Domácí úkoly ke cvičení č. 8

1. V každé z následujících úloh jsou dány vektorové prostory $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ nad týmž číselným tělesem $(T, +, \cdot)$ a dále je dáno zobrazení $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Pokaždé rozhodněte, zda potom zobrazení φ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{W}, +, \cdot)$. Svá tvrzení ověřte nebo zdůvodněte.

a) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ všech zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde operace sčítání $+ : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ je pro libovolná zobrazení $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$(\forall c \in \mathbb{Z})((f + g)(c) = f(c) + g(c))$$

a vnější operace skalárního násobení $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ je pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a pro libovolné zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$(\forall c \in \mathbb{Z})((r \cdot f)(c) = r \cdot f(c)).$$

Dále pak je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ všech zobrazení $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde příslušná operace sčítání $+ : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je pro libovolná zobrazení $h, k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$(\forall m \in \mathbb{N})((h + k)(m) = h(m) + k(m))$$

a vnější operace skalárního násobení $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a pro libovolné zobrazení $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$(\forall m \in \mathbb{N})((r \cdot h)(m) = r \cdot h(m)).$$

Nakonec je zadáno zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, které je pro libovolné zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dáno předpisem

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big(\varphi(f)(n) = \textstyle\sum_{i=-n}^{n} i \cdot f(i)\big).$$

b) Je dán vektorový prostor $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \odot)$, kde $\mathcal{S}(\mathbb{C}) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{C})\}$ je množina všech posloupností komplexních čísel, nad tělesem $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, přičemž operace sčítání $+ : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$ je pro libovolné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel dána předpisem

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a vnější operace skalárního násobení $\odot : \mathbb{C} \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$ je pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ a pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel dána předpisem

$$z \odot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Dále je dán vektorový prostor $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \circledcirc)$, kde $\mathcal{S}(\mathbb{C}) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{C})\}$ je opět množina všech posloupností komplexních čísel, nad tělesem $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, přičemž operace sčítání $+ : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$ je pro libovolné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel dána opět předpisem

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a vnější operace skalárního násobení $\circledcirc : \mathbb{C} \times \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$ je pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ a pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel tentokrát dána předpisem

$$z \circledcirc \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\overline{z} \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Nakonec je zadáno zobrazení $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$, které je identickým zobrazením na množině $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ všech posloupností komplexních čísel. To znamená, že toto zobrazení φ je pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel dáno předpisem

$$\varphi(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

c) Jsou dány tytéž vektorové prostory $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \odot)$ a $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \circledcirc)$ nad tělesem $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jako v úloze b). Zobrazení $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C})$ je však tentokrát zadáno pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel odlišným předpisem

$$\varphi(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\overline{a_n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

2. Nechť zobrazení $\vartheta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$, které je na vektorech báze $\alpha = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{f}_2 = (1, -1, 0, 0),$$
$$\mathbf{f}_3 = (1, -1, -1, 0),\ \mathbf{f}_4 = (1, -1 - 1, 1),$$

zadáno obrazy těchto vektorů

$$\vartheta(\mathbf{f}_1) = (1, 3, 2, 7, 4),\ \vartheta(\mathbf{f}_2) = (1, 4, 9, 5, 3),$$
$$\vartheta(\mathbf{f}_3) = (1, 5, 4, 9, 2),\ \vartheta(\mathbf{f}_4) = (1, 4, 5, 7, 3).$$

Najděte matici A typu $5/4$ nad $\mathbb{R}$ takovou, aby pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ a pro jeho obraz $\vartheta((x_1, x_2, x_3, x_4)) \in \mathbb{R}^5$, $\vartheta((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ platilo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je lineárním zobrazením vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, které je na vektorech báze $\beta = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{g}_1 = (1, 2, 2, 2),\ \mathbf{g}_2 = (0, 1, 2, 2),\ \mathbf{g}_3 = (0, 0, 1, 2),\ \mathbf{g}_4 = (0, 0, 0, 1),$$

zadáno obrazy těchto vektorů

$$\psi(\mathbf{g}_1) = (1, -5, 4),\ \psi(\mathbf{g}_2) = (1, 2, -3),$$
$$\psi(\mathbf{g}_3) = (2, -3, 1),\ \psi(\mathbf{g}_4) = (-3, 1, 2).$$

Určete jádro $\operatorname{Ker}\psi$ a obraz $\operatorname{Im}\psi$ lineárního zobrazení ψ. Najděte nějaké báze vektorových podprostorů $\operatorname{Ker}\psi$ a $\operatorname{Im}\psi$.