Příklady pro 7. cvičení a úlohu

(1) Napište tři podstatně různé příklady
  (a) nenulové lineární formy na $\mathbb{R}_5[x]$,
  (b) lineární formy f na prostoru komplexních matic 2×2 takové, že $f(E) = 3i$,
  (c) bilineární formy na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$,
  (d) trilineární formy na $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,
  (e) bilineární formy na $C[0,1] \times \mathbb{R}^2$, kde $C[0,1]$ je prostor spojitých funkcí na intercvalu $[0,1]$.

(2) Najděte duální bázi k bázi prostoru U:
  (a) $U = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (2,0,1)$, $u_3 = (1,2,3)$.
  (b) $U = \mathbb{R}_2[x]$, $u_1 = x^2$, $u_2 = x^2 + 1$, $u_3 = 2x - 1$.
  (c) $U = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$,
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

(3) Najděte bázi prostoru U tak, aby daná báze v U^* k ní byla duální:
  (a) $U = \mathbb{R}^3$, $f^1(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - x_2$, $f^2(x_1,x_2,x_3) = x_2 - x_3$, $f^3(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.
  (b) $U = \mathbb{R}_2[x]$, $f^1(ax^2+bx+c) = a + b + 2c$, $f^2(ax^2+bx+c) = 3b + c$, $f^3(ax^2+bx+c) = a - b - c$.

(4) K danému lineárnímu zobrazení $\varphi : U \to V$ najděte duální:
  (a) $U = V$, $\varphi(u) = 3u$.
  (b) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 - 6x_3)$.
  (c) $U = \mathbb{R}_2[x]$, $V = \mathbb{R}_1[x]$, $\varphi(p) = p'$ (derivace polynomu).

(5) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem
$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 = x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3)$$
. Určete matici duálního zobrazení φ^* vzhledem k bázi
$$f^1(x_1,x_2,x_3) = 8x_1 + 6x_2 - 5x_3, f^2(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 4x_2 - 3x_3, f^3(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - x_2 + x_3.$$

(6) Nechť $\varphi : U \to U$ má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Jaká vlastní čísla má φ^*?

(7) Nechť $f^1, f^2, \ldots, f^n$ je duální báze k bázi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prostoru U. Najděte souřadnice tenzoru t v příslušné bázi tenzorového součinu prostorů U a U^*:
  (a) $t = (2u_1 - 5u_2 + 3u_3) \otimes (f_1 - 23f^2 - 56f_3) \in U \otimes U^*$.
  (b) $t = (\sum_{i=1}^{i=n} f^i) \otimes (\sum_{i=1}^{i=n} f^i) \otimes (\sum_{i=1}^{i=n} u_i) \otimes (\sum_{i=1}^{i=n} u_i) \in U^* \otimes U^* \otimes U \otimes U$.

(8) Vyčíslete tenzor t na prvku p. Zde $f^1, f^2, \ldots, f^n$ je duální báze k bázi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prostoru U:
  (a) $t = f^1 \otimes f^5 - f^3 \otimes f^2 \in U^* \otimes U^*$, $p = (2u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4, u_1 - 2u_2 - 3u_3 - 4u_4)$.
  (b) $t = f^1 \otimes u_2 \otimes u_3 - f^2 \otimes u_1 \otimes u_4 \in U^* \otimes U \otimes U$, $p = (2u_1 + u_2, 3f^2 + 5f^3, f^3 + f^4)$.
  (c) $t = \sum 3f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes f^{i_3} \otimes u_{i_4} \otimes u_{i_5} \in U^* \otimes U * \otimes U^* \otimes U \otimes U$, kde sčítáme přes všechny možné pětice indexů, $p = (v, v, v, g, g)$, kde $v = u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4$, $g = 2f^1 - f^4$.

(9) Pro lineární zobrazení $\varphi_1, \varphi_2 : U \to U$ definujeme lineární zobrazení $\varphi_1 \otimes F_2 : U \otimes U \to U \otimes U$ předpisem $\varphi_1 \otimes F_2(u_1 \otimes u_2) = \varphi_1(u_1) \otimes \varphi_2(u_2)$.

(a) Dokažte, že toto lineární zobrazení existuje a je definováno jednoznačně.

(b) Ze znalosti vlastních čísel a vektorů lineárních operátorů φ_1 a φ_2 určete vlastní čísla a vektory $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.