Domácí úloha z 15. listopadu 2018 (odevzdává se 22. listopadu 2018)

1. Dokažte, že polynom $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$. V tělese $K = \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ označme $c = x + (f)$ třídu obsahující polynom x. Vyjádřete v tělese K prvek $(c^2 + c + 1)^{-1}$ ve tvaru $kc^2 + lc + m$ pro vhodná $k, l, m \in \mathbb{Z}_5$.

2. V okruhu $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ je dán symetrický polynom

$$f = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3).$$

   Nalezněte polynom $h \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ tak, aby $f = h(s_1, s_2, s_3, s_4)$, kde s_1, s_2, s_3, $s_4 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ jsou elementární symetrické polynomy čtyř proměnných.

[Návod k části 1: nalezněte největší společný dělitel polynomů f a $x^2 + x + 1$ v $\mathbb{Z}_5[x]$, vyjádřete jej Bezoutovou identitou a této rovnosti polynomů využijte k tomu, že uvážíte hodnoty polynomů zde vystupujících v prvku c.]