Příklady pro 10. cvičení a úlohu

(1) Vypočtěte antisymetrizaci tenzorů
   (a) $u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_3 + 3u_1 \otimes u_4$
   (b) $u_1 + u_2 + 3u_3$
   (c) $u_1 \otimes (u_2 + 2u_3 + u_4) \otimes u_2$

(2) Určete hodnotu antisymetrického tenzoru t na prvku p
   (a) $t = u_1 \wedge u_2 - 2u_1 \wedge u_3$, $p = (f^1 + 2f^2, f^1 + f^2 + f^3)$
   (b) $t = u_1 \wedge u_3 \wedge u_4 - 3u_2 \wedge u_3 \wedge u_3$, $p = (f^1 - 3f^2, f^2 + f^4, 2f^1 - f^3 - f^4)$

(3) Nechť U má bázi (u_1, u_2, u_3, u_4). Určete bázi prostorů $\Lambda^1(U)$, $\Lambda^2(U)$, $\Lambda^3(U)$, $\Lambda^4(U)$. Odvoďte vzorec pro dimenzi prostoru $\Lambda^k(V)$, pokud $\dim V = n$. Proč musí být $n \geq k$?

(4) Dokažte, že pro $\dim U > 2$ nejsou prostory $\Lambda^2\big(\Lambda^2(U)\big)$ a $\Lambda^4(U)$ isomorfní.

(5) Platí, že $T^2_0(U) \simeq \Lambda^2(U) \oplus S^2(U)$ (známé tvrzení o rozkladu bilineární formy na součet symetrické a antisymetrické bilineární formy). Rozhodněte, zda pro $q > 2$ platí

$$T^q_0(U) \simeq \Lambda^q(U) \oplus S^q(U).$$

Dokažte, případně nalezněte protipříklad.

(6) Vypočtěte vnější součin $t \wedge s$ tenzorů t a s:
   (a) $t = u_1 \otimes u_2$, $s = u_3$
   (b) $t = 2u_1 \otimes u_2 - 3u_1 \otimes u_3$, $s = u_2 \otimes u_4 - u_4 \otimes u_2$
   (c) $t = u_1 \wedge u_2 - 2u_2 \wedge u_3$, $s = u_2 \otimes u_3$

(7) Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení a α báze U. Určete matici zobrazení $\varphi^{\wedge 2} : \Lambda^2(U) \to \Lambda^2(U)$ vzhledem k bázi prostoru $\Lambda^2(U)$ vytvořené kanonicky z báze α, je-li $(\varphi)_{\alpha\alpha}$ tvaru
   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Určete stopu matic $\Lambda^2 A$, $\Lambda^3 A$, $\Lambda^2 B$, $\Lambda^3 B$ a $\Lambda^4 B$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Uvědomte si vztah mezi $\operatorname{tr} \Lambda^q A$ a koeficientem $(-\lambda)^q$ v charakteristickém polynomu.

(9) Určete Jordanův tvar matice

$$\Lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(10) Dosaďte do vnější formy $\omega \in \Lambda^3(U^*)$ vektor u

(a) $\omega = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 + 2f^1 \wedge f^2 \wedge f^4$, $u = u_1 - 3u_3$

(b) $\omega = 2f^1 \wedge (f^2 + f^3) \wedge f^4$, $u = 3u_1 + u_2 + 2u_4$

(11) Spočtěte vnější formy $i(v)i(u)\omega \in \Lambda^2(U)$ a $i(u)i(v)\omega \in \Lambda^2(U)$, kde

$$\omega = 2f^1 \wedge f^2 \wedge (f^3 - 2f^4) \wedge f^5 + f^2 \wedge f^3 \wedge f^4 \wedge f^5,$$

$u = u_1 - 3u_2$ a $v = u_1 + u_2 + u_3$.