MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2015 Paulína Kerpnerová

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Konvergence nekonečných řad

Bakalářská práce

Paulína Kerpnerová

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D.   Brno 2015

Bibliografický záznam

Autor:	Paulína Kerpnerová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Konvergence nekonečných řad
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2014/2015
Počet stran:	$xi + 56$
Klíčová slova:	nekonečné řady; číselné řady; funkční řady; konvergence; součet řady; mocninné řady; Taylorova řada; aplikace řad

Bibliografický záznam

Autor:	Paulína Kerpnerová Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a štatistiky
Názov práce:	Konvergencia nekonečných radov
Študijný program:	Matematika
Študijný odbor:	Finančná a poistná matematika
Vedúci práce:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2014/2015
Počet strán:	$xi + 56$
Kľúčové slová:	nekonečné rady; číselné rady; funkcionálne rady; konvergencia; súčet radu; mocninové rady; Taylorov rad; aplikácia radov

Bibliographic Entry

Author:	Paulína Kerpnerová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Convergence of infinite series
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and insurance mathematics
Supervisor:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Academic Year:	2014/2015
Number of Pages:	$xi + 56$
Keywords:	infinite series; series of numbers; series of functions; convergence; sum of the series; power series; Taylor series; aplication of series

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme teorii nekonečných řad s důrazem na jejich konvergenci. Popisujeme a vysvětlujeme jednotlivé pojmy z této teorie, jako například číselné řady, konvergenci řad nebo funkční řady. Zavádíme jednotlivá kritéria konvergence řad a ilustrujeme je na příkladech. V závěru práce využíváme předcházející poznatky v aplikačních příkladech.

Abstrakt

V tejto bakalárskej práci sa venujeme teórii nekonečných radov s dôrazom na ich konvergenciu. Popisujeme a vysvetľujeme jednotlivé pojmy z tejto teórie, ako napríklad číselné rady, konvergenciu radov alebo funkcionálne rady. Zavádzame jednotlivé kritériá konvergencie radov a ilustrujeme ich na príkladoch. V závere práce využívame predchádzajúce poznatky v aplikačných príkladoch.

Abstract

In this thesis we study theory of infinite series, especially convergence of these series. We describe and explain each concept of this theory, for example series of numbers, convergence of series, or series of functions. We declare criterions for convergence of series and we illustrate these criterions on examples. At the end of this thesis, we use the described theory in aplications.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Paulína Kerpnerová

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Konvergence nekonečných řad

Téma práce anglicky: Convergence of infinite series

Oficiální zadání:
Cílem práce je přehledně zpracovat teorii o nekonečných řadách s důrazem na jejich konvergenci, sčítání a případně použití např. jako nástroje pro řešení diferenciálních rovnic, odhadování integrálů apod. Práce by měla obsahovat větší množství řešených i neřešených příkladů ilustrujících a využívajících jednotlivá tvrzení. Práce bude psána ve slovenštině.

Literatura:

ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky. II, Integrální počet, nekonečné řady, diferenciální geometrie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, funkce komplexní proměnné, Laplaceova transformace, diferenční rovnice*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1986. 896 s.

DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013. 113 s. ISBN 978-80-210-6416-4.

J. M. Hyslop: Infinite Series. Dover Publications, 2006, ISBN 978-0486450339.

Jazyk závěrečné práce: slovenština

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

Datum zadání práce: 2. 6. 2014

V Brně dne: 24. 10. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 7. 11. 2014

Kerpnerová

Paulína Kerpnerová
studentka

Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
vedoucí práce

v. z. Pavel Horák

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto mieste by som chcela poďakovať Mgr. Petrovi Hasilovi, Ph.D., za poskytnutie materiálov a cenné rady pri tvorbe tejto práce.

Prohlášení

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracovala samostatne s využitím informačných zdrojov, ktoré sú v práci citované.

Brno 21. května 2015

. . . .
Paulína Kerpnerová

Obsah

Úvod

Otázkami nekonečných radov sa zaoberali matematici ale aj filozofovia už v staroveku. Uveďme napríklad Zenona z Eley (490–430 p.n.l), ktorý vďaka svojej teórii o Achillovi a korytnačke považoval za nemožné, aby súčet nekonečne mnoho čísel mohol byť konečný. Matematik Archimedes (287–212 p.n.l) zase použil nekonečný geometrický rad ku kvadratúre paraboly. Spomeňme aj Richarda Swinesheada (14. storočie), ktorý ako prvý sčítal nekonečný rad, ktorý nie je geometrický. Prvenstvo v dôkaze divergencie harmonického radu má zas Nicole Oresme (1323–1382). Rozvoj teórie nekonečných radov však nastal až v 17. storočí po zavedení diferenciálneho a integrálneho počtu. Spočiatku sa matematici dopúšťali mnohých omylov, najznámejší je príklad *Grandiho radu*. Guido Grandi (1671–1742) uvažoval nekonečný rad $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Chybným užitím asociačného zákona zistil, že $0 = 1$ a toto si vysvetlil ako stvorenie sveta Bohom z ničoho. Začali sa upresňovať pojmy súčtu a konvergencie nekonečných radov. V tomto storočí odvodili a používali rozvoj nekonečných radov aj napriek mnohým nejasnostiam napríklad Isaac Newton (1642–1727), Gotfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Brook Taylor (1685–1731) či Leonhard Euler (1707–1783).

Až začiatkom 19.storočia začali matematici budovať teóriu nekonečných radov s dôrazom na ich konvergenciu. Podielali sa na tom napríklad Joseph Fourier (1768–1830), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ale aj český matematik a filozof Bernard Bolzano (1781–1848), ktorý ako prvý formuloval obecné kritérium konvergencie radu. Najväčší prínos do teórie nekonečných radov mal Augustin Cauchy (1789–1857) so svojou prácou *Cours d'analyse algébrique*. Netreba zabúdať ani na prínos nórskeho matematika Nielsa Abela (1802–1829), ktorý prispel prácou o binomických radoch. Vďaka ich vedeckému spracovaniu existuje teória nekonečných radov tak ako ju poznáme dnes.

V tejto práci sa zaoberáme práve touto teóriou. V prvej časti popisujeme nekonečné číselné rady. V prvej kapitole sú zavedené základné pojmy pre prácu s číselnými radmi, ich druhy ako sú aritmetický a geometrický rad spolu s operáciami s týmito radmi. Uvedená je pre zaujímavosť aj ekonomická aplikácia radov. Ďalej rozoberáme prípady číselných radov, a to rady s nezápornými členmi a alternujúce rady.

V ďalšej časti sú uvedené nekonečné funkcionálne rady a ich vlastnosti spolu so špeciálnym prípadom mocninovými radmi. Opäť sú zavedené základné pojmy ako obor konvergencie radu a dôležité vlastnosti pre praktický výpočet. V neposlednom rade je uvedený aj rozvoj funkcií do Taylorovho radu, ktorý využívame v poslednej kapitole pri aplikácií týchto mocninových radov.

V celej práci sa kladie dôraz na zistenie konvergencie či divergencie radu a na jeho súčet. Jej cieľom je podať čitateľovi prehľad o základnej teórii nekonečných radov. Jednotlivé tvrdenia sú ilustrované na príkladoch. Pre neriešené príklady sú výsledky uvedené na konci textu. Práca predpokladá znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu.

Ako hlavné zdroje tejto práce máme [1], [6], [11], pre rozšírenie je možné nahliadnuť aj do [8] alebo [10].

Kapitola 1

Nekonečné číselné rady

V tejto kapitole sa budeme venovať základným pojmom z oblasti nekonečných číselných radov. Uvedieme aj operácie s týmito radmi a na záver kapitoly aj jednoduchú ekonomickú aplikáciu. V tejto kapitole sme čerpali predovšetkým z [1], [2], [3], [6] a [9]. Pre zopakovanie najskôr zavedieme pojem postupnosti, ktorá je pre definíciu radu kľúčová.

1.1 Základné pojmy

Definícia 1.1. *Postupnosť* je zobrazenie $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prvky tohto zobrazenia zvyčajne značíme a_n a postupnosť zapisujeme ako $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, prípadne $\{a_n\}$, kde hodnotu a_n nazývame jej n-tým členom.

Poznámka 1. Ak sú členmi postupnosti čísla, hovoríme o *číselnej postupnosti*. V prípade, kedy sú členmi postupnosti funkcie, hovoríme o *funkcionálnej postupnosti*. V tejto kapitole si vystačíme s postupnosťami čísel, v ďalších kapitolách využijeme aj postupnosti funkcií.

Definícia 1.2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí číselnú postupnosť. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazývame *nekonečný číselný rad*. Prvky postupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nazývame členmi radu, kde číslo a_n je n-tý člen. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots$$

nazývame *postupnosť čiastočných súčtov* tohto radu a s_n nazývame n-tý čiastočný súčet.

Sčítať nekonečný počet sčítancov v bežnom slova zmysle nie je možné. Pojem súčtu radu preto zavádzame ako limitu postupnosti čiastočných súčtov.

Definícia 1.3. Povieme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - a| < \varepsilon$. Povieme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞, ak ku každému $a \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n \geq n_0$ platí, že $a_n > a$. Podobne definujeme aj limitu $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Poznámka 2. Ak nie je uvedené inak, považujeme limitu funkcie premennej n vždy idúcu do nekonečna a značíme namiesto $\lim_{n\to\infty}$ jednoducho $\lim$.

Definícia 1.4. Ak existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, povieme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má súčet s. Píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Ak existuje nevlastná limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, povieme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje* k $\pm\infty$. Píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Ak limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, povieme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

Príklad 1.1. Určte súčet nekonečného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ a rozhodnite o konvergencii.

Riešenie. Postupujeme podľa Definicíe 1.4, teda určíme s_n a pozrieme sa na jeho limitu. Najskôr rozložíme člen radu a_n na parciálne zlomky, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+3)}\right].$$

Potom

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+3)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{3(n+2)} - \frac{1}{3(n+3)}. \end{aligned}$$

Súčet radu teda je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{3(n+2)} - \frac{1}{3(n+3)} = \frac{11}{18}$$

a rad konverguje.

Pri rozhodovaní o konvergencii či divergencii nekonečných radov je veľmi významná nasledujúca veta, ktorá udáva *nutnú podmienku konvergencie*.

Veta 1.1. *Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má súčet s, teda $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Keďže $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, potom $a_n = s_n - s_{n-1}$. Odtiaľ plynie, že limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

čím je veta dokázaná. □

Je dôležité si uvedomiť význam tejto vety. Opačná implikácia totiž neplatí. Ak je $\lim a_n = 0$, konvergencia radu z nej ešte neplynie. Takýmto radom je napríklad tzv. *harmonický rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.}$ V tomto rade je každý člen harmonickým priemerom dvoch susedných členov. Dôkaz divergencie spravíme ľahko integrálnym kritériom v ďalšej kapitole, napriek tomu, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Nasledujúca veta hovorí, že pridanie alebo odobratie akéhokoľvek konečného počtu členov z konvergentného (resp. divergentného) radu nemá na konvergenciu (resp.divergenciu) radu žiadny vplyv.

Veta 1.2. *Nech $k \in \mathbb{N}$. Platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

a rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ súčasne buď konvergujú alebo divergujú.

Dôkaz. Veta bezprostredne plynie z Definície 1.2. □

Príklad 1.2. Môžu nasledujúce rady konvergovať?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} \arcsin(n)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3n^2+2n-4}{8n^2+5}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3-n^2}$

Riešenie. Využijeme predchádzajúcu nutnú podmienku konvergencie.

a) Limita je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \arcsin(n) = 0$, teda rad môže konvergovať.

b) V tomto prípade limita je $\lim_{n\to\infty} -\frac{3n^2+2n-4}{8n^2+5} = -\frac{3}{8} \neq 0$ a uvedený rad nemôže konvergovať.

c) Tentoraz máme limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, rad teda môže konvergovať.

d) V tomto prípade máme limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3-n^2} = 0$ a rad môže konvergovať.

Teraz zavedieme konkrétne druhy číselných radov, a to aritmetický a geometrický rad.

Definícia 1.5. Číselnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *aritmetickou postupnosťou*, ak platí

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

kde číslo d nazývame *diferencia*.

Veta 1.3. *Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je*

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Dôkaz. Súčet prvých n členov postupnosti je

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Podľa Definície 1.5 ďalej platí $a_{n+1} = a_n + d$. Znamená to, že tento súčet môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d], \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \end{aligned}$$

Sčítaním oboch rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \end{aligned}$$

čím je veta dokázaná. □

Poznámka 3. Súčet nekonečne mnoho členov aritmetickej postupnosti sa nazýva *nekonečný aritmetický rad.* Ak sa nejdená o postupnosť samých núl, je tento súčet $\pm\infty$.

Definícia 1.6. Číselnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *geometrickou postupnosťou*, ak platí

$$a_n = a_1 q^n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Definícia 1.7. Geometrický rad je súčet geometrickej postupnosti, teda rad v tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots,$$

kde $a \neq 0$, $q \neq 0$, $a, q \in \mathbb{R}$. Číslo q sa nazýva *kvocient* geometrického radu.

Poznámka 4. Geometrický rad môže byť číslovaný aj od $n = 1$. V tomto prípade

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Pri geometrickom rade sa samozrejme súčet určuje tak ako v obecnom prípade. Odvodenie jeho čiastočného súčtu s_n pre rôzne hodnoty kvocientu q a určenie jeho limity nám však výrazne uľahčí prácu.
V prípade, že $q = 1$ je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a + aq + \cdots + aq^n = a + a + \cdots + a = \lim_{n\to\infty} (n+1)a = \pm\infty.$$

V prípade, že $q \neq 1$ je

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + \ldots.. + aq^n \qquad / \cdot q \\ qs_n &= aq + aq^2 + \ldots. + aq^{n+1}, \end{aligned}$$

kde po odčítaní dostaneme

$$s_n - qs_n = a + aq + \cdots + aq^n - aq - \ldots - aq^{n+1} = a - aq^{n+1}$$
$$s_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1.1}$$

Odtiaľ určíme pomocou limity súčet

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \pm\infty, & q > 1, \\ \text{neexistuje}, & q \leq -1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Z toho plynie nasledujúca veta.

Veta 1.4. *Geometrický rad* $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, $a \neq 0$, $q \neq 0$, *konverguje práve vtedy, keď* $|q| < 1$ *a jeho súčet je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Pre $q \geq 1$ *diverguje a pre* $q \leq -1$ *osciluje.*

Príklad 1.3. Určte súčet nasledujúcich nekonečných radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{5^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Riešenie. Využijeme predchádzajúcu vetu s tým, že rad najskôr upravíme do podoby, v ktorej vieme určiť číslo a a kvocient q.

a) Keďže
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot (-1),$$
máme kvocient $q = -\frac{1}{4}$ a číslo $a = -1$. Po užití vzorca (1.2) dostávame súčet $s = \dfrac{-1}{1+\frac{1}{4}} = -\dfrac{4}{5}$.

b) Upravujeme tak, aby rad začínal od nuly, teda
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n \cdot \left(-\frac{3}{5}\right).$$
Dostávame súčet $s = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{8} = -\dfrac{3}{8}$.

c) V tomto prípade po úprave

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot 3$$

vidíme, že $q > 1$ a tým pádom daný rad diverguje.

d) Pri tomto rade volíme obecný postup určenia čiastočného súčtu a jeho limity. Píšeme

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \\ \frac{s_n}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^n \cdot 2} \\ s_n - \frac{s_n}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n \cdot 2} = \frac{s_n}{2} \qquad / \cdot 2 \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Vidíme, že čiastočný súčet je geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{2}$ a člen $-\frac{n}{2^n}$. Celkový súčet radu teda je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{n}{2^n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

1.2 Operácie s číselnými radmi

Veta 1.5. *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ taktiež konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t.$$

Dôkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$. Potom

$$\begin{aligned} w_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= s_n \pm t_n. \end{aligned}$$

Keďže $\lim s_n = s$ a $\lim t_n = t$, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) = s \pm t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

Poznámka 5. Opäť je nutné uvedomiť si význam vety, pretože z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ neplynie konvergencia radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Túto skutočnosť vidíme napríklad na radoch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Oba rady oscilujú, pričom ich súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n-1} + (-1)^n\Big]] = \sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(-1+1)] = 0$$

konverguje.

Veta 1.6. *Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pre ľubovoľné $k \in \mathbb{R}$ aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a jeho súčet je s. Opäť označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$. Samozrejme $\lim s_n = s$. Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí, že limita

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = ks,$$

tj. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = ks$, a keďže $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, čím sme dokázali prvú časť tvrdenia.

Nech naopak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, $k \neq 0$. Podľa prvej časti vety potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}(ka_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Príklad 1.4. Určte súčet radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right)$

Riešenie. Využijeme predchádzajúce vlastnosti číselných radov.

a) Keďže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

súčet radu počítame ako $s = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 3.$

b) Podobne postupujeme v tomto prípade, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{9}$$

a určíme súčet $s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{13}{6}.$

Príklad 1.5. Vyjadrite ako zlomok v základnom tvare číslo $0{,}64\overline{8}$.

Riešenie. Číslo prepíšeme do tvaru $0{,}64\overline{8} = 0{,}64 + \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}008 \cdot (0{,}1)^{n-1}$ a riešime ako súčet konštanty s geometrickým radom, teda

$$0{,}64\overline{8} = 0{,}64 + \frac{0{,}008}{1-0{,}1} = 0{,}64 + \frac{0{,}008}{0{,}9} = \frac{584}{900} = \frac{146}{225}.$$

1.3 Ekonomická aplikácia

Nekonečné rady majú svoje využitie napríklad v teórii pravdepodobnosti, presnejšie pri diskrétnych náhodných premenných, ale aj v ekonómii, napríklad v teórii hromadnej obsluhy. Majú aj veľmi jednoduchú aplikáciu vo finančnej matematike. Najskôr si ukážeme príklady využitia konečných radov, potom aj príklad využívajúci nekonečný rad.

Príklad 1.6. Na vkladnej knižke pribudne k hodnote 1500 € každý mesiac čiastka o 500 € väčšia. Vypočítajte celkové úspory po 9 mesiacoch S_9.

Riešenie. Postupnosť týchto vkladov je $Y_t = 1500 + 500t$, $t \in \mathbb{N}_0$. Ako vidíme, táto postupnosť je aritmetická. Celkové úspory po 9 mesiacoch spočítame ako súčet prvých 10 členov tejto postupnosti, teda

$$S_9 = \sum_{t=0}^{9}(1500 + 500t) = \frac{10}{2}(1500 + 1500 + 500 \cdot 9) = 37500.$$

Príklad 1.7. Počiatočný ročný príjem má hodnotu \$ 3500 a vzrastie o 3 % ročne. Vypočítajte celkový príjem po 15 rokoch.

Riešenie. Postupnosť týchto príjmov je $Y_t = 3500 \cdot (1+0{,}03)^{t-1}$, $t = 1, \ldots, 15$. Ako vidíme, táto postupnosť je geometrická s kvocientom $q = 1{,}03$. Celkový príjem po 15 rokoch spočítame podľa vzorca (1.1) ako súčet prvých 15 členov tejto postupnosti, teda

$$S_{15} = \sum_{t=1}^{15} 3500 \cdot (1+0{,}03)^{t-1} = 3500\frac{1-1{,}03^{15}}{1-1{,}03} = 65096{,}1986.$$

Po zaokrúhlení je príjem \$ 65096.

Príklad 1.8. Dlhopis slúži na vyplácanie pevnej čiastky peňazí v pravidelných intervaloch. Môže trvať k určitému dátumu, alebo môže trvať neobmedzene, tzv. večný dlhopis (konzola). Uvažujme práve takýto večný dlhopis. Nech vypláca čiastku 15 € za rok pri úrokovej miere 3 %. Vypočítajte súčasnú hodnotu dlhopisu.

Riešenie. Súčasná hodnota príjmu je

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} 15(1+0{,}03)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} 15\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t = \frac{\frac{15}{1+0{,}03}}{1-\frac{1}{1+0{,}03}} = 500.$$

Cvičenie 1

1.1 Rozhodnite, či môžu konvergovať rady.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-2}{\ln(n)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2n}$

1.2 Určte súčet.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 5^{n+1}}{6^n}$

1.3 Vyjadrite v tvare zlomku.

a) $0{,}8\overline{7}$

b) $-3{,}7\overline{15}$

Kapitola 2

Číselné rady s nezápornými členmi

Predtým, než začneme určovať súčet radu, je dobré vedieť, či vôbec daný rad konverguje. V tejto kapitole sa zameriame na rady s nezápornými členmi. Pre tieto rady existuje niekoľko kritérií na určenie konvergencie. Tieto kritériá nám udávajú postačujúcu podmienku pre konvergenciu (resp. divergenciu). Môžeme medzi ne zaradiť aj nutnú podmienku konvergencie. Nie vždy sa dá rozhodnúť o konvergencii radu ktorýmkoľvek kritériom, preto ich občas musíme vyskúšať niekoľko. V tejto kapitole sme čerpali z [1], [3], [11], [12].

2.1 Kritériá konvergencie

Definícia 2.1. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *číselný rad s nezápornými členmi*, ak platí $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Postupnosť čiastočných súčtov tohto radu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, pretože

$$s_{n+1} = \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} + s_n \geq s_n.$$

Ak je naviac postupnosť zhora ohraničená, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak je postupnosť neohraničená, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ určite diverguje k ∞, čo vyplýva z toho, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Preto rady s nezápornými členmi nemôžu ani oscilovať, ani divergovať k $-\infty$.

Teraz uvedieme a dokážeme spomínané kritéria konvergencie. Poznamenajme ešte, že rady vždy stačí testovať od ľubovoľného člena, viď Veta 1.2. Pre jednoduchosť tieto kritériá naformulujeme s testovaním všetkých členov. Toto môžeme interpretovať tak, že konečnú časť radu, kde príslušné predpoklady nie sú splnené vopred vynecháme.

Veta 2.1 (Porovnávacie kritérium). *Majme rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ktoré majú nezáporné členy. Nech $a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom platí*

(i) *ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,*

(ii) *ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka 6. Ak nejaký predpoklad platí pre skoro všetky n, tj. platí až od istého indexu počínajúc, znamená to, že nemusí platiť pre konečný počet členov. Poznamenajme tiež, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z Vety 2.1 sa nazýva *minoranta* a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa nazýva *majoranta*.

Dôkaz. Pretože na konvergenciu radu nemá vplyv vynechanie konečného poču členov, pri tomto dôkaze budeme predpokladať, že $a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označíme si postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Zrejme $s_n \leq t_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokážeme najskôr prípad (i). Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, tzn. zhora ohraničená. Teda existuje $k \in \mathbb{R}, t_n \leq k$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ale keďže $s_n \leq t_n$ musí aj $s_n \leq k$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, teda aj $\{s_n\}$ je ohraničená. Naviac je neklesajúca a tým pádom má vlastnú limitu $\lim s_n = s$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Prípad (ii) dokážeme jednoduchou úvahou sporom. Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom musí divergovať aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, lebo keby konvergoval, musel by podľa (i) konvergovať aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Pri používaní tohto kritéria je najlepšie poznať niektoré rady, o ktorých s určitosťou vieme, že konvergujú, resp. divergujú. Najpraktickejšie na použitie sú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, poprípade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, pričom ako dokážeme v tejto kapitole v Príklade 2.5, prvé dva divergujú a tretí konverguje.

Príklad 2.1. Rozhodnite o konvergencii nasledujúcich radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

Riešenie. a) Predpokladajme, že rad konverguje a označíme ho ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Za $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zvolíme jeden z radov, o ktorých vieme, že konverguje, napríklad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ak $a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, potom podľa definície rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potrebujeme teda vedieť, či platí nerovnosť

$$\frac{1}{(n+1)(n+4)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Inak dostaneme vyjadrenie

$$n^2 + 5n + 4 \geq n^2,$$

ktoré ako vidíme platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ konverguje.

b) Tentoraz predpokladáme divergenciu radu, označíme ho teda ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zvolíme divergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. V tomto prípade ak $a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, podľa definície rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Bez väčších úprav vidíme, že nerovnosť $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a teda rad diverguje.

c) Opäť predpokladáme divergenciu radu a označíme ho ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Zvolíme divergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Upravujeme nerovnosť

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

z ktorej dostaneme výraz

$$n^2 \geq n^2 + n.$$

Tento výraz síce neplatí, ale neznamená to, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ konverguje. Jediné, čo treba urobiť, je modifikovať nami zvolený rad na iný divergentný rad, napríklad na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Teraz upravíme nerovnosť

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

na tvar

$$n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + n.$$

Nerovnosť platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a teda rad diverguje.

d) Aplikujeme rovnaký postup ako v predchádzajúcom prípade. Hneď zvolíme za divergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Porovnávame teda

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n+1}.$$

Hneď vidíme, že nerovnosť platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a teda rad diverguje.

Veta 2.2 (Limitné porovnávacie kritérium). *Nech sú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rady s nezápornými členmi a nech existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Potom platí

(i) *ak $L < \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

(ii) *ak $L > 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Dôkaz. Prípad (i) dokážeme nasledovne. Nech $L < \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

Odtiaľ $a_n < (L+\varepsilon)b_n$. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ konverguje, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podľa Vety 2.1 konverguje.

Teraz dokážeme prípad (ii). Nech $L > 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Prípad sa rozpadne na dve možnosti.

Ak $0 < L < \infty$, existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$0 < L - \varepsilon < \infty$$

pre všetky $n \geq n_0$. Odtiaľ $(L-\varepsilon)b_n < a_n$. Keďže $\sum_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)b_n$ diverguje, podľa Vety 2.1 diverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak $L = \infty$, existuje $k > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{a_n}{b_n} > k$$

pre všetky $n \geq n_0$. Odtiaľ $a_n > kb_n$. Keďže $\sum_{n=1}^{\infty} kb_n$ diverguje, aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Príklad 2.2. Rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Riešenie. Tentoraz si rad, ktorého konvergenciu vyšetrujeme, vždy označíme ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) Predpokladáme konvergenciu a zvolíme $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Vypočítame limitu podielu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+5n+4} = 1.$$

Keďže $L < \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Výsledok sa zhoduje s výsledkom z Príkladu 2.1.

b) Predpokladáme divergenciu, preto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Opäť počítame limitu postupnosti. Táto limita sa bude chovať rovnako ako limita funkcie. Na jej určenie použijeme „prísnejšie" kritérium, L'Hospitalovo pravidlo. Platí

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Vidíme, že limita $L > 0$ a zároveň rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, teda aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Veta 2.3 (Cauchyovo kritérium – odmocninové). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi a $q \in \mathbb{R}$.*

(*i*) *Obecne rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

a diverguje, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1.$$

(*ii*) *Ak* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *kde* $q \in \mathbb{R}^*$, *potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje pre* $q < 1$, *a diverguje pre* $q > 1$. *Pre* $q = 1$ *nie sme schopní rozhodnúť o konvergencii radu.*

Dôkaz. Najskôr dokážeme obecnú vetu (i). Nech $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ pre všetky n. Odtiaľ $a_n \le q^n$. Keďže pre $|q| < 1$ je rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentný, podľa porovnávacieho kritéria aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, tak tiež $a_n \ge 1$, takže $\lim a_n \ge 1$ a nie je splnená nutná podmienka konvergencie.

Teraz si ukážeme dôkaz limitného tvaru tejto vety (ii). Najskôr dokážeme konvergenciu. Nech $\lim \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby $q + \varepsilon < 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, je $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. Odtiaľ $a_n < (q+\varepsilon)^n$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ konverguje, pretože $(q+\varepsilon) < 1$ a podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teraz dokážeme divergenciu. Nech $\lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, tj. pre dostatočne veľké n je $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$. Tým sa dostávame k analógii predchádzajúcej časti dôkazu. □

Príklad 2.3. Rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

Riešenie. Na všetky príklady využijeme predchádzajúce odmocninové kritérium.

a) V tomto prípade je lepšie využiť limitný tvar tohto kritéria, teda vypočítať limitu odmocneného člena a_n. Platí $\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$, pričom $q > 1$ a uvedený rad diverguje.

b) Opäť použijeme limitný tvar kritéria. Platí $\lim \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \operatorname{arctg} 0 = 0$. Keďže $q < 1$ uvedený rad konverguje.

c) Tu pri užití limitného tvaru kritéria dostaneme limitu $\lim \frac{1}{3+(-1)^n}$, ktorá neexistuje. Znamená to, že použijeme obecný tvar a preto píšeme

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ párne}, \\ \frac{1}{2}, & n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Pre všetky n je $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{2} < 1$, teda daný rad konverguje.

d) Teraz je výhodnejšie využiť opäť limitný tvar a platí $\lim(\sqrt[n]{n} - 1) = 0$, pričom $q < 1$ a aj tento rad je konvergentný.

Veta 2.4 (d'Alembertovo kritérium – podielové). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi a $q \in \mathbb{R}$.*

(i) *Obecne rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

a diverguje, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

(ii) *Ak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q \in \mathbb{R}^*$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pre $q < 1$, a diverguje pre $q > 1$. Pre $q = 1$ nie sme schopní rozhodnúť o konvergencii radu.*

Dôkaz. Dokážeme pre tvrdenie (ii), dôkaz prvého tvrdenia je analogický.

Nech $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, zvolíme $\varepsilon > 0$ tak, aby $q + \varepsilon < 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$, odtiaľ $a_{n+1} < (q+\varepsilon)a_n$. Indukciou pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_0+k} \leq (q+\varepsilon)^k a_{n_0}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ je konvergentný a preto podľa porovnávacieho kritéria aj $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ konverguje a preto podľa Vety 1.2 aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tj. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pre $n \geq n_0$ neklesajúca a nemôže byť splnená nutná podmienka konvergencie, teda rad diverguje. □

Príklad 2.4. Rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-4}{\sqrt{n}(\sqrt{2})^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n}$

Riešenie. Teraz využijeme na riešenie príkladov podielové kritérium.

a) Počítame limitu $\lim \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2$. Všimnime si, že táto limita je rovná limite v predchádzajúcom príklade pomocou odmocninového kritéria. Rad diverguje, pretože $q > 1$.

b) V tomto prípade je limita $\lim \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} = \frac{1}{e}$, tým pádom rad konverguje.

c) Teraz platí $\lim \frac{2(n+1)-4}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}(\sqrt{2})^n}{2n-4} = \lim \frac{(2n-2)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{2}(2n-4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a rad konverguje.

d) Tu je dôležité správne určiť člen $a_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{3^{n+1}}$. Potom dostávame limitu $\lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{3} = \infty$, preto rad diverguje.

Veta 2.5. *Pre ľubovoľnú postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *kladných čísel platí*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ak existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, potom existuje aj limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a sú si rovné.*

Dôkaz. Dôkaz nebudeme uvádzať, je možné ho nájsť napr. v [1, strana 18] alebo [3, strana 45]. □

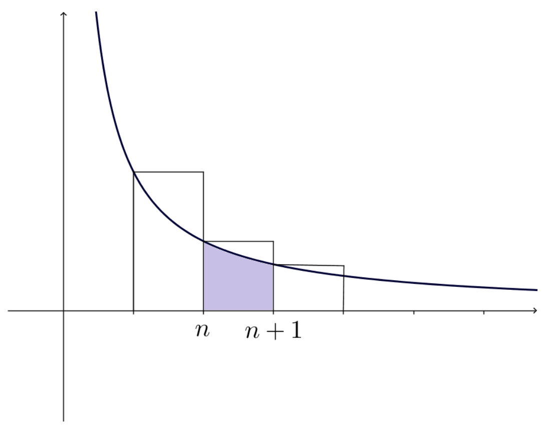
Táto veta hovorí, že o každom rade, o ktorého konvergencii môžeme rozhodnúť podielovým kritériom, môžeme rozhodnúť aj odmocninovým kritériom (ale nie naopak). Hovoríme, že odmocninové kritérium je silnejšie ako podielové kritérium, avšak niekedy je jednoduchšie práve použitie podielového kritéria.

Veta 2.6 (Integrálne kritérium). *Nech* f *je spojitá, nezáporná, integrovateľná a nerastúca funkcia definovaná na intervale* $[1, \infty)$*. Nech* $f(n) = a_n$ *pre všetky* $n \in \mathbb{N}$*. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, resp. diverguje zároveň s nevlastným integrálom* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz. Integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ môžeme písať v tvare

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže f je nerastúca, z Obrázku 2.1 vidíme, že $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n)$.



Obr. 2.1: Plocha pod krivkou

Nech $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Znamená to, že aj $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Prvá časť nerovnosti ukazuje, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preto podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ a tým pádom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nech teraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Druhá časť nerovnosti ukazuje, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

preto podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj nevlastný integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a tým je veta dokázaná. Poznamenajme, že samozrejme konverguje aj integrál od ľubovoľného čísla n. □

Príklad 2.5. Rozhodnite, pre ktoré hodnoty parametru α konverguje resp. diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Riešenie. Využijeme integrálne kritérium. Nech teda $f(n) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ pre $x \in [1, \infty)$. Táto funkcia spĺňuje všetky predpoklady Vety 2.6. Je zrejmé, že pre $\alpha > 0$ je funkcia klesajúca. Platí

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x &= [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty \quad \text{pre} \quad \alpha = 1,\\
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty} = \infty \quad \text{pre} \quad \alpha < 1,\\
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{pre} \quad \alpha > 1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že rad je konvergentný pre $\alpha > 1$. Znamená to, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. Poznamenajme, že divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ sa dokáže analogicky ako $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1} = [\ln(x+1)]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln(x+1) - \ln 2 = \infty$.

Cvičenie 2

2.1 Pomocou vhodného kritéria rozhodnite o konvergenci radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n!}$

Kapitola 3

Aboslútne a neabsolútne konvergentné rady

V tejto kapitole sa budeme zaoberať radmi, ktorých členmi sú ľubovoľné reálne čísla, teda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Zavedieme pojem alternujúcich radov, ktoré striedajú znamienka a pozrieme sa na význam absolútnej konvergencie. Zdroje používané v tejto kapitole sú [1], [3], [4], [7], [11] a [12].

3.1 Alternujúce rady

Definícia 3.1. Nekonečný rad typu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ prípadne $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, kde platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = \operatorname{sgn} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sa nazýva *alternujúci rad*.

Čo sa týka konvergencie alternujúcich radov, aj pre ne samozrejme musí platiť nutná podmienka konvergencie. Avšak v tomto prípade je táto podmienka silnejšia a hovorí nám s určitosťou o konvergencii či divergencii radu, teda stáva sa podmienkou postačujúcou.

Veta 3.1 (Leibnizovo kritérium). *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť kladných čísel, že platí*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots$$

Potom alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje práve vtedy, keď je splnená nutná podmienka konvergecie, teda keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Z Vety 1.1 plynie nutnosť podmienky, dokážeme teda jej dostatočnosť. Uvažujme nasledujúce postupnosti čiastočných súčtov. Pre $n \in \mathbb{N}$ ľubovoľné je

$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

a platí $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n}$. Analogicky

$$s_{2n+1} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0}$$

a platí $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_{2n+1}$. Obe postupnosti sú monotónne, postupnosť $\{s_{2n}\}$ je neklesajúca a postupnosť $\{s_{2n+1}\}$ nerastúca. Keďže platí

$$a_1 - a_2 = s_2 \leq s_{2n} < s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \leq s_1 = a_1$$

pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$, obe postupnosti sú ohraničené. Navyše

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(s_{2n+1} - s_{2n})}_{=a_{2n+1}} = 0,$$

teda obe majú aj rovnakú limitu. Keď $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$, potom aj $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, teda existuje vlastná limita postupnosti čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ a tým pádom tento rad konverguje. □

Príklad 3.1. Rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Riešenie. Využijeme predchádzajúce *Leibnizovo kritérium*. V oboch prípadoch je splnená podmienka jeho využitia, tj. postupnosť $\frac{1}{n}$ aj postupnosť $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sú nerastúce.

a) Určíme limitu postupnosti a_n ako limitu $\lim \frac{1}{n} = 0$. Keďže limita je nulová, rad konverguje.

b) V tomto prípade je limita $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$ a rad diverguje.

3.2 Absolútna konvergencia číselných radov

Definícia 3.2. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, povieme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne*. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, povieme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolútne*.

Poznámka 7. Najznámejší príklad neabsolútne konvergentného radu je *Leibnizov rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$. Dôkaz jeho neabsolútnej konvergencie je uvedený v Príklade 3.2.

Veta 3.2. *Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dôkaz. Môžeme písať $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ a teda aj

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Chceme dokázať konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, teda stačí dokázať konvergenciu radov $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ plynie z predpokladu vety. Podľa Vety 1.6 konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$. Ďalej podľa porovnávacieho kritéria porovnáme $a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Táto nerovnosť platí a tým pádom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ konverguje. Keďže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je vlastne rozdiel dvoch konvergentných radov, tiež konverguje a tým je tvrdenie dokázané. □

Veta 3.3. *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný rad a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je rad tvorený členmi radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v inom poradí. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiež absolútne konverguje a súčty oboch radov sú rovnaké.*

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [3]. □

3.3 Kritériá konvergencie

Tak ako sme v predchádzajúcej kapitole hovorili o kritériach konvergencie číselných radov s nezápornými členmi, spomenieme v tejto kapitole kritériá konvergencie pre rady s ľubovoľnými členmi. Pri týchto radoch obvykle najskôr vyšetrujeme konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak tento rad konverguje, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne. Ak tento rad diverguje, musíme ešte vyšetriť konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pričom ak tento rad konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolútne, inak rad diverguje.

Veta 3.4 (Porovnávacie kritérium). *Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ktorý má nezáporné členy a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s ľubovoľnými členmi. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq b_n$.*

Dôkaz. Plynie z Vety 2.1. □

Veta 3.5 (Odmocninové kritérium). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s ľubovoľnými členmi a $q \in \mathbb{R}$.*

(i) Obecne rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1,$$

a diverguje, ak pre nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1.$$

(ii) Ak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, kde $q \in \mathbb{R}^*$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne pre $q < 1$ a diverguje pre $q > 1$. Pre $q = 1$ nie sme schopní rozhodnúť o konvergencii radu.

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia (i) a tvrdenie (ii) plynie z Vety 2.3. Zostáva dokázať druhú časť tvrdenia (i). Ak $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ platí pre nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$, platí aj nerovnosť $|a_n| \geq 1$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ teda diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Veta 3.6 (Podielové kritérium). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s ľubovoľnými nenulovými členmi a $q \in \mathbb{R}$.*

(i) Obecne rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1,$$

a diverguje, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

(ii) Ak $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, kde $q \in \mathbb{R}^*$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne pre $q < 1$ a diverguje pre $q > 1$. Pre $q = 1$ nie sme schopní rozhodnúť o konvergencii radu.

Dôkaz. Opäť prvá časť tvrdenia (i) a tvrdenie (ii) plynie z Vety 2.4. Zostáva dokázať druhú časť tvrdenia (i). Ak $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$, platí aj nerovnosť $|a_{n+1}| \geq |a_n|$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pretože postupnosť $\{|a_n|\}$ je neklesajúca a teda nie je splnená nutná podmienka konvergencie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

Príklad 3.2. Rozhodnite o absolútnej a neabsolútnej konvergencii nasledujúcich radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

Riešenie. a) Označme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pomocou odmocninového kritéria vyšetríme konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$. Platí $\lim \sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \frac{1}{2}$. Keďže konverguje suma absolútnych hodnôt, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne.

b) Opäť vyšetríme najskôr konvergenciu radu absolútnych hodnôt. Aj keď tak na prvý pohľad tento rad nevyzerá, je alternujúci. Stačí si uvedomiť, že

$$\cos \pi n = \begin{cases} -1, & n \quad \text{nepárne}, \\ \ \ 1, & n \quad \text{párne}. \end{cases}$$

Užitím podielového kritéria dostávame $\lim \frac{n!}{(n+1)n!} = 0$. Keďže $q < 1$ rad konverguje absolútne.

c) Pri tomto rade už podľa Príkladu 2.5 vieme, že jeho suma absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Teraz sa stačí pozrieť na samotný rad. Pretože platí, že limita $\lim \frac{1}{n} = 0$, podľa Leibnizovho kritéria tento rad konverguje. Celkovo teda konverguje neabsolútne.

3.4 Zvyšok radu

Definícia 3.3. Nech je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ak v ňom vynecháme prvých n členov, dostaneme rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots,$$

ktorý nazývame *zvyšok radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a značíme R_n.

Súčet radu môžeme zapísať ako $s = s_n + R_n$, pričom platí

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0.$$

Znamená to, že so zväčšujúcim sa n tento zvyšok klesá, teda limitne je nulový. Číslo R_n udáva veľkosť chyby, ktorej sa dopustíme nahradením skutočnej hodnoty súčtu radu jeho čiastočným súčtom. Uvedieme dve vety, ktoré odhadujú túto veľkosť zvyšku $|R_n|$. Ich dôkazy je možné nájsť v [1, strana 37].

Veta 3.7. *Nech $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je alternujúci rad, pričom $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel, a rad spĺňuje podmienky Liebnizovho kritéria, teda platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom pre zvyšok radu R_n tohto radu platí*

$$|R_n| < a_{n+1},$$

pričom $\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n$. Znamená to, že zvyšok R_n má to isté znamienko ako prvý z vynechaných členov, člen a_{n+1}.

Veta 3.8. *Nech pre číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty}$ platí*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1,$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom pre zvyšok tohto radu platí

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}.$$

Tieto vety budeme využívať hlavne v Kapitole 6 pri aproximácii funkčných hodnôt pomocou nekonečných radov.

Cvičenie 3

3.1 Liebnizovým kritériom rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{5n-3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{25}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n+3}$

3.2 Rozhodnite o absolútnej a neabsolútnej konvergencii radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+6}}{\sqrt{3n+2}}$

Kapitola 4

Funkcionálne rady

Ďalšiu dôležitú úlohu v matematike hrajú funkcionálne nekonečné rady, teda rady, ktorých členy predstavujú funkcie premennej x. V prípade týchto radov je ich súčtom nejaká funkcia $f(x)$. Rovnako ako pri číslených radoch definujeme nekonečné rady funkcií pomocou postupnosti funkcií. Pozrieme sa aj na dva dôležité pojmy a to *bodovú konvergenciu* a *rovnomernú konvergenciu*. V tejto kapitole sme čerpali z [1], [4], [6] a [12].

4.1 Bodová konvergencia

Definícia 4.1. Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ značí postupnosť funkcií, ktoré sú definované na intervale I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

nazývame *nekonečný funkcionálny rad*. Postupnosť $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = f_1(x),\ s_2 = f_1(x) + f_2(x), \ldots,\ s_n = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \ldots,$$

nazývame *postupnosť čiastočných súčtov* tohto radu.

Ako aj pri číselných radoch, aj tu nás bude zaujímať ich súčet a s ním spojené vyšetrovanie konvergencie radu. Začneme zavedením pojmu bodovej konvergencie pre postupnosť funkcií.

Definícia 4.2. Nech je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť funkcií na intervale I. Majme $x_0 \in I$ ľubovoľné. Povieme, že postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentná v bode* x_0, ak je konvergentná číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$.

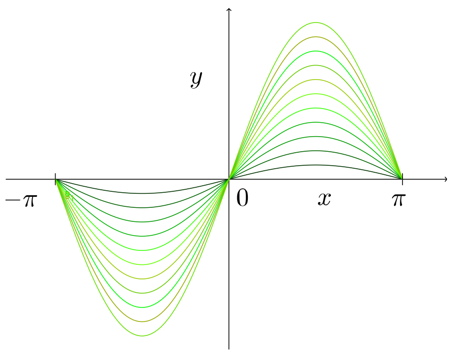
Definícia 4.3. Ak postupnosť funkcií konverguje v každom bode $x \in I$, povieme, že táto postupnosť *bodovo konverguje* na intervale I k funkcii $f(x)$. Inými slovami, ku každému $x \in I$ a ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje kladné celé číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pričom $n \geq n_0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Značíme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ alebo $f_n \to f$ na intervale I.

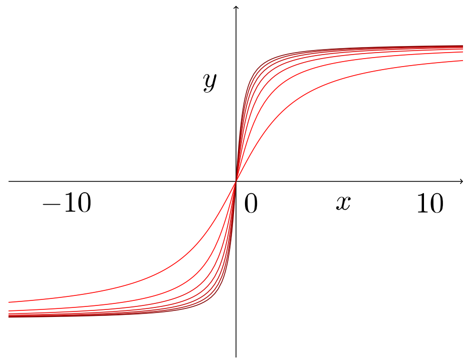
Keďže číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ závisí jednak na voľbe bodu $x \in I$, tak aj na voľbe čísla ε, príslušné n_0 môže byť rôzne pre rovnaké ε a rôzne $x \in I$.

Príklad 4.1. Znázornite niekoľko členov postupnosti funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a určte jej limitu.

a) $f_n(x) = n\sin(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$ b) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}$

Riešenie. Najskôr sa pozrieme na grafy postupností týchto funkcií, ktoré sú na Obrázku 4.1.





Obr. 4.1: Niekoľko členov postupnosti funkcií $n\sin(x)$ a $\operatorname{arctg}(nx)$.

Teraz určíme limity týchto dvoch postupností, teda funkcie, ku ktorým postupnosti bodovo konvergujú. Platí

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(x) = \begin{cases} \infty, & x \in (0,\pi), \\ 0, & x = \{\pm\pi, 0\}, \\ -\infty, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Bodovú konvergenciu radov funkcií definujeme ako bodovú konvergenciu postupnosti čiastočných súčtov určitého radu.

Definícia 4.4. Povieme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodovo konverguje* na intervale I, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pre všetky $x \in I$. *Súčtom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazývame funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$.

Je dobré pripomenúť, že v prípade funkcionálnych radov sú čiastočné súčty a rovnako aj samotný súčet funkciami premennej x. Ak rad konverguje, dosadením určitého čísla $x_0 \in D$ dostaneme číselný rad so súčtom $s_0 = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Množina D je najväčšia množina, na ktorej funkcionálny rad konverguje a nazývame ju *obor konvergencie* funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Príklad 4.2. Určte obor konvergencie nasledujúcich radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^x, \quad x \in \mathbb{R}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x, \quad x > 0$

Riešenie. Pri určovaní oboru konvergencie funkcionálneho radu považujeme x za parameter. Budeme postupovať tak, že vyriešime konvergenciu číselného radu pre rôzne hodnoty tohto parametru.

a) Konvergenciu radu vyšetríme napríklad limitným podielovým kritériom. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^x = \lim_{n\to\infty} (n+1)^x = \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Keďže rad podľa tohto kritéria konverguje pre hodnotu limity menšiu ako 1, vidíme, že konverguje pre $x < 0$, diverguje pre $x > 0$ a pre $x = 0$ nemôžeme o konvergencii rozhodnúť. Túto možnosť vyšetríme jednoducho dosadením bodu $x = 0$ do skúmaného radu. Dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^0 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$. Oborom konvergencie tohoto radu je teda interval $D = (-\infty, 0)$.

b) Pri tomto rade je lepšie využiť limitné odmocninové kritérium. Je tiež dobré si uvedomiť, že sa jedná o rad s ľubovoľnými členmi. Môžeme písať

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(\ln x)^n|} = \lim_{n\to\infty} |\ln x| = |\ln x|.$$

Aj v tomto prípade rad konverguje pre hodnotu limity menšiu ako 1, teda pre $|\ln x| < 1$. Táto nerovnosť platí pre $x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$. Opäť o konvergencii nemôžeme rozhodnúť pomocou tohto kritéria práve pre krajné body nášho intervalu. Vyšetrujeme ich teda zvlášť.

Pre bod $x = \mathrm{e}$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \mathrm{e} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$, ktorý diverguje. Ak je $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{1}{\mathrm{e}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, ktorý osciluje. Obor konvergencie je teda otvorený interval $D = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$.

Poznámka 8. Pri alternujúcich funkcionálnych radoch tiež využívame *Leibnizovo kritérium*, tak ako aj pri radoch číselných. Pomocou neho určíme hodnoty, ktoré by mal nadobúdať parameter x, aby rad konvergoval.

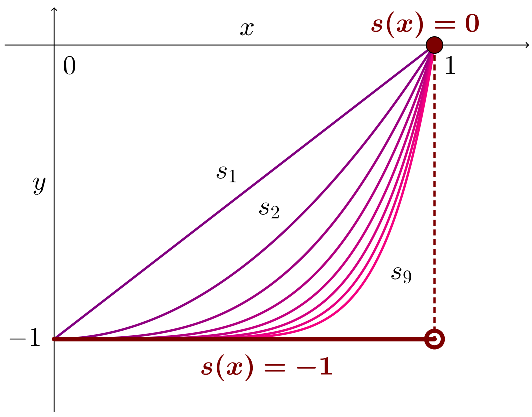
4.2 Rovnomerná konvergencia

Dostávame sa k veľmi dôležitému pojmu v oblasti postupností a radov funkcií. Hlavnou otázkou je, nakoľko sa prenášajú vlastnosti jednotlivých funkcií na limitnú funkciu, teda na súčet nekonečne mnoho týchto funkcií. Zrejmé je prenesenie vlastnosti akou je nezápornosť – súčet nezáporných funkcií je opäť nezáporná funkcia. Obdobné tvrdenie platí aj pre neklesajúce funkcie. Nasledujúci príklad ilustruje motiváciu zavedenia „silnejšieho“ typu konvergencie ako je bodová konvergencia, a to *rovnomernú konvergenciu.*

Príklad 4.3. Majme daný nekonečný funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde je postupnosť funkcií $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$, pričom $x \in [0,1]$. Každá funkcia je spojitá pre všetky x z intervalu $[0,1]$. Pre n-tý čiastočný súčet platí $s_n(x) = x - 1 + x^2 - x + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n - 1$ a jeho limita a teda súčet radu je

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - 1) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ -1, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Túto skutočnosť ilustruje aj Obrázok 4.2.



Obr. 4.2: Graf čiastočných súčtov radu spolu so súčtom radu

Vidíme, že aj keď funkcie $s_i = x^i - 1$ pre $i = 1, \ldots, n$ sú spojité na intervale $[0,1]$, ich súčet $s(x)$ už na tomto intervale spojitou funkciou nie je. Tento problém sme si mohli všimnúť už v Príklade 4.3. Pre zachovanie tejto dôležitej vlastnosti teda definujeme rovnomernú konvergenciu radu funkcií, ktorá je na to postačujúca. Najskôr zavedieme pojem rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií.

Definícia 4.5. Povieme, že postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje* k funkcii $f(x)$ na intervale I, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje celé kladné číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, ktoré je nezávislé na x tak, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pre akékoľvek $x \in I$ pričom $n \geq n_0$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na intervale I.

Rozdiel medzi bodovou a rovnomernou konvergenciou postupnosti funkcií je dobre viditeľný pri zápise pomocou kvantifikátorov. Definícia bodovej konvergencie je

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Definícia rovnomernej konvergencie je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Vidíme, že v definícii rovnomernej konvergencie je číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ závislé len na voľbe čísla $\varepsilon > 0$, nie na bode $x \in I$ ako je to v prípade bodovej konvergencie. Znamená to, že z rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií $\{f_n(x)\}$ k funkcii $f(x)$ na intervale I plynie aj bodová konvergencia tejto postupnosti k $f(x)$ na I, ale nie naopak.

Poznámka 9. V teórii metrických priestorov sme sa stretli s metrickým priestorom $(C[a,b],\rho_c)$ funkcií spojitých na intervale $[a,b]$, kde

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

nazývame *metrikou rovnomernej konvergencie* a $C[a,b]$ je množina spojitých reálnych funkcií na intervale $[a,b]$. Dá sa ukázať, že definícia metriky rovnomernej konvergencie je ekvivalentná s Definíciou 4.5, viď [1, strana 43]. Túto skutočnosť využijeme pri rozhodovaní o rovnomernej konvergencii postupnosti funkcií.

Príklad 4.4. Nájdite limitu a rozhodnite, či rovnomerne konverguje postupnosť funkcií

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n - x^{n+1}\}_{n=1}^{\infty},$$

na intervale $I = [0,1]$.

Riešenie. Platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^{n+1} - x^n) = \lim_{n\to\infty} x^n(x-1) = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

Postupnosť funkcií teda bodovo konverguje k funkcii $f(x) = 0$. Teraz prejdeme k vyšetreniu rovnomernej konvergencie. Využijeme skutočnosť, že v metrickom priestore $(C[a,b],\rho_c)$ postupnosť funkcií $f_n(x)$ konverguje k funkcii $f(x)$ na intervale I, ak $\rho_c(f_n(x), f(x))$ konverguje k nule pri $n \to \infty$ na intervale I. Podľa Poznámky 9 je táto konvergencia ekvivalentná rovnomernej konvergencii postupnosti funkcií $f_n(x)$ k funkcii $f(x)$ na intervale I. Keďže platí

$$\rho_c(f_n(x), f(x)) = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\underbrace{x^{n+1} - x^n}_{\varphi(x)}|,$$

musíme najskôr nájsť maximum tejto funkcie na danom intervale. Používame typický postup pre hľadanie absolútneho extrému, teda funkciu zderivujeme a položíme rovnú nule. Platí

$$\varphi'(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} = 0$$

pre $x = 0$ a pre $x = \frac{n}{n+1}$, pričom bod $x = 0$ je zároveň krajným bodom intervalu I. Keď dosadíme tieto body do funkcie $\varphi(x)$, pre bod $x = 0$ aj pre bod $x = 1$ dostávame hodnotu $\varphi(x) = 0$. Pre bod $x = \frac{n}{n+1}$ platí

$$\varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Je teda zrejmé, že maximum nastáva v bode $x = \frac{n}{n+1}$. Nesmieme zabúdať, že hľadáme maximum absolútnej hodnoty funkcie $\varphi(x)$, v tomto prípade však máme všetky tri hodnoty nezáporné. Na záver sa stačí pozrieť na konvergenciu metriky

$$\lim_{n\to\infty} \rho_c(f_n(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot 0 = 0.$$

Metrika rovnomernej konvergencie konverguje k nule a môžeme tvrdiť, že daná postupnosť je rovnomerne konvergentná na intervale $I = [0,1]$.

Rovnakým spôsobom, akým bola definovaná bodová konvergencia radu funkcií, definujeme aj rovnomernú konvergenciu funkcionálneho radu, a to ako rovnomernú konvergenciu postupnosti jeho čiastočných súčtov.

Definícia 4.6. Povieme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *rovnomerne konverguje* na intervale I ku svojmu súčtu $s(x)$, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k funkcii $s(x)$ na intervale I.

Geometrický význam rovnomernej konvergencie plynie z jej definície. Nutná a zároveň postačujúca podmienka rovnomernej konvergencie radu na intervale $I = [a,b]$ je, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje celé kladné číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, ktoré nezávisí na x tak, že platí

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Tento výraz je možné písať ako

$$s(x) - \varepsilon < s_n(x) < s(x) + \varepsilon.$$

Znamená to, že od určitého dostatočne veľkého indexu n_0 všetky ďalšie funkcie $s_n(x)$ v intervale I musia „ležať v epsilonovom okolí" limitnej funkcie $s(x)$, tj. v páse medzi funkciami $s(x) - \varepsilon$ a $s(x) + \varepsilon$.

4.2.1 Kritériá rovnomernej konvergencie

Na zistenie rovnomernej konvergencie postupností funkcií a funkcionálnych radov používame isté kritériá. Uvedieme si päť základných kritérii, pričom prvé dve majú teoretický význam v ďalších dôkazoch a nie sú príliš vhodné pre praktické použitie.

Lemma 4.1 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pre postupnosť funkcií). *Povieme, že postupnosť funkcií $f_n(x)$ rovnomerne konverguje na intervale I práve vtedy, keď k ľubovoľnému $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ existuje také kladné celé číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ nezávislé na x, že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pre všetky x z intervalu I.*

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [1, strana 45]. □

Lemma 4.2 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pre funkcionálne rady). *Funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ so svojim n-tým čiastočným súčtom $s_n(x)$ rovnomerne konverguje* *na intervale I práve vtedy, keď k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje taký index $n_0 \in \mathbb{N}$ nezávislý na x, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a ľubovoľný index $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \textit{teda} \quad \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(x) \right| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon,$$

pre akékoľvek x z intervalu I.

Dôkaz. Plynie z predchádzajúcej lemmy. Pripomeňme, že podľa Definície 4.6 funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje rovnomerne na I k svojmu súčtu $s(x)$ práve vtedy, keď jeho postupnosť čiastočných súčtov $s_n(x)$ k tomuto súčtu konverguje rovnomerne. Vieme, že toto je vďaka predchádzajúcej lemme splnené, práve vtedy, keď k ľubovoľném $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje kladné celé číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $m \geq n_0, n \geq n_0, m, n \in \mathbb{N}$ platí $|s_{n+m}(x) - s_n(x)| = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$, čo je aj tvrdenie tejto lemmy. □

Nasledujúce kritérium sa týka len absolútne konvergentných radov. V praxi je využívané najčastejšie.

Veta 4.3 (Weierstrassovo kritérium). *Nech $\{f_n(x)\}$ je postupnosť funkcií na intervale I. Ak pre všetky x z intervalu I a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n,$$

kde $\{a_n\}$ je postupnosť nezáporných čísel a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje rovnomerne na intervale I.

Dôkaz. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, k ľubovoľnému danému ε vieme nájsť $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre $n \geq n_0$ a ľubovoľné kladné celé číslo $m \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} < \varepsilon.$$

Pre všetky hodnoty $n \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$ a pre $x \in I$ platí

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i < \varepsilon.$$

Tvrdenie teraz plynie z Lemmy 4.2. □

Príklad 4.5. Pomocou Weierstrassovho kritéria rozhodnite o rovnomernej konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na intervale $I = [-1, 1]$.

Riešenie. Skutočnosť, že $x \in I$ môžeme zapísať aj ako $|x| \leq 1$. Pre všetky x z I platí

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ako sme dokázali predtým, rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. Preto podľa Weierstrassovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ rovnomerne konverguje na intervale $I = [-1, 1]$.

Nevýhoda Weierstrasovho kritéria spočíva v tom, že udáva len postačujúcu, nie však nutnú podmienku rovnomernej konvergencie. Pred uvedením ďalších dvoch kritérii zavedieme nasledujúce pojmy.

Definícia 4.7. Povieme, že postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$ je *nerastúca* (*neklesajúca*) na intervale I, ak je pre všetky $x_0 \in I$ číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}$ nerastúca (neklesajúca). Ak je funkcia neklesajúca alebo nerastúca na intervale I, nazývame ju *monotónna funkcia* na I.

Definícia 4.8. Povieme, že postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$ je *rovnomerne ohraničená* na intervale I, ak existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že platí $|f_n(x)| \leq k$ pre všetky $x \in I$ a všetky $n \in \mathbb{N}$.

Dôkazy nasledujúcich kritérii si nebudeme uvádzať, je možné ich nájsť v [5, strana 136].

Veta 4.4 (Abelovo kritérium). *Nech $\{f_n(x)\}$ a $\{g_n(x)\}$ sú postupnosti funkcií na intervale I, pričom $\{g_n(x)\}$ je monotónna na I. Ak je postupnosť $\{g_n(x)\}$ rovnomerne ohraničená na I a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovnomerne konverguje na I, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ rovnomerne konverguje na I.*

Veta 4.5 (Dirichletovo kritérium). *Nech $\{f_n(x)\}$ a $\{g_n(x)\}$ sú postupnosti funkcií na intervale I, pričom $\{g_n(x)\}$ je monotónna na I. Ak sú čiastočné súčty radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovnomerne ohraničené na interval I a postupnosť funkcií $\{g_n(x)\}$ rovnomerne konverguje k nule na I, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ rovnomerne konverguje na I.*

Spomenieme aj nasledujúce kritérium, ktoré je najjednoduchšie použiteľné kritérium pre rovnomernú konvergenciu postupnosti.

Veta 4.6. *Nech $\{f_n(x)\}$ je postupnosť funkcií na intervale I. Nech platí*

$$a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\, x \in I\}.$$

Postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$ rovnomerne konverguje k funkcii $f(x)$ na intervale I, práve vtedy, keď limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Tvrdenie priamo plynie z definície rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií. □

Príklad 4.6. Rozhodnite o rovnomernej konvergencii postupností

a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0,1]$ b) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}$

Riešenie. Najskôr sa pozrieme ako vyzerá postupnosť $\{a_n\}$ a potom určíme jej limitu.

a) Na určenie postupnosti $\{a_n\}$ je potrebné najskôr určiť limitnú funkciu postupnosti $f(x)$. Podľa Príkladu 4.4 vieme, že $\lim x^n - x^{n+1} = 0$ pre všetky $x \in [0,1]$. Keďže $a_n = \sup\{|x^n - x^{n+1}|; x \in [0,1]\} = 0$, podľa Vety 4.6 je postupnosť funkcií $\{a_n\}$ rovnomerne konvergentná na intervale $[0,1]$ a výsledok sa zhoduje s výsledkom z Príkladu 4.4.

b) Aj túto limitnú funkciu sme už určovali v Príklade 4.1. Vieme teda, že limita $\lim \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$. Keďže platí

$$a_n = \sup \left\{ \left| \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \right| ; x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{\pi}{2},$$

daná postupnosť nie je rovnomerne konvergentná na $\mathbb{R}$.

4.3 Vlastnosti rovnomerne konvergentných funkcionálnych postupností

Ako bolo spomenuté vyššie, zavedenie rovnomernej konvergencie funkcionálych postupností a radov bolo motivované práve potrebou prenášať ich vlastnosti na limitnú funkciu. Rovnomerná konvergencia je preto v tejto oblasti veľmi dôležitá. Uvedieme si najdôležitejšie vlastnosti, ktoré postupnosti a rady funkcií majú vďaka rovnomernej konvergencii. Začneme vlastnosťami postupností funkcií.

Veta 4.7. *Nech $\{f_n(x)\}$ je postupnosť funkcií, ktorá rovnomerne konverguje k funkcii $f(x)$ na intervale I. Ak sú všetky funkcie $f_n(x)$ na tomto intervale spojité, potom aj $f(x)$ je spojitá na I.*

Dôkaz. Nech $x_0 \in I$ ľubovoľný a $\varepsilon > 0$ ľubovoľné. K číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pričom pre všetky $x \in I$ a pre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Teda určite platí aj nerovnosť $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Keďže je funkcia f_{n_0} spojitá na I, je spojitá aj v bode x_0. To znamená, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ existuje okolie $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pre všetky $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$ platí $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pre všetky $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$ platí $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$, teda platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Týmto je dokázaná spojitosť funkcie f v ľubovoľnom bode $x_0 \in I$, teda aj jej spojitosť na celom intervale I. □

Príklad 4.7. Pozrieme sa na postupnosti funkcií z Príkladu 4.6, teda

a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0,1]$ b) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}$

V prvom prípade sme už ukázali, že postupnosť rovnomerne konverguje. Funkcie $x^n - x^{n+1}$ sú spojité a aj ich limitná funkcia je spojitá na intervale $[0,1]$, teda vidíme, že sa vďaka rovnomernej konvergencii táto vlastnosť preniesla.

Čo sa týka druhého prípadu, funkcie $\operatorname{arctg} nx$ sú opäť všetky spojité, tentoraz však ich limita spojitá nie je. Z toho vyplýva, že táto postupnosť nemôže byť rovnomerne konvergentná na $\mathbb{R}$.

Veta 4.8 (Diniho veta). *Nech $\{f_n(x)\}$ je monotónna postupnosť spojitých funkcií na I, ktorá bodovo konverguje k spojitej funkcii f na I. Potom postupnosť $\{f_n(x)\}$ rovnomerne konverguje k funkcii f na I.*

Dôkaz. Dôkaz nebudeme uvádzať, je možné ho nájsť v [5]. □

K týmto vetám je nutné povedať, že Veta 4.7 udáva postačujúcu podmienku pre prenesenie vlastnosti akou je spojitosť na limitnú funkciu. Veta 4.8 hovorí, že v prípade *monotónnych postupností* je predpoklad rovnomernej konvergencie nutný. Nasledujúce dve vety si uvedieme bez dôkazov, je možné ich nájsť v [1, strana 50].

Veta 4.9. *Majme postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$, ktorá rovnomerne konverguje k funkcii f na intervale $[a,b]$. Funkcia $f(x)$ je intergovateľná na $[a,b]$, ak sú všetky funkcie $f_n(x)$ integrovateľné na tomto intervale. Naviac platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Veta 4.10. *Majme postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$, ktorá konverguje na intervale I. Nech funkcie $f_n(x)$ majú deriváciu na otvorenom intervale I a postupnosť $\{f_n'(x)\}$ rovnomerne konverguje na I. Potom funkcia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ má deriváciu na intervale I. Naviac platí*

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

4.4 Vlastnosti rovnomerne konvergentných funkcionálnych radov

Prejdeme k vetám o vlastnostiach rovnomerne konvergentných radov. Tieto vety nájdu svoje použitia v ďalšej kapitole pri mocninových radoch. Ako uvidíme neskôr, majú veľký praktický význam.

Veta 4.11. *Majme rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ktorý rovnomerne konverguje na intervale I. Jeho súčet $s(x)$ je spojitá funkcia na I, ak sú všetky funkcie $f_n(x)$ spojité na intervale I.*

Dôkaz. Označme $\{s_n(x)\}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Predpoklad hovorí, že postupnosť funkcií $s_n(x)$ rovnomerne konverguje k funkcii $s(x)$. Podľa Vety 4.7 je funkcia $s(x)$ spojitá, ak sú spojité všetky funkcie $s_n(x)$. Keďže každá funkcia $s_n(x)$ je spojitá na intervale I, pretože ide o súčet konečného počtu spojitých funkcií na I, tento predpoklad je splnený. Tým je veta dokázaná. □

Veta 4.12. *Majme rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ktorý rovnomerne konverguje na intervale $[a,b]$ k svojmu súčtu $s(x)$. Funkcia $s(x)$ je integrovateľná na intervale $[a,b]$, ak sú všetky funkcie $f_n(x)$ integrovateľné na tomto intervale. Naviac platí*

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Označme $\{s_n(x)\}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Predpoklad hovorí, že postupnosť funkcií $s_n(x)$ rovnomerne konverguje k funkcii $s(x)$ na intervale $[a,b]$. Podľa Vety 4.9 je funkcia $s(x)$ integrovateľná na $[a,b]$, ak sú integrovateľné všetky funkcie $s_n(x)$. Keďže súčet konečne mnoho integrovateľných funkcií, je opäť integrovateľná funkcia, predpoklad je splnený. Naviac podľa tejto vety je

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tým je veta dokázaná. □

Veta 4.13. *Majme rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ktorý konverguje na intervale I, pričom postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}$ má deriváciu na otvorenom intervale I. Nech ďalej rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ rovnomerne konverguje na tomto intervale. Potom súčet radu $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má deriváciu na intervale I. Naviac platí*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Dôkaz. Označme $\{s_n(x)\}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Predpoklad hovorí, že postupnosť funkcií $s_n(x)$ konverguje na I a postupnosť funkcií $s_n'(x)$ rovnomerne konverguje na tomto intervale. Podľa Vety 4.10 má na základe týchto predpokladov funkcia $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ deriváciu na intervale I. Naviac platí $s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} (f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Týmto je tvdenie dokázané. □

Cvičenie 4

4.1 Znázornite niekoľko členov postupností funkcií $\{f_n(x)\}$ a určte ich limitu.

a) $f_n(x) = \arcsin nx, \quad x \in [-1,1]$

b) $f_n(x) = n \ln x, \quad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{3nx+2}, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $f_n(x) = \cos \dfrac{x}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi]$

4.2 Určte obor konvergencie nasledujúcich funkcionálnych radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}, \quad x > 0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\ln x}}, \quad x > 0$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$

Rada: v prípade a) použite vzorec $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

4.3 Určte limitu postupností funkcií $\{f_n(x)\}$ a rozhodnite, či rovnomerne konvergujú na intervale I.

a) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \quad I = [0, \infty)$

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \quad I = [1,3]$

d) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}, \quad I = \mathbb{R}$

4.4 Weierstrassovým kritériom dokážte rovnomernú konvergenciu radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\mathrm{e}^n}, \quad I = \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad I = \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2}, \quad I = \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad I = \mathbb{R}$

Kapitola 5

Mocninové rady

Túto kapitolu venujeme mocninovým radom, jedným z najdôležitejších prípadov funkcionálnych radov. Mocninové rady sú vlastne rady, ktorých postupnosť funkcií tvoria mocninové funkcie $f_n(x) = a_n x^n$. Tieto rady slúžia na aproximáciu funkcie v okolí bodu $x = 0$. V tejto kapitole ukážeme niektoré dôležité funkcie vyjadrené práve pomocou mocninových radov. Ich praktický význam si ilustrujeme na príkladoch. Zdrojmi pre túto kapitolu sú [1], [2], [3], [4], [7] a [11] .

5.1 Obor konvergencie

Dôležitým pojmom, ktorý budeme využívať je obor konergencie mocninových radov. Ešte predtým si ale tieto rady zadefinujeme.

Definícia 5.1. Funkcionálny rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a x_0 je ľubovoľné reálne číslo, nazývame *mocninový rad* so stredom v bode x_0.

Poznámka 10. Mocninový rad so stredom v bode $x_0 = 0$ je rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Budeme uvažovať práve takéto rady, keďže substitúciou $y = x - x_0$ sa dá mocninový rad so stredom x_0 previesť na mocninový rad so stredom v počiatku.

Veta 5.1. *Ak platí*

$$a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|},$$

potom mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pre $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pre $|x| > \frac{1}{a}$.

Táto veta hovorí, že ku každému mocninovému radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je možné vypočítať číslo $r = \frac{1}{a}$, také, že tento rad absolútne konverguje pre $x \in (-r, r)$, inak diverguje. Konvergenciu radu v krajných bodoch tohoto intervalu je treba vyšetriť pre každý mocninový rad zvlášť.

Definícia 5.2. Číslo $r = \frac{1}{a}$ sa nazýva *polomer konvergencie* mocninového radu a interval $(-r, r)$ sa nazýva *konvergenčný interval*. Konvergenčný interval spolu s prípadnými krajnými bodmi r a $-r$, v ktorých rad konverguje nazývame *obor konvergencie mocninového radu.*

Poznámka 11. Vzorec pre určenie polomeru konvergencie, teda vzorec $r = \frac{1}{a}$, kde $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ sa nazýva *Cauchyov–Hadamardov vzorec.*

Pri určovaní konvergenčného oboru môžu nastať dva špeciálne prípady, a to $a = 0$ a $a = \infty$. V prvom prípade hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ vždy konverguje. Jeho polomer konvergencie definujeme ako $r = \infty$ a jeho konvergenčný interval je $(-\infty, \infty)$, teda celé $\mathbb{R}$.

V prípade, keď $a = \infty$, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ vždy diverguje. Jeho polomer konvergencie definujeme ako $r = 0$, teda konvergenčný interval neexistuje. Treba poznamenať, že každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentný v bode $x = 0$.

Dôkaz. Najskôr dokážeme tvrdenie Vety 5.1, následne aj špeciálne prípady spomenuté vyššie. Dôkaz urobíme za predpokladu, že existuje $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Tento predpoklad je silnejší a zároveň je vďaka nemu dôkaz lepšie zrozumiteľný. Majme ľubovoľné pevné číslo $x \neq 0$. Z predchádzajúceho vieme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ absolútne konverguje podľa odmocninového kritéria pre všetky x, pre ktoré platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|a < 1.$$

To znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ absolútne konverguje pre $|x| < \frac{1}{a}$, teda $|x| < r$. Pre náš prvý špeciálny prípad $a = 0$ máme $|x|a = 0$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ preto konverguje absolútne v ľubovoľnom bode x. Pre hodnotu $a = \infty$ je $|x|a = \infty$ pre všetky $x \neq 0$, preto rad diverguje pre každé $x \neq 0$. □

Poznámka 12. Polomer konvergencie sa dá určiť nielen ako $r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ ale aj ako $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Vyplýva to z Vety 2.5, ktorá hovorí, že ak existuje limita $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, potom existuje aj limita $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, pričom tieto limity sa rovnajú.

Príklad 5.1. Určte polomer konvergencie a následne aj obor konvergencie nasledujúcich mocninových radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n$, $\quad \alpha \in [0, \infty)$.

Riešenie. a) V tomto prípade máme $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Polomer konvergencie teda je

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Konvergenčný interval je preto interval $(-1,1)$. Ako bolo spomenuté vyššie, treba krajné body vyšetriť zvlášť. Pre bod $x=-1$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ o ktorom z Príkladu 2.5 vieme, že diverguje. Dosadením bodu $x=1$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, ktorý podľa Leibnizovho kritéria konverguje. Obor konvergencie tohto mocninového radu je teda interval $(-1,1]$.

b) Tentoraz máme $a_n = \alpha^{n^2}$. Keďže

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \in [0,1). \end{cases}$$

Príklad sa nám teda rozpadol na tri prípady.

Ak je $\alpha > 1$, polomer konvergencie je $r = \frac{1}{a} = \frac{1}{\infty} = 0$. Nastáva teda prípad, kedy obor konvergencie neexistuje.

Ak je $\alpha = 1$, polomer konvergencie je $r = \frac{1}{a} = 1$. Konvergenčný interval je $(-1,1)$ a opäť treba vyšetriť krajné body. Pre bod $x=1$ a našu $\alpha = 1$ máme rad $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$, ktorý diverguje. Pre bod $x=-1$ dostávame opäť divergentný rad $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Obor konvergencie je teda rovnaký ako konergenčný interval $(-1,1)$.

Ak je $\alpha \in [0,1)$ polomer konvergencie je $r = \frac{1}{a} = \frac{1}{0} = \infty$. Nastáva ďalší špeciálny prípad, kedy je obor konvergencie $(-\infty,\infty)$.

5.2 Vlastnosti mocninových radov a ich súčet

V tomto odstavci uvedieme základné a dôležité vlastnosti mocninových radov, ktoré majú veľké praktické využitie.

Veta 5.2. *Nech mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$. Rad potom konverguje rovnomerne na každom intervale $[-\rho,\rho]$, ktorý leží v intervale $(-r,r)$.*

Dôkaz. Nech $x \in [-\rho,\rho]$ tak, že $0 < \rho < r$. Pretože $|x| \le \rho$, platí

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \le |a_n|\rho^n.$$

Podľa Weierstrassovho kritéria mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rovnomerne konverguje na intervale $[-\rho,\rho]$, ak konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$. Konvergencia tohto radu plynie z Vety 5.1 a veta je dokázaná. □

Veta 5.3. *Nech mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$. Jeho súčet $s(x)$ predstavuje na intervale $(-r,r)$ spojitú funkciu.*

Dôkaz. Spojitosť súčtu $s(x)$ plynie z predchádzajúcej vlastnosti, teda že pre ľubovoľný bod x_0 z intervalu $(-r,r)$ existuje $0 < \rho < r$ a bod $x_0 \in [-\rho,\rho]$, a z Vety 4.11. Keďže funkcie $a_n x^n$ sú všetky spojité na $\mathbb{R}$, aj súčet $s(x)$ je spojitá funkcia na intervale $[-\rho,\rho]$. Keďže je spojitá na tomto intervale, je spojitá aj v ľubovoľnom x_0 a teda aj na intervale $(-r,r)$. □

Veta 5.4. *Nech mocninový rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$.*

(i) Pre všetky $x \in (-r, r)$ platí, že derivácia súčtu radu je rovná súčtu derivácií jednotlivých členov radu, teda

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'.$$

(ii) Pre všetky $x \in (-r, r)$ platí, že integrál súčtu radu je rovný súčtu integrálov jednotlivých členov radu, teda

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t.$$

Rady vzniknuté integrovaním a derivovaním majú rovnaký polomer konvergencie ako pôvodné rady.

Poznámka 13. Tieto tvrdenia nám umožňujú integrovať a derivovať mocninový rad „člen po člene“, teda je možné pre funkcie $f_n(x) = a_n x^n$ zobecniť vzorce pre integráciu, resp. deriváciu súčtu funkcií na nekonečný súčet.

Dôkaz. Najskôr dokážeme tvrdenie (i). Ukážeme, že rad vzniknutý derivovaním má rovnaký polomer konvergencie ako rad pôvodný. Derivovaním dostaneme rad $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Určíme jeho polomer konvergencie r_1 na základe Vety 5.1 ale opäť pri silnejšom predpoklade existencie limity $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Pretože

$$a_1 = \lim \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \underbrace{\lim \sqrt[n-1]{n}}_{=1} \cdot \lim \sqrt[n-1]{|a_n|} = a,$$

dostávame aj $r_1 = r$, oba rady teda majú rovnaký polomer konvergencie. Dôkaz celého tvrdenia teraz vyplýva z Vety 5.2 a Vety 4.13.

Tvrdenie (ii) dokážeme obdobne. Integrovaním dostaneme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Určíme jeho polomer konveregencie r_1 na základe tej istej vety, ako v prípade derivovania. Pretože

$$\lim \sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim \frac{\sqrt[n+1]{|a_n|}}{\sqrt[n+1]{n+1}} = a_1,$$

dostávame aj $r_1 = r$. Tvrdenie teraz plynie z Vety 5.2 a Vety 4.12. □

Príklad 5.2. Určte polomer konvergencie a súčet mocninového radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$. Pomocou neho vypočítajte súčet číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n-1}}$.

Riešenie. Polomer konvergencie máme $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Teda mocninový rad bude konvergovať pre každé x z intervalu $(-1, 1)$. Teraz počítajme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} x\right)' =$$
$$= \left(x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n x\right)'\right)' = \left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

V našom prípade je $x = \frac{1}{3}$ a súčtom číselného radu je teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n-1}} = \frac{9}{2}.$$

Príklad 5.3. Určte polomer konvergencie a súčet mocninového radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Pomocou neho vypočítajte súčet číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$.

Riešenie. Polomer konvergencie máme $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n+1}{n} = 1$. Mocninový rad opäť konverguje pre každé x z intervalu $(-1, 1)$. Tentokrát využijeme vetu a integrovaní radu člen po člene. Počítajme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x).$$

V tomto prípade je $x = \frac{1}{2}$, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n} = \ln\frac{3}{2}.$$

5.3 Taylorov rad

V tomto odstavci si ukážeme, ako rozvinúť danú funkciu do mocninového radu, tzv. *Taylorovho radu*. Jedná sa o opačný prípad ako v predchádzajúcom texte, kde sme k danému mocninovému radu hľadali súčet. Rozvoj funkcií má veľký význam, ktorý ilustrujeme na príkladoch v ďalšej kapitole.

Najskôr pripomenieme Taylorovu vetu z diferenciálneho počtu. Predpokladajme, že funkcia f má na uzavretom intervale I, ktorého krajné body sú x a x_0, derivácie všetkých rádov. Potom podľa tejto vety platí

$$f(x) = \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] + R_n(x),$$

kde $R_n(x)$ je Taylorov zvyšok pre ktorý platí

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Číslo ξ je vhodné číslo ležiace medzi x a x_0. Teraz prejdeme k definícii Taylorovho radu.

Definícia 5.3. Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 derivácie všetkých rádov. Mocninový rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame *Taylorov rad* funkcie f v bode x_0. Taylorov rad v bode $x_0 = 0$ nazývame *Maclaurinov rad* a je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Nemôžeme obecne povedať, že súčet Taylorovho radu funkcie je tejto funkcii rovný. Ako príklad môže slúžiť funkcia $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. Táto funkcia má v bode $x_0 = 0$ všetky derivácie rovné nule, teda $f^{(n)}(0) = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, viď [11]. Jej Taylorov rad má preto súčet $s = 0$. Tento súčet sa zrejme nerovná funkcii $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

Veta 5.5. *Nech má funkcia $f(x)$ v bode x_0 derivácie všetkých rádov. Je možné ju rozvinúť do Taylorovho radu, teda platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

na intervale I práve vtedy, keď pre všetky $x \in I$ je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Dôkaz. Označme súčet v lomených zátvorkách zo vzťahu ako $s_n(x)$. Veta platí práve vtedy, keď $\lim s_n(x) = f(x)$. Keďže $s_n(x) = f(x) - R_n(x)$, toto nastane práve vtedy, keď $\lim f(x) - R_n(x) = f(x) - \lim R_n(x) = f(x)$, teda $\lim R_n(x) = 0$ na intervale I. □

Veta 5.6 (Jednoznačnosť rozvoja do mocninového radu). *Ak je možné rozvinúť funkciu $f(x)$ na intervale I, ktorý obsahuje bod x_0 do mocninového radu tvaru*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

potom je takýto rozvoj jediný a súčasne je Taylorovým rozvojom danej funkcie $f(x)$.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [12, strana 50]. □

Teraz si uvedieme niekoľko najdôležitejších Maclaurinových rozvojov elementárnych funkcií. Pre všetky tieto rozvoje, presnejšie pre ich príslušné zvyšky platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, viď [1, strana 68] alebo [12, strana 51], teda je splnená podmienka Vety 5.5. Vzorce sú zhrnuté v nasledujúcej Tabuľke 5.1 .

Funkcia	Maclaurinov rozvoj		Obor konvergencie
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$
$(1+x)^a$	$1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad a \in \mathbb{R}$	$x \in (-1, 1)$

Tabuľka 5.1: Maclaurinov rozvoj vybraných funkcií

Poznámka 14. Číslo

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

pri rozvoji funkcie $(1+x)^a$ nazývame *binomický koeficient*.

Príklad 5.4. Rozviňte do Maclaurinovho radu nasledujúce funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$, b) $f(x) = x^2 \cos 2x$, c) $f(x) = \arcsin x$.

Riešenie. a) Pomôžeme si rozvojom funkcie e^x. V našom prípade položme $t = -x^2$. Maclaurinov rozvoj je teda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$. Celkovo teda rozvoj našej funkcie je

$$x\mathrm{e}^{-x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

b) V tomto prípade volíme ako substitúciu $t = 2x$ a použijeme rozvoj funkcie $\cos x$. Platí

$$x^2 \cos 2x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n+2}}{(2n)!}.$$

c) Využijeme skutočnosť, že $\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$. Opäť položme $t = -x^2$, teda $\arcsin x = \int (1+t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$. Urobíme najskôr Maclaurinov rozvoj tejto funkcie. Určíme binomický koeficient

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} = (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!}.$$

Teraz môžeme počítať

$$\arcsin x = \int (1+t)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^n \mathrm{d}t,$$

dosadením za t dostaneme

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} (-x^2)^n \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \int x^{2n} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ďalšia možnosť, ako môžeme túto funkciu zapísať je

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Poznamenajme, že výraz $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$ nazývame *dvojitý faktoriál*.

Príklad 5.5. Rozviňte podľa definície do Taylorovho radu so stredom v bode $x_0 = 2$ funkciu $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Riešenie. Najskôr určtíme n-tú deriváciu funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bode $x_0 = 2$. Platí

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x^{-3} \\ f''(x) &= 6x^{-4} \\ f'''(x) &= -24x^{-5} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}},\end{aligned}$$

teda n-tá derivácia funkcie $f(x)$ v bode $x_0 = 2$ je

$$f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}.$$

Pripomeňme, že Taylorov rad je rad tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Dosadením do radu dostaneme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(x-2)^n}{2^{n+2}}.$$

Cvičenie 5

5.1 Určte polomer a obor konvergencie mocninových radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+3)^n.$

5.2 Určte polomer a súčet mocninových radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

5.3 Na základe predchádzajúcich výsledkov určte súčet nasledujúcich číselných radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n-1}(4n-1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}n(n+1)}$

5.4 Rozviňte do Maclaurinovho radu nasledujúce funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

b) $f(x) = \sin 4x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$

5.5 Rozviňte nasledujúce funkcie $f(x)$ podľa definície do Taylorovho radu so stredom v bode x_0.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad x_0 = -3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \quad x_0 = -1.$

Kapitola 6

Aplikácia mocninových radov

V tejto kapitole sa pozrieme na niektoré z najdôležitejších aplikácií mocninových radov. Môžeme pomocou nich vypočítať približnú hodnotu funkcií, uľahčia nám aj výpočet integrálov, limít a diferenciálnych funkcií.

6.1 Približný výpočet hodnôt funkcií

Príklad 6.1. Určte približnú funkčnú hodnotu nasledujúcich funkcií $f(x)$ s pomocou prvých n nenulových členov.

a) $f(x) = (1{,}43)^{2{,}7}, \quad n = 4$

b) $f(x) = \sqrt[4]{86}, \quad n = 3$

Riešenie. V obidvoch prípadoch budeme využívať Maclaurinov rozvoj funkcií z Tabuľky 5.1.

a) Tentoraz využijeme Maclaurinov rad pre funkciu $(1+x)^a$, kde $a = 2{,}7$ a $x = 0{,}43$. Platí

$$\begin{aligned}(1{,}43)^{2{,}7} &= 1 + \binom{2{,}7}{1}0{,}43 + \binom{2{,}7}{2}0{,}43^2 + \binom{2{,}7}{3}0{,}43^3 \\ &= 1 + 2{,}7 \cdot 0{,}43 + \frac{2{,}7 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 0{,}43^2 + \frac{2{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}7}{3 \cdot 2} \cdot 0{,}43^3 \\ &\doteq 2{,}6279.\end{aligned}$$

b) Na túto funkciu je opäť vhodný Maclaurinov rozvoj funkcie $(1+x)^a$. Ale keďže máme naše $x = 85$, vidíme, že nepatrí do intervalu konvergencie tohto radu. Je potrebné funkciu upraviť, aby naše x bolo z intervalu $(-1,1)$. Upravujeme

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4 + 5} = \sqrt[4]{3^4\left(1 + \frac{5}{3^4}\right)} = 3\left(1 + \frac{5}{81}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Vidíme, že $a = \frac{1}{4}$ a $x = \frac{5}{81}$ a dosadíme, teda

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{86} &= 3\left[1 + \binom{\frac{1}{4}}{1} \cdot \frac{5}{81} + \binom{\frac{1}{4}}{2} \cdot \left(\frac{5}{81}\right)^2\right] \\ &= 3\left[1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{81} + \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{2} \cdot \left(\frac{5}{81}\right)^2\right] \\ &\doteq 3{,}0452.\end{aligned}$$

V prípade určovania približných hodnôt funkcií je často požadovaná veľkosť chyby, ktorej sa môžme dopustiť.

Príklad 6.2. Určte približné hodnoty funkcií $f(x)$ s chybou menšou ako ε.

a) $\operatorname{arctg} 0{,}45, \quad \varepsilon = 10^{-4}$

b) $\arcsin 0{,}5, \quad \varepsilon = 10^{-5}$

Riešenie. Využijeme vety o odhade veľkosti zvyšku R_n, tj. Vetu 3.7 a Vetu 3.8.

a) Najskôr musíme odvodiť Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$. Využijeme fakt, že $\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $t = x^2$ a $a = (-1)$. Rozvoj funkcie teda je

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

K tomuto vyjadreniu sme sa mohli dostať aj inak. Stačí si uvedomiť, že výraz $\frac{1}{1+x^2}$ je súčet geometrickej rady s kvocientom $-x^2$. Funkciu $\operatorname{arctg} x$ teda môžeme písať ako

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

Vidíme, že tento rad je alternujúci, pričom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, keďže $x \in (-1,1)$. Je tiež zrejmé, že postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerastúca a môžme využiť Vetu 3.7, takže platí $|R_n| \leq a_{n+1}$. Znamená to, že ak vezmeme z rozvoja prvých n členov, bude chyba menšia ako $(n+1)$-vý člen. Keďže člen $a_5 = \frac{0{,}5^9}{9} < 10^{-4}$, vezmeme prvé štyri členy. Výsledná hodnota je

$$\operatorname{arctg} 0{,}45 \doteq 0{,}45 - \frac{0{,}45^3}{3} + \frac{0{,}45^5}{5} - \frac{0{,}45^7}{7} \doteq 0{,}42278.$$

b) Rozvoj funkcie $\arcsin x$ sme odvodili už v Príklade 5.4. Vieme, že tentoraz rad nie je alternujúci, čo znamená, že pre určenie veľkosti chyby musíme použiť Vetu 3.8. Pre zbytok radu teda platí $|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}$. Najskôr určíme q zo vzťahu

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)(2n-1)!! \cdot 0{,}5^{2n+3} \cdot 2^n n!(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)n!(2n+3)(2n-1)!!0{,}5^{2n+1}}$$
$$= \frac{(2n+1)^2 0{,}5^2}{(2n+2)(2n+3)}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}.$$

Pretože výraz

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}}_{<1} < \frac{1}{4} < 1,$$

môžeme zvoliť $q = \frac{1}{4}$. Teraz využijeme q pri výpočte R_n. Má platiť $|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}$, teda

$$|R_n| \leq \frac{(2n-1)!!0{,}5^{2n+1}}{2^n n!(2n+1) \cdot 3} < 10^{-5}.$$

Toto je splnené pre $n = 4$, čiže člen a_5 (n číslujeme od nuly). Výsledná hodnota teda je

$$\arcsin 0{,}5 \doteq 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}5^3}{3} + \frac{3}{2^2 2!} \cdot \frac{0{,}5^5}{5} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 3!} \cdot \frac{0{,}5^7}{7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 4!} \cdot \frac{0{,}5^9}{9} \doteq 0{,}52358.$$

Na určovanie približnej hodnoty logaritmov sme odvodili Maclaurinov rad $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. Avšak pri výpočte hodnoty napríklad $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, by sme k dosiahnutiu presnosti na 4 desatinné miesta potrebovali asi 10^5 členov. Je teda praktické nájsť iný rad, ktorý konverguje rýchlejšie. Takýmto radom je rozvoj funkcie $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right)$, viď [11]. Tento rad je potrebné použiť aj vtedy, ak je x mimo svojho intervalu konvergencie $(-1,1)$.

Príklad 6.3. Určte približnú hodnotu funkcie $f(x) = \frac{1}{2}\ln 3$, pomocou prvých 5 nenulových členov a odhadnite chybu.

Riešenie. Použijeme rozvoj funkcie $\ln\frac{1+x}{1-x}$. Najskôr určíme x. Keďže má platiť $\frac{1+x}{1-x} = 3$, dostávame $x = \frac{1}{2}$. Dosadením do spomínaného rozvoja funkcie dostávame

$$\frac{1}{2}\ln 3 \doteq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \frac{1}{2^7 \cdot 7} + \frac{1}{2^9 \cdot 9} \doteq 0{,}5492.$$

Určíme veľkosť chyby podľa Vety 3.8. Keďže platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_5}{a_4} = 0{,}1944 \leq q < 1,$$

môžeme zvoliť $q = 0{,}2$. Veľkosť chyby teda je

$$|R_4| \leq |a_4|\frac{0{,}2}{1-0{,}2} = \frac{0{,}5^7}{7} \cdot \frac{1}{4} = 2{,}79 \cdot 10^{-4}.$$

Veľkosť chyby malá a môžeme povedať, že funkčná hodnota je dobre aproximovaná.

6.2 Približný výpočet integrálov

V integrálnom počte sa môžeme stretnúť aj s integrálmi funkcií, ktoré nevieme vypočítať žiadnou známou integračnou metódou. Sú to funkcie, ktorých primitívnu funkciu nie je možné vyjadriť pomocou elementárnej funkcie, tzv *transcendentné funkcie*. Práve pri takýchto funkciách môžeme využiť vyjadrenie pomocou mocninových radov.

Príklad 6.4. Vyjadrite nasledujúce neurčité integrály pomocou momcninových radov.

a) $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Riešenie. Obe funkcie sú vyššie transcendentné funkcie.

a) Rozvoj funkcie e^{-x^2} sme určili v Príklade 5.4. Keď sumu rozpíšeme člen po člene dostaneme

$$x\mathrm{e}^{-x^2} = x - x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{6} + \dots .$$

Integráciou člen po člene dostávame

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{12} - \frac{x^8}{48} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)n!}.$$

b) Použijeme rozvoj funksie $\sin x$. Platí

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots .$$

Opäť integrovaním radu člen po člene dostaneme

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Príklad 6.5. Pomocou prvých 4 nenulových členov určte hodnotu nasledujúcich určitých integrálov funkcií.

a) $\int_{0,3}^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$

Riešenie. a) Najskôr určíme rozvoj funkcie. Platí

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \dots .$$

Integráciou dostaneme

$$\int_{0,3}^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \doteq \left[x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112}\right]_{0,3}^1 \doteq 0{,}846153.$$

b) Rozvoj funkcie je

$$\frac{1}{x}\ln(1-x^2) = -x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} - \dots .$$

(Overte sami.) Integrujeme člen po člene a dostaneme

$$\int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x \doteq \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} - \frac{x^8}{32}\right]_0^{0,5} \doteq -0{,}1338025.$$

6.3 Výpočet limít

Pri výpočte limít je niekedy veľmi výhodné využitie rozvoja funkcií do mocninových radov.

Príklad 6.6. Vypočítajte hodnoty daných limít.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^5} - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$

Riešenie. a) Rozvoj funkcie $\operatorname{arctg} x$ sme už vypočítali v Príklade 6.2. Pre zadanú funkciu teda dostávame

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \dots\right) = 1.$$

b) Využijeme rozvoj funkcií $\sqrt[3]{1+x^5}$ a $\sqrt{1+x^2}$. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^5} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\left(1 + \frac{x^5}{3} - \frac{x^{10}}{9} + \dots\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^5}{3} + \dots\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \dots\right) = -\frac{1}{2}.$$

Pri výpočte oboch limít v záverečnom kroku dostávame limitu typu $0 \cdot \infty$, čo je neurčitý výraz. Náš rozvinutý rad však môžme aproximovať konečným Taylorovým radom a jeho zvyškom $R_n(x)$.

6.4 Výpočet diferenciálnych rovníc

Pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou mocninových radov uvažujeme, že riešenie je v tvare $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Bez újmy na obecnosti môžeme uvažovať, že $x_0 = 0$.

Príklad 6.7. S využitím mocninových radov riešte nasledujúce diferenciálne rovnice.

a) $y'' + y = 0$ b) $y'' + xy' = 0$

Riešenie. Pri oboch rovniciach musíme využiť derivácie druhého rádu. Pre obecné riešenie a jeho derivácie platí

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

a) Najskôr tieto výrazy dosadíme do diferenciálnej rovnice a dostávame

$$2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \cdots + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Sčítaním koeficientov pri rovnakých členoch dostaneme

$$(2a_2 + a_0) + x(2 \cdot 3a_3 + a_1) + \cdots + x^{n-2}[(n-1)na_n + a_{n-2}] + \cdots = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že $n(n-1)a_n + a_{n-2}$, teda

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}. \tag{6.1}$$

Z tohoto výrazu vidíme, že určenie koeficientov a_n závisí na voľbe a_0 a a_1. Uvažujeme teda dva prípady.

Nech $a_0 = 0$ a $a_1 \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Zo vzťahu (6.1) plynie, že $a_{2n} = 0$ pre každé n a rad obsahuje len nepárne členy. Pre tieto platí

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n(2n+1)}.$$

Členmi tejto postupnosti sú

$$a_1, \quad a_3 = -\frac{1}{3!} a_1, \quad a_5 = -\frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{5!} a_1, \ldots$$

Riešením rovnice teda je

$$a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right).$$

Naopak nech $a_1 = 0$ a $a_0 \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Tentoraz zo vzťahu (6.1) plynie, že $a_{2n+1} = 0$ pre všetky n a rad obsahuje len párne členy. Pre tieto platí

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n-1)}.$$

Členmi tejto postupnosti sú

$$a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{4!}a_0, \ldots$$

Riešenie v tomto prípade je

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right).$$

Celkovo je riešenie rovnice

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

b) Postupujeme obdobne. Dosadíme výrazy do diferenciálnej rovnice

$$2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots$$
$$+ x\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots\right) = 0,$$

upravíme a dostaneme

$$2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots$$
$$+ a_1x + 2a_2x^2 + \cdots +)(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Sčítaním koeficientov pri rovnakých členoch dostaneme

$$2a_2 + x(2 \cdot 3a_3 + a_1) + \cdots + x^{n-2}[n(n-1)a_n + (n-2)a_{n-2} + \ldots] = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$a_n = -(n-2)\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

Vidíme, že určenie koeficientov opäť závisí na voľbe a_0 a a_1.

Nech je $a_0 = 0$ a $a_1 \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Opäť platí, že $a_{2n} = 0$ a rad obsahuje len nepárne členy. Pre tieto platí

$$a_{2n+1} = -(2n-1)\frac{a_{2n-1}}{2n(2n+1)} = \cdots = (-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Riešenie rovnice teda je

$$y = a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots\right).$$

Naopak nech je $a_1 = 0$ a $a_0 \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Tentoraz vidíme, že $a_{2n+1} = 0$ a rad obsahuje len párne členy. Pre tieto platí

$$a_{2n} = -(2n-2)\frac{a_{2n-2}}{2n(2n-1)}.$$

Členmi tejto postupnosti sú

$$a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_4 = 0\dots.$$

Znamená to, že pre ľubovoľné $a_0 \in \mathbb{R}$ je $a_2 = a_4 = \cdots = 0$. Riešením rovnice teda je

$$y = a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots\right) + a_0.$$

Cvičenie 6

6.1 Určte približnú hodnotu funkcií $f(x)$ pomocou n nenulových členov alebo chybou menšou ako ε.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^3}}{3}, \quad n = 8$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} 25^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-5}$

d) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2}{5}, \quad n = 3$

e) $f(x) = \ln 1{,}17, \quad n = 5$

f) $f(x) = \ln 4, \quad \varepsilon = 10^{-2}$

g) $f(x) = \sqrt[6]{70}, \quad n = 3$

h) $f(x) = 0{,}9^{0{,}9}, \quad n = 3$

6.2 Určte približnú hodnotu nasledujúcich výrazov pomocou prvých n nenulových členov.

a) $\displaystyle\int_{0{,}5}^{0{,}9} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad n = 5$

b) $\displaystyle\int_{1{,}2}^{1{,}5} \frac{\sin x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x, \quad n = 4$

c) $\displaystyle\int_{-0{,}1}^{0{,}3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x, \quad n = 3$

d) $\displaystyle\int_{0{,}4}^{0{,}6} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)\mathrm{d}x, \quad n = 4$

6.3 Určte nasledujúce limity.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt[4]{1+x^5}}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{tg}^2 x - x^3}{x^5}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \frac{1}{3}x^4}{x^2}$

6.4 Určte riešenie diferenciálnych rovníc pomocou mocninových radov.

a) $y'' + xy' + y = 0$

b) $y'' = \dfrac{1}{2}y$

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1 a) nemôže konvergovať b) môže konvergovať

1.2 a) $\frac{1}{3}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) -21

1.3 a) $\frac{79}{90}$ b) $-\frac{613}{165}$

Kapitola 2

2.1 a) [porovnávacie] konverguje,
b) [lim. odmocninové] diverguje,
c) [lim. podielové] diverguje,
d) [lim. odmocninové] konverguje,
e) [lim. podielové] konverguje,
f) [porovnávacie] diverguje,
g) [lim. porovnávacie] diverguje,
h) [lim. podielové] konverguje.

Kapitola 3

3.1 a) nekonverguje
b) konverguje
c) konverguje
d) nekonverguje

3.2 a) konverguje neabsolútne
b) konverguje neabsolútne
c) konverguje neabsolútne
d) diverguje

Kapitola 4

4.1 a) ∞ pre $x \in (0,1]$, 0 pre $x = 0$, $-\infty$ pre $x \in [-1,0)$.
b) ∞ pre $x \in (0,\mathrm{e}]$, 0 pre $x = 1, -\infty$ pre $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$.
c) $\frac{1}{2}$ pre $x = 0$, 0 pre $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
d) 1.

4.2 a) $x \in (-2,2)$ b) $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$ c) $x \in (1,\infty)$ d) $x \in \mathbb{R}$

4.3 a) $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ pre $x < 0$, 0 pre $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$ pre $x > 0$, nekonverguje rovnomerne

b) $f(x) = 0$, nekonverguje rovnomerne
c) $f(x) = 0$, rovnomerne konverguje
d) $f(x) = \infty$ pre $x < 0$, 0 pre $x > 0$, 1 pre $x = 0$, nekonverguje rovnomerne

4.4 a) majoranta $\frac{1}{e^n}$ b) majoranta $\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ c) majoranta $\frac{1}{n^2}$ d) majoranta $\frac{1}{2^n}$

Kapitola 5

5.1 a) $r = \frac{1}{e}$, OK$= \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$
b) $r = 0$, OK neexistuje
c) $r = 1$, OK$= [-1, 1)$
d) $r = 1$, OK$= (-4, -2)$

5.2 a) $r = 1$, $s(x) = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$
b) $r = 2$, $s(x) = \ln\frac{2}{2+x}$
c) $r = 1$, $s(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$
d) $r = 1$, $s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

5.3 a) 3
b) $\ln\frac{4}{3}$
c) $\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$
d) $\frac{7}{4}\ln\frac{7}{4} - \frac{3}{4}$

5.4 a) $f(x) = 2\left(x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \dots\right)$
b) $f(x) = 4x^2 - \frac{32}{3}x^6 + \frac{128}{15}x^{10} - \dots$
c) $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
d) $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$

5.5 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!}(x-3)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$

Kapitola 6

6.1 a) 1,49364 c) 0,411433 e) 0,15700 g) 2,03002
b) 0,1351 d) 0,422698 f) 1,383102 h) 0,90955

6.2 a) 1,1675 b) 0,118826 c) 0,39699 d) 0,73805

6.3 a) $-\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1

6.4 a) $y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^6 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{105}x^7\right)$
b) $y = a_0\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{96}x^4 - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{480}x^5 - \dots\right)$

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo prehľadne spracovať teóriu o nekonečných radoch. V prvej časti sme uviedli základné pojmy z oblasti nekonečných číselných radov, základné operácie s týmito radmi a ich prípady, a to číselné rady s nezápornými členmi a alternujúce rady. V ďalšej časti sme zase rozobrali funkcionálne rady, najmä pojmy ako bodová a rovnomerná konvergencia. Uviedli sme aj vlastnosti rovnomerne konvergentných radov, ktoré sme konkretizovali aj na prípad mocninových radov. Pomocou Taylorovho radu sme na záver rozvinuli funkcie do mocninových radov a toto sme využili v záverečnej kapitole pri aplikáciách.

Zoznam použitej literatúry

[1] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1998, iv, 113 s. ISBN 80-210-1949-2.

[2] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003, 209 s. ISBN 80-210-3121-2.

[3] HYSLOP, James M. *Infinite series*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2006, xi+121 s. ISBN 0486450333.

[4] JANOVSKÁ, Drahoslava, Daniel TURZÍK a Miroslava DUBCOVÁ. *Matematika III – Sbírka příkladů* [online]. 2015 [cit. 19.5.2015]. Dostupné z: http://old.vscht.cz/mat/Ostatni/SbirkaIII.pdf

[5] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II*. Praha: Academia, 1984, 671 s.

[6] KAŇKA, Miloš a Jiří HENZLER. *Matematika*. Vyd. 1. Praha: Ekopress, 2003, 214 s. ISBN 80-86119-77-7.

[7] KAŇKA, Miloš a Jiří HENZLER. *Matematika pro ekonomické fakulty*. Vyd. 1. Praha: Ekopress, 2000, 379 s. ISBN 8086119319.

[8] KNOPP, Konrad. *Theory and application of infinite series*. New York: Dover Publications, 1990, xii+563 s. ISBN 0486661652.

[9] MIKULÍK, Miloslav. *Matematika B*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2005, 308 s. Distanční studijní opora. ISBN 8021036400.

[10] SILVERMAN, Richard A. a Grigorii Mikhailovich FIKHTENGOLTS. *Infinite series: Ramifications*. Rev. English ed. New York: Gordon and Breach, 1970, vii+130 s. ISBN 0677209401.

[11] ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky. II, Integrální počet, nekonečné řady, diferenciální geometrie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, funkce komplexní proměnné, Laplaceova transformace, diferenční rovnice*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1986. 896 s.

[12] ŠKRÁŠEK, Josef. *Matematika II. A, Nekonečné řady - Počet pravděpodobnosti - Matematická statistika*. Vyd. 1. Brno: Ediční středisko VUT, 1979, 248 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně).