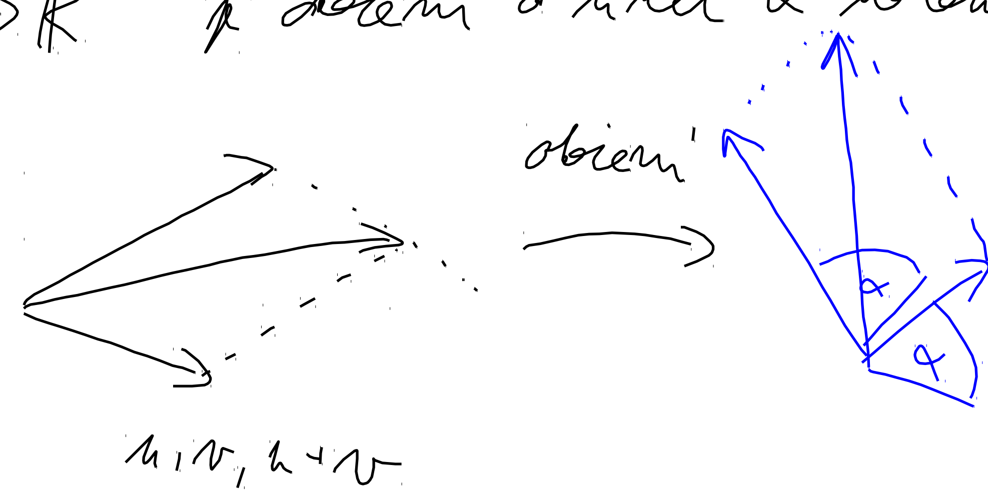
$$\varphi : U \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx =$$

$$= \varphi(f) + \varphi(g)$$

**Příklady 8** $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je otočení o úhel $\alpha$ kolem počátku

Je to lin. zobrazení




Osová symetrie podle přímky procházející počátkem

**Věta:** Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, kde $U$ je vekt. prostor konečné dimense, je jednoznačně určeno svými hodnotami na prvcích nějaké báze.

**Důkaz:** Nechť $u_1, u_2, \dots, u_n$ je báze prostoru $U$. Nechť $u \in U$ je libovolný vektor. Pak

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Platí

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \varphi(u_i).$$

Tedy hodnota zobrazení $\varphi$ na vektoru $u$ je určena hodnotami $\varphi$ na prvcích $u_i$ báze a souřadnicemi $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektoru $u$.

<u>Příklad</u> Na základě předchozí věty lze najít všechna lin. zobrazení z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^k$. Ukážeme na příkladu zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Všechna lin. zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}$ jsou tvaru

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 .$$

<u>Dk</u>: Báze $\mathbb{R}^3$ je $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + x_3 \varphi(e_3)$$

Nechť $\varphi(e_1) = a_1$, $\varphi(e_2) = a_2$, $\varphi(e_3) = a_3$. Pak

$$\varphi(x) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Obecně platí: Každé lineární zobrazení z $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$ je tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde $A$ je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$.

Složení lin. zobrazení je lin. zobrazení

$\varphi : U \longrightarrow V$, $\psi : V \longrightarrow W$ lin. pak $\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$ je lineární.

$$(\psi\circ\varphi)(u+v) = \psi(\varphi(u)+\varphi(v)) = \psi(\varphi(u)) + \psi(\varphi(v)) = \psi\circ\varphi(u) + \psi\circ\varphi(v)$$

Identické zobrazení $id : U \longrightarrow U$ $id(u) = u$ je lineární.

# Vzor a obraz podprostoru

Nechť $\varphi: U \to V$ lineární

$\overline{U} \subseteq U$ je podprostor

$\overline{V} \subseteq V$ je podprostor

Pak množina $\varphi(\overline{U}) = \{\varphi(u) \in V,\ u \in \overline{U}\}$

je vektorový prostor ve $V$ — obraz podprostoru je podprostor

množina $\varphi^{-1}(\overline{V}) = \{u \in U,\ \varphi(u) \in \overline{V}\}$

je vekt. podprostor v $U$. Vzor podprostoru je podprostor

## Dva důležité případy

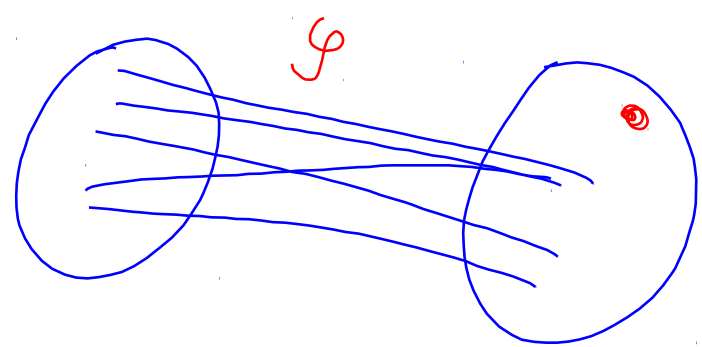
$\overline{U} = U$ Pak prostor $\varphi(U) \subseteq V$ nazýváme obraz lin. zobrazení

a označujeme $\quad \operatorname{Im} \varphi = \{ v \in V, \ \exists u \in U, \ \varphi(u) = v \}$

$\overline{V} = \{\vec{o}\}$ Pak podprostor $\varphi^{-1}(0) \subseteq U$ se nazývá jádro lineárního zobrazení $\varphi$

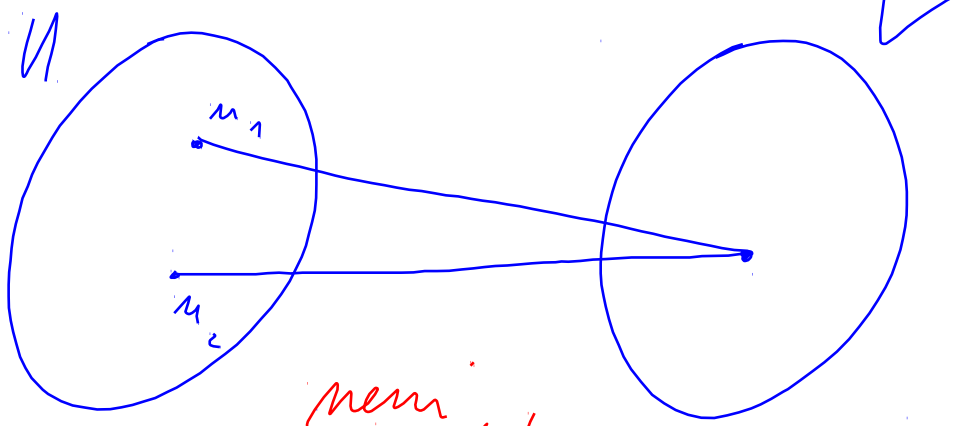
$$\ker \varphi = \{ u \in U, \ \varphi(u) = 0 \}$$

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je na (surjektivní), právě když $\operatorname{Im} \varphi = V$.



$\varphi : U \to V$ je injektivní (prosté), jestliže

$\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$




není prosté

Věta: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, právě když
$$\ker \varphi = \{\vec{0}\}$$

Důkaz: Nechť je $\varphi$ prosté. Nechť $u \in \ker \varphi$.
$\varphi(u) = \vec{0}$, navíc $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ $\quad \left( \varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) = \vec{0} \right)$

$\varphi$ je injektivní $\quad \varphi(u) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0} \implies u = \vec{0}$

Obrácené $\Longleftarrow$. Nechť $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$. Nechť

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2).$$

Potom $\vec{0} = \varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \varphi(u_1 - u_2)$

Tedy $\quad u_1 - u_2 \in \ker\varphi = \{\vec{0}\}$

proto $\quad u_1 - u_2 = \vec{0}$

$$u_1 = u_2.$$

$\varphi$ je tedy prosté.

Bijektivní zobrazení $\varphi: U \to V$ je injektivní a surjektivní (prosté a na) současně.

Každé bijektivní má inverzní zobrazení.

Inverzní zobrazení k bijektivnímu lineárnímu zobrazení je rovněž lineární.

<u>Příklad</u>: Jestliže $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax$ kde $A$ je matice $n \times n$, je bijektivní, pak $A$ má inverzní matici a inverzní zobrazení $\varphi^{(-1)}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je dáno předpisem

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1} y.$$

**Věta:** Jestliže $\varphi : U \to V$ je lineární a $\dim U < \infty$, pak platí

$$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi .$$

**Důkaz:** Platí $\ker \varphi \subseteq U$, $\operatorname{Im} \varphi \subseteq V$.
Je-li $\dim U < \infty$, pak $\dim \ker \varphi < \infty$. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $\ker \varphi$. Doplníme tuto bázi na bázi celého prostoru $U$. Tato báze bude

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$$

$\dim \ker \varphi = k$
$\dim U = n$

Chceme nyní najít bázi $\operatorname{Im} \varphi$ a ukázat, že má $n-k$ prvků.
Tuto bázi tvoří vektory: $\varphi(u_{k+1}), \varphi(u_{k+2}), \dots, \varphi(u_n)$.
Dokážeme, že jde skutečně o bázi!
(1) Tyto vektory generují $\operatorname{Im} \varphi$.

Nechť $u \in U$ a $\varphi(u) \in \operatorname{Im} \varphi$. Platí

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n$$

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{1}^{n} a_i u_i\right) = a_1 \underset{\overset{\|}{0}}{\varphi(u_1)} + \dots + a_k \underset{\overset{\|}{0}}{\varphi(u_k)} + a_{k+1} \varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n \varphi(u_n)$$

$$= a_{k+1} \underline{\varphi(u_{k+1})} + \dots + a_n \underline{\varphi(u_n)}$$

(2) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \varphi(u_i) = \vec{0}$$

$$\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i\right) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i \in \operatorname{Ker} \varphi = [u_1, u_2, \dots u_k]$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \sum_{j=1}^{k} b_j u_j$$

$$-b_1 u_1 - b_2 u_2 - \dots - b_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n = \vec{O}$$

$u_1, \dots, u_n$ jsou LIN. NEZÁVISLÉ $\Rightarrow$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = \underline{a_{k+1} = \dots = a_n = 0}.$$

Tedy $\varphi(u_{k+1}), \varphi(u_{k+2}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

# MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

<u>Opakování:</u> $U$ vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.
$u \in U$ vektor. Souřadnice vektoru $u$ v bázi $\alpha$
je sloupec $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ takový, že $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$.

Nechť $\varphi : U \longrightarrow V$ je lineární. $U$ má bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$
a $V$ má bázi $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. $\varphi(u_1) \in V$ lze psát takto

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k = (v_1\ v_2 \dots v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{k2} v_k = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}$$

. . . . – – – – – – – – – – – . . .

$$\varphi(u_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{kn} v_k = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(u_1) & \varphi(u_2) & \dots & \varphi(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \vdots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{(\varphi)_{\beta,\alpha}}$$

Matice lin. zobrazení $\varphi$ v bazích $\alpha$ a $\beta$

**Definice** Matice lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bazích $\alpha = (u_1, \dots u_n)$ prostoru $U$ a $\beta = (v_1, \dots, v_k)$ prostoru $V$ je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big( (\varphi(u_1))_\beta, (\varphi(u_2))_\beta, \dots, (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

**Příklad**: $U = \mathbb{R}_3[x]$ $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \to V$ $\varphi(p) = p' + 2p''$ $p'$ je 1. derivace polynomu $p$

$p''$ je 2. derivace polynomu $p$

$\varphi(1) = 0$ $\varphi(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matice $\varphi$ v bázích $\alpha, \beta$.

$$\varphi(x) = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^2) = 2x + 4 = \underline{4} \cdot 1 + \underline{2} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^3) = 3x^2 + 12x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{12} \cdot x + \underline{3} \cdot x^2$$