Požadavky ke zkoušce

1) Semestrální písemky – získat aspoň 8 bodů z 16. Existuje oprava

2) 2. kolo je písemka ve zkouškovém
část početní (12b) získané body + $\frac{b(1)-8}{2} \geq 7$
část teoretická (10b) ≥ 5

3) Ústní zkouška

Soustavy lineárních rovnic

Počítání s reálnými a komplexními čísly : $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Operace $+$:
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a, b) \longmapsto a+b \qquad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 + z_2$$

$\cdot$:
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b \qquad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 \cdot z_2$$

Tyto operace mají následující (dobře známé) vlastnosti:

komutativita $\quad K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$$\forall a, b \in K \quad a+b = b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

asociativita $\quad \forall a, b, c \in K \quad (a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3

$\exists 0 \in K \quad \forall a \in K \quad a + 0 = a$

$\exists 1 \in K \quad \forall a \in K \quad a \cdot 1 = a$

neutrální prvek na sčítání a násobení

Opačné číslo $\forall a \in K \ \exists (-a) \quad a + (-a) = 0$

Převrácené číslo

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

Distributivita $\forall a, b, c \in K$

$$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c$$

Další číselné obory

$\mathbb{N}$ přirozená čísla $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ celá čísla $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

nemají všechny předchozí vlastnosti

$\mathbb{Q}$ rac. čísla — mají všechny předch. vlastnosti

Soustavy lin. rovnic

(k rovnic o n neznámých)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots\dots + a_{kn}x_n = b_k$$

---

a_{ij} jsou nám známé koeficienty, b_i koeficient na pravé straně v i-tém řádku

i značí řádek; j značí proměnnou, u které stojí

$x_1, x_2, \dots x_n$ jsou neznámé. Vše $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

5

Koeficienty v soustavě dávají tabulku, kterou nazýváme matici:

matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Rozměry matice soustavy jsou $\underbrace{k}_{\text{počet řádků}} \times \underbrace{n}_{\text{počet sloupců}}$

Rozšířená matice soustavy má rozměry $k \times (n+1)$

Homogenní soustava má vpravo samé 0.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je každá n-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in K$, která splňuje po dosazení do rovnic všechny rovnosti.

Homogenní soustava má vždy aspoň jedno řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

Ekvivalentní soustavy lin. rovnic

jsou soustavy, které mají stejnou množinu řešení.

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$	$x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$
	$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4$

jsou ekvivalentní.

Rovnice $x = 1$ a $x^2 = 1$ nejsou ekvivalentní.

Množina řešení: $\{1\}$ $\qquad$ $\{-1, 1\}$

Ekvivalentní úpravy jsou úpravy, kterými od jedné soustavy přejdeme k ekvivalentní soustavě (nemění množinu řešení).

Elementární ekvivalentní úpravy soustavy lin. rovnic

- danou rovnici vynásobíme číslem $c \neq 0$.
- vyměníme pořadí rovnic
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice

Tyto úpravy se projevují na rozšířené matici soustavy ve formě tzv. elementárních řádkových operací (ŘO, ERO)

Element. řádk. operace s maticemi

- daný řádek vynásobíme číslem $c \neq 0$
- vyměníme i-tý a j-tý řádek $(j \neq i)$
- k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku, kde $j \neq i$

Příklad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -12 & 12 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

k 1. řádku přičteme dvojnásobek 2. řádku

Které soustavy lin. rovnic jsme schopni jednoduše vyřešit?

Vedoucí koeficient řádku je první nenulový koeficient v rovnici nebo v odpovídající matici

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 2 & 10 & -18 & & 6 \end{array}$$

vedoucí koeficient

Hledané matice jsou matice v tzv. schodovitém tvaru

- řádky se samými nulami jsou na konci matice
- je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak řádek $i+1$ je tvořen samými nulami nebo jeho vedoucí koeficient je $a_{i+1\,k}$, kde $k \geq j+1$.

10

i-tý řádek $\quad 0\ 0 \ldots 0\ a_{ij} \neq 0 \ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$

$\qquad\qquad\quad 0\ 0 \ldots 0\ \ 0 \qquad\quad 0\ a_{i+1\,k} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

je ve schod. tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

– není ve schod. tvaru

TVRZENÍ: Soustavu lin. rovnic, která je ve schodovitém tvaru, umíme vyřešit.

Mohou nastat tyto možnosti

1. V rozšířené matici soustavy je řádek

$$0 \quad 0 \quad \dots\dots \quad 0 \;\Big|\; c \neq 0$$

V tomto případě nemá soustava řešení. Jinak by totiž

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c$$

$$0 = c \text{, spor.}$$

(2) V rozšířené matici soustavy takový řádek neexistuje.

To znamená, že nenulové řádky mají vedoucí koeficient u nějaké neznámé.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{x_1} - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ \underline{x_3} + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ \underline{x_4} + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení počítá s tím, že neznámé, které NESTOJÍ u vedoucích koeficientů zvolíme libovolně. Ostatní neznámé počítáme „ZDOLA".

Řešíme rukem $x_5 = p$ $x_2 = q$

$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$ z poslední rovnice

$x_3 = 0 - 2x_4 - x_5 = -2 + 4p - p = -2 + 3p$

z 2. rovnice

$x_2 = q$

$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 + (-4) + 6p - 1 + 2p - p$

$= -2 + 7p$ z 1. rovnice

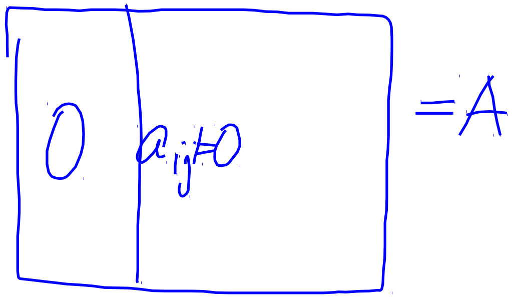
<u>VĚTA</u>: Každou matici lze pomocí elementárních řádkových operací převést na schodovitý tvar.

Postup je algoritmický a nazývá se GAUSSOVA ELIMINACE

<u>Důsledek</u>: Každou soustavu lin. rovnic umíme algoritmicky vyřešit.

<u>ALGORITMUS</u>: Mějme matici A typu $k \times n$. (k řádků a n sloupců)

- najdeme první sloupec, ve kterém je nenulové číslo, označme jej j

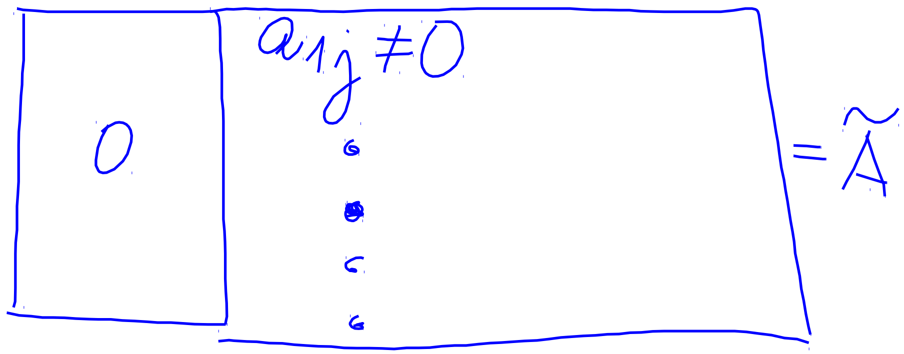


Nechť nenulové číslo leží v i-tém řádku.

Tedy $a_{ij} \neq 0$.

Jestliže $a_{1j} \neq 0$, vezmeme $i = 1$.

Pokud ne, vyměníme 1. a i-tý řádek, dále pak vyměněné



- Nyní změníme koeficienty pod a_{1j} v j-tém sloupci na nuly.

Jestliže $a_{kj} = 0$, nemusíme dělat nic.

Jestliže $a_{kj} \neq 0$. Od k-tého řádku odečteme

$$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$$ -násobek 1. řádku

Na místě v k.-tém řádku a j-tém sloupci dostaneme

$$a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = a_{kj} - a_{kj} = 0.$$

Takto dostaneme matici

$$\tilde{\tilde{A}} = \left(\begin{array}{c|c|c} & a_{1j} \neq 0 & \\ \hline O & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} & B \end{array}\right)$$

Jestliže matice B ještě existuje, vezmeme ji, její rozměry jsou nejvýše $(k-1) \times (n-1)$ a s touto maticí provádíme stejný postup jako s maticí A. Dříve nebo později dostaneme schodový tvar.

Příklad

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_4 &= -2 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

18

$2.\check{r} - 3 \times 1.\check{r}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$3.\check{r} - 2 \times 1.\check{r}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostali jsme schodovitý tvar

Řešíme soustavu

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2$$
$$5x_2 - 8x_3 + x_4 = -6$$

$x_4 = p$

$x_3 = q$

$$x_2 = \frac{1}{5}(-6 + 8x_3 - x_4) = -6/5 + 8/5\, q - p/5$$

$$x_1 = 2 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 4/5 - \frac{12}{5} q + 4/5\, p.$$