

Příklady pro 8. cvičení a úlohu

(1) Spočtěte souřadnice

(a) \bar{t}_1^{12} tenzoru $t \in T_1^2(\mathbb{R}^2)$, jehož souřadnice jsou v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ všechny rovny 1, v nové bázi

$$(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) \bar{t}_{12}^1 tenzoru $t = f^1 \otimes f^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \in T_2^1(\mathbb{R}^2)$ v nové bázi

$$(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) \bar{t}_{31}^{12} tenzoru $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \in T_2^2(\mathbb{R}^3)$ v nové bázi

$$(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) \bar{t}_{123}^{12} tenzoru $t \in T_3^2(\mathbb{R}^3)$ se všemi souřadnicemi rovnými dvěma v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ v nové bázi

$$(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Nechť U je vektorový prostor s bazí $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a duální bazí (f^1, f^2) . Vyjádřete tenzor $(f^1 - f^2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \in T_1^1(U)$ v bázi $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)$ a duální bazí (\bar{f}^1, \bar{f}^2) , jestliže

$$\begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

(3) Spočtěte kontrakci tenzoru

(a) $3 \cdot f^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 2 \cdot f^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ podle 1. a 2. složky.

(b) $(f^1 - 2f^3 + 3f^4) \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

(c) $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) \otimes \mathbf{e}_1 + (f^1 + 2f^2 + 2f^3 + 4f^4) \otimes \mathbf{e}_2 + 2(f^1 - f^2 - f^4) \otimes \mathbf{e}_3$

(d) $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ podle druhých složek.

(4) Nechť $t \in T_p^q(U)$ je tenzor odpovídající lineárnímu zobrazení $\varphi : U \rightarrow U$. Ukažte, že pro dané $u \in U$ je $\varphi(u) \in U$ kontrakcí tenzoru $t \otimes u$ podle 1. a 2. složky.

(5) Stopa $\text{tr } \varphi$ lineárního zobrazení $\varphi : U \rightarrow U$ je kontrakce tenzoru $t \in U^* \otimes U$, který odpovídá lineárnímu zobrazení φ . Spočtěte tuto stopu pomocí složek matice zobrazení φ v bázi α .