Příklady pro 2. cvičení a úlohu

(1) Dokažte: Je-li $u_1, \ldots, u_{n+1}$ báze vektorového prostoru V_{n+1}, pak $[u_1]$,...,$[u_{n+1}]$, $[\sum_{i=1}^{n+1} u_i]$ je geometrická báze projektivního prostoru $\mathcal{P}_n(V_{n+1})$.

(2) Zvolte nějakou geometrickou bázi O_1, O_2, O_3, E projektivního prostoru $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. K této bázi najděte vektory $u_i \in O_i$ tak, aby $u_1 + u_2 + u_3 \in E$.

(3) Nechť $V_n \subseteq V_{n+1}$ je vektorový prodprostor, který je jádrem lineárního zobrazení $f : V_{n+1} \to \mathbb{K}$. Na přednášce byla zavedena operace $+ : \mathcal{A} \times V_n \to \mathcal{A}$ pro $\mathcal{A} = \mathcal{P}(V_{n+1}) - \mathcal{P}(V_n)$. Dokažte, že $(\mathcal{A}, V_n, +)$ je afinní prostor.

(4) Na přednášce bylo projektivní rozšíření afinního prostoru $\mathcal{A}(V_n)$ definováno pomocí množiny $V_{n+1} = V_n \cup \{(r, A) \in (\mathbb{K} - \{0\}) \times \mathcal{A}\}$. Vzpoměňte si, jak bylo na V_{n+1} definováno sčítání a násobení skalárem a ukažte, že jde o vektorový prostor.

(5) Najděte dvě různé kolineace $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ takové, že $\Phi([(1,0)]) = [(1,0)]$, $\Phi([(0,1)]) = [(0,1)]$.

(6) Dokažte: Jestliže je kolineace $\Phi : \mathcal{P}(V_{n+1}) \to \mathcal{P}(V_{n+1})$ určena lineárními zobrazeními φ_1, φ_2, pak existuje $r \in \mathbb{K} - \{0\}$ tak, že $\varphi_2 = r \cdot \varphi_1$.

(7) Na $\mathcal{A}(V_n)$ uvažujme posunutí o vektor u_0, $\Phi(X) = X + u_0$. Ukažte, že Φ je afinní zobrazení, které je indukováno lineárním zobrazením $\varphi : V_n \to V_n$. Čemu se rovná φ?

(8) Ukažte, že existuje injektivní homomorfismus z $GL(V_n)$ do $A(\mathcal{A}(V_n))$ a přesně jej popište..

(9) Při pevně zvolené soustavě souřadnice v $\mathcal{A}(V_n)$ popište isomorfismy

$$A(\mathcal{A}(V_n)) \simeq A(n, \mathbb{K}) \simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c} C & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \right\}$$

$$GL(V_n) \simeq GL(n, \mathbb{K}) \simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \right\}$$

(10) Při pevně zvolené soustavě souřadnic v $\mathcal{A}(V_n)$ popište isomorfismy

$$A(\mathcal{A}(V_n)) \simeq A(n, \mathbb{K}) \simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c} C & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \right\}$$

$$PGL(\overline{\mathcal{A}}) \simeq PGL(n, \mathbb{K}) \simeq GL(n+1, \mathbb{K})/(\mathbb{K} - \{0\}).$$

Pomocí těchto isomorfismů popište $A(\mathcal{A}(V_n))$ jako podgrupu v $PGL(\overline{\mathcal{A}})$. Jde o normální podgrupu?

(11) Nechť kolineace $\Phi : \mathcal{P}(V_{n+1}) \to \mathcal{P}(V_{n+1})$ je zadána pomocí lineárního automorfismu $\varphi : V_{n+1} \to V_{n+1}$. Φ má pevný bod, tj. $\Phi(X) = X$ právě tehdy, když φ má nenulové vlastní číslo s vlastním vektorem $u \in X$.

(12) Dokažte: Jestliže afinní zobrazení $\Phi : \mathcal{A}(V_n) \to \mathcal{A}(V_n)$ má dva pevné body, pak jich má nekonečně mnoho.

(13) Najděte kolineaci $\Phi : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$, která má právě dva pevné body.

(14) Nechť $\Phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ je kolineace v projektivním prostoru nad $\mathbb{C}$. Pak Φ má buď právě $n + 1$ pevných bodů, nebo nekonečně mnoho pevných bodů.

(15) Nechť $\Phi : \mathcal{P}_{2n} \to \mathcal{P}_{2n}$ je kolineace v projektivním prostoru dimenze $2n$ nad $\mathbb{R}$. Potom má Φ aspoň jeden pevný bod.