Domácí úloha z 18. října 2018 (odevzdává se 25. října 2018)

V podokruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ je dána podmnožina

$$I = \{a + b\sqrt{10};\ a, b \in \mathbb{Z},\ 13 \mid 2a - b\}.$$

Pro množinu I dokažte, že je ideálem okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Dále rozhodněte, zda je to ideál hlavní, ideál maximální, prvoideál (svá rozhodnutí dokazujte).

[Návod: Při práci s okruhy $\mathbb{Z}[i]$ a $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ jsme s úspěchem využili druhou mocninu absolutní hodnoty, kterou nyní použít nelze. Ve stejné roli zde však je možné použít zobrazení $a + b\sqrt{10} \mapsto (a + b\sqrt{10})(a - b\sqrt{10}) = a^2 - 10b^2$. Musíte však dokázat, že má analogickou vlastnost, která převádí dělitelnost v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ na dělitelnost v okruhu $\mathbb{Z}$.]