

Teorie grafů

(Neorientovaný) graf je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je množina vrcholů a E je množina hran. Zapisujeme $G = (V, E)$. Hraný jsou tvaru $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$.

Matice sousednosti grafu G o n vrcholech v_1, v_2, \dots, v_n je čtvercová matice $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, jejíž prvky jsou definovány předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Podgraf grafu $G = (V, E)$ je graf $H = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, tedy H je vytvořen z G odebráním několika vrcholů a několika hran, přičemž pro každý odebraný vrchol musíme odebrat i všechny hrany s ním incidentní. Pokud je graf H vytvořen pouze pomocí odebrání několika vrcholů a všech hran s nimi incidentními, hovoříme o **podgrafu indukovaném**.

Úplný graf je takový graf, kde jsou každé dva vrcholy spojeny hranou. Úplný graf o n vrcholech se značí K_n .

Bipartitní graf je graf $G = (V, E)$, kde množinu V lze rozdělit na dvě části, na množiny V_1, V_2 takové, že z vrcholů množiny V_1 mohou vést hrany pouze do vrcholů z množiny V_2 a naopak. O takovém grafu řekneme, že je **úplný bipartitní**, jestliže z každého vrcholu V_1 vede hrana do každého vrcholu V_2 a opačně. Pokud platí $|V_1| = m$ a $|V_2| = n$, pro nějaká $m, n \in \mathbb{N}$, značí se úplný bipartitní graf mezi V_1 a V_2 jako $K_{m,n}$.

Grafy $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ nazveme **izomorfními**, jestliže existuje bijektivní zobrazení $f: V \rightarrow W$ takové, že pro všechna $u, v \in V$ platí $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in F$.

Stupeň vrcholu v grafu G je počet hran grafu, které tento vrchol obsahují. Značí se $Deg_G(v)$.

Tah v grafu je posloupnost vrcholů a hran $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$, kde pro $i = 1, 2, \dots, n$ jsou v_i vrcholy grafu a pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ jsou $\{v_i, v_{i+1}\} = e_i$ navzájem různé hrany grafu.

Cesta v grafu je tah, ve kterém se neopakují vrcholy.

Graf je **souvislý**, jestliže pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v . **Komponentou** grafu nazýváme každý jeho maximální souvislý podgraf. Hranu nazveme **mostem**, jestliže se po jejím odstranění zvýší počet komponent grafu o 1.

Eulerovský graf je takový graf, ve kterém je každý vrchol sudého stupně.

Platí, že graf lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je souvislý a eulerovský. Graf lze nakreslit jedním (ne nutně uzavřeným) tahem, neobsahuje-li žádné vrcholy lichého stupně nebo obsahuje-li právě dva vrcholy lichého stupně.

Kružnicí v grafu rozumíme posloupnost $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n = v_1)$, ve které pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ jsou v_i po dvou různé vrcholy grafu a $\{v_i, v_{i+1}\} = e_i$ jsou hrany grafu.

Strom je souvislý graf neobsahující kružnici.

Kostra grafu $G = (V, E)$ je libovolný souvislý podgraf $H = (V, F)$, který neobsahuje kružnici.

Ohodnocení grafu $G = (V, E)$ je zobrazení $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Ohodnocený graf se pak značí $G = (V, E, w)$.

Minimální kostra ohodnoceného grafu je taková kostra, která má mezi všemi kostrami daného grafu minimální součet ohodnocení hran. Minimální kostra nemusí být určena jednoznačně.

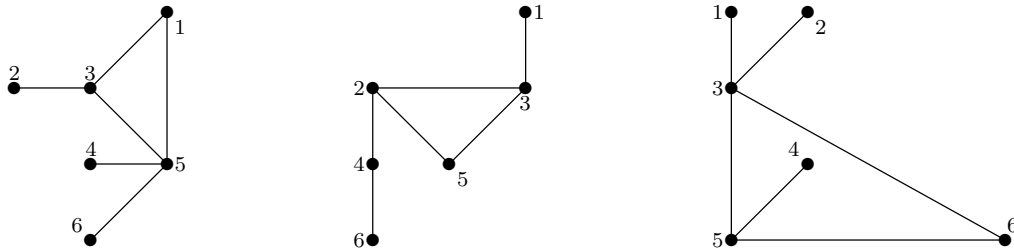
(Vrcholové) obarvení grafu je přiřazení jedné barvy každému vrcholu tak, aby žádné dva vrcholy obarvené stejnou barvou nebyly spojeny hranou. Podobně lze definovat hranové obarvení, kde požadujeme, aby hrany obarvené stejnou barvou neměly společný vrchol.

Graf je **rovinný**, jestliže jde nakreslit do roviny tak, aby se žádné jeho hrany neprotínaly.

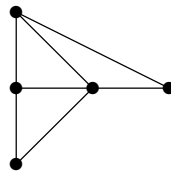
Orientovaný graf je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran tvaru (u, v) pro $u, v \in V$. Orientovaný graf je **souvislý**, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ existuje cesta z u do v nebo z v do u .

Příklady:

- Určete, které dva z těchto tří grafů jsou navzájem izomorfní:



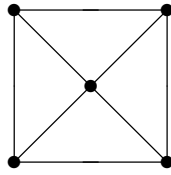
- Kolik různých kružnic obsahuje tento graf?



- Dejte příklad grafu, který splňuje následující (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):

- (a) má 1 komponentu, 3 vrcholy a je nesouvislý,
- (b) skládá se ze 2 komponent a 3 vrcholů,
- (c) má 5 vrcholů a obsahuje právě 3 kružnice,
- (d) má 4 vrcholy se stupni 3,2,2,2,
- (e) má 4 vrcholy se stupni 2,2,2,2.

4. Nalezněte až na izomorfismus všechny kostry tohoto grafu:



5. Nalezněte 3 navzájem neizomorfní souvislé Eulerovské grafy o šesti vrcholech.

6. Najděte až na izomorfismus všechny grafy, které splňují tyto podmínky:

- (a) graf má 3 vrcholy,
- (b) graf obsahuje právě 5 vrcholů, 5 hran a 1 kružnici,
- (c) graf má 4 vrcholy, lze obarvit 4 barvami ale ne 3 barvami,
- (d) graf je souvislý, má 4 vrcholy a nelze nakreslit jedním tahem,
- (e) graf má 4 vrcholy a není rovinný.