Příklady pro 1. cvičení a úlohu

(1) Dokažte, že $SL(n,\mathbb{K})$ je normální podgrupa v $GL(n,\mathbb{K})$. Určete $GL(n,\mathbb{K})/SL(n,\mathbb{K})$.
(2) Ukažte, že $O(n,\mathbb{K})$ není normální podgrupa v $GL(n,\mathbb{K})$.
(3) $SO(n)$ je normální podgrupa v $O(n)$. Určete $O(n)/SO(n)$.
(4) SU(n) je normální podgrupa v $U(n)$. Určete $U(n)/SU(n)$.
(5) Dokažte z definice, že komplexifikací $\mathbb{R}^n$ je $\mathbb{C}^n$.
(6) Co je komplexifikací vektorového prostoru $\mathbb{R}_n[x]$?
(7) Proveďte důkazy vět z přednášky o jednoznačnosti komplexního rozšíření lineárního zobrazení, bilineární formy a skalárního součinu.
(8) Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat konjugovaný prostor $\overline{V}$ takto: množinově $V = \overline{V}$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení skalárem $\cdot_{\overline{V}}$ definujeme předpisem

$$(a+ib)\cdot_{\overline{V}} u = (a-ib)\cdot u.$$

Dokažte, že $\overline{V}$ je komplexní vektorový prostor.
(9) Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat jeho *realifikaci* $V^{\mathbb{R}}$ takto: množinově $V^{\mathbb{R}} = V$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení reálným číslem je stejné.
Nechť $(u_1,\ldots,u_n)$ je báze V. Najděte nějakou bázi $V^{\mathbb{R}}$.
(10) Dokažte, že pro rálný vektorový prostor V platí

$$(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V.$$

(11) Dokažte, že pro komplexní vektorový prostor V platí

$$(V^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$

(12) Nechť $f : V \to U$ je lineární zobrazení mezi komplexními vektorovými prostory. Zobrazením f je indukováno zobrazení

$$f^{\mathbb{R}} : V^{\mathbb{R}} \to U^{\mathbb{R}}.$$

Dokažte, že $f^{\mathbb{R}}$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory.
(13) Jsou-li v prostorech V a U z předchozího příkladu zvoleny báze $\alpha = (v_1,\ldots,v_n)$ a $\beta = (u_1,\ldots,u_m)$, můžeme najít matice A a B takové, že matice zobrazení $(f)_{\beta\alpha} = A + iB$.
Zvolme v prostoru $V^{\mathbb{R}}$ bázi $\alpha^{\mathbb{R}} = (v_1,\ldots,v_n,iv_1,\ldots,iv_n)$ a v prostoru $U^{\mathbb{R}}$ bázi $\beta^{\mathbb{R}} = (u_1,\ldots,u_m,iu_1,\ldots,iu_m)$. Dokažte, že matice zobrazení $f^{\mathbb{R}}$ v těchto bazích je

$$(f^{\mathbb{R}})_{\beta^{\mathbb{R}}\alpha^{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Uvědomte si, jaké jsou rozměry jednotlivých matic!
(14) Dokažte, že dvě definice afinního prostoru z přednášky jsou ekvivalentní.
(15) Ukažte, že množina $\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; p(2003) = 2004\}$ tvoří afinní podprostor s vektorovým prostorem $V = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; p(2003) = 0\}$. Jaká je jeho dimenze?
(16) Popište všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.
(17) Dokažte, že posunutí v rovině a v prostoru je afinní zobrazení.
(18) Ukažte, že otočení kolem bodu $S = (s_1, s_2)$ je afinní zobrazení.

(19) Udejte další příklady afinních zobrazení, které znáte ze střední školy z geometrie.

(20) Ukažte, že $A(n,\mathbb{R})$ je izomorfní s podgrupou $GL(n+1,\mathbb{R})$ matic tvaru

$$\left(\begin{array}{c|c} C & c \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

kde C je matice $n \times n$ a c matice $n \times 1$.