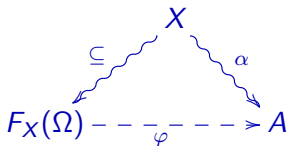


Charakterizace volnosti pomocí homomorfismů

Poznámka. Pro volnou algebru $F_X(\Omega)$ typu Ω generovanou množinou X jsme dokázali následující větu:

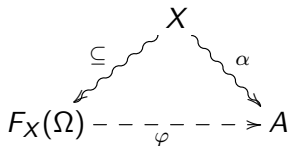
Věta. *Nechť Ω je typ, X množina. Dále necht' A je libovolná Ω -algebra a $\alpha : X \rightarrow A$ libovolné zobrazení. Pak existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ splňující podmínku $\varphi(x) = \alpha(x)$ pro všechny prvky $x \in X$.*



Poznámka. Tvrzení věty znamená, že pro libovolnou Ω -algebru A platí, že když v ní jakkoli předepíšeme obraz každému prvku množiny X (což je množina generátorů Ω -algebry $F_X(\Omega)$), pak vždy existuje (jediná) možnost, jak tento předpis doplnit na homomorfismus Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$. Prvky množiny X tedy nejsou svázány žádnou netriviální rovností.

Speciální případ $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Věta. Necht' Ω je typ, n nezáporné celé číslo, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ je n -prvková množina proměnných. Dále necht' A je libovolná Ω -algebra a $a_1, \dots, a_n \in A$ libovolné. Necht' $\alpha : X \rightarrow A$ je zobrazení určené předpisem $\alpha(x_i) = a_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Předchozí věta zaručuje existenci jediného homomorfismu Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ splňujícího podmínku $\varphi(x_i) = a_i$ pro všechny $i = 1, \dots, n$.



Pak platí: tento homomorfismus φ přiřadí libovolnému termu $t \in F_X(\Omega)$ hodnotu operace, kterou tento term určuje, v n -tici (a_1, \dots, a_n) , tj. platí $\varphi(t) = t_A(a_1, \dots, a_n)$.

Důkaz. Stačí porovnat konstrukci z důkazu předchozí věty s definicí n -ární operace určené termem.

Cíl: konstrukce volné Ω -algebry v dané varietě

Nechť Ω je typ, t_1, t_2 dva různé n -ární termy typu Ω . Z předchozí věty plyne, že pokud má množina X alespoň n prvků, pak ve volné algebře $F_X(\Omega)$ typu Ω generované množinou X není splněna rovnost $t_1 = t_2$. Proto pokud v teorii T typu Ω je alespoň jedna rovnost dvou *různých* n -árních termů a množina X má alespoň n prvků, pak ve varietě V určené teorií T volná algebra $F_X(\Omega)$ neleží.

Potřebujeme tedy pro danou teorii T typu Ω konstruovat Ω -algebru generovanou množinou X , v níž platí všechny rovnosti teorie T a všechny důsledky těchto rovností, ale žádná rovnost, která není důsledkem rovností teorie T , už v konstruované algebře platit nebude. Otázka je, jak takové důsledky popsat. Asi první cesta, která člověka napadne, je pokusit se popisovat nějaká odvozovací pravidla, jak z rovností teorie T odvodit další rovnosti. My ale použijeme jinou cestu: důsledkem rovností teorie T jsou právě ty rovnosti, které platí v každé Ω -algebře z variety určené teorií T . Výhoda takového postupu je, že jej lze užít i v situaci, kdy neznáme teorii T , ale jen jí určenou varietu.

Uzavřená třída Ω -algeber

Protože naším cílem je důkaz Birkhoffovy věty, nebudeme konstrukci volné Ω -algebry generované množinou X provádět pouze ve varietě V typu Ω , ale zdánlivě obecněji: v libovolné tzv. uzavřené třídě Ω -algeber dle následující definice. (Podle Birkhoffovy věty ovšem každá uzavřená třída Ω -algeber je varietou.)

Definice. Necht' V je třída Ω -algeber. O třídě V řekneme, že je uzavřená, právě když splňuje všechny podmínky Birkhoffovy věty, tj.

- ▶ obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω -algeber;
- ▶ obsahuje obrazy všech svých Ω -algeber ve všech surjektivních homomorfismech;
- ▶ obsahuje součin libovolného (i prázdného) systému svých Ω -algeber.

Poznámka. Už víme, že poslední podmínka znamená, že ve V leží také jednoprvková Ω -algebra $\{\emptyset\}$. Odtud druhou podmínkou dostaneme, že ve V leží všechny jednoprvkové Ω -algebry, neboť uzavřená třída Ω -algeber s každou Ω -algebrou A obsahuje i všechny Ω -algebry izomorfní s A . Tedy V není množina, ale vlastní třída.

Volnou Ω -algebru generovanou X získáme faktorizací $F_X(\Omega)$

Nechť V je uzavřená třída Ω -algeber. Protože $F_X(\Omega)$ je Ω -algebra generovaná množinou X , její libovolná faktorová algebra je generovaná třídami obsahujícími prvky z X . Je tedy nutné najít kongruenci \sim na $F_X(\Omega)$ tak, aby $F_X(\Omega)/\sim \in V$. Takových kongruencí může být hodně, ale vždy je alespoň jedna, totiž největší kongruence dávající jednoprvkovou faktorovou Ω -algebru.

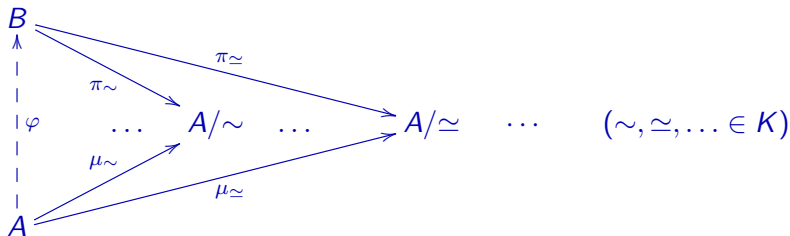
Definice. Nechť Ω je typ, X množina. Pro libovolnou uzavřenou třídu Ω -algeber V definujeme relaci \sim_V na Ω -algebře $F_X(\Omega)$ takto: \sim_V je průnikem všech kongruencí \sim na Ω -algebře $F_X(\Omega)$ takových, že $F_X(\Omega)/\sim$ patří do třídy V .

Poznámka. Skutečně můžeme o tomto průniku mluvit: všechny relace na dané množině tvoří množinu (tedy ne vlastní třídu), proto tvoří množinu i všechny kongruence na dané Ω -algebře. Dokazovali jsme, že průnik libovolného neprázdného systému kongruencí na dané Ω -algebře je opět kongruence na ní, tedy \sim_V je kongruence na $F_X(\Omega)$. Není však hned jasné, zda faktorová algebra $F_X(\Omega)/\sim_V$ leží v třídě V . Připomeňme větu o průniku množiny kongruencí.

Věta o průniku množiny kongruencí

Věta. Necht' A je univerzální algebra typu Ω , K neprázdná množina kongruencí na Ω -algebře A . Necht' relace \approx na množině A je průnikem všech kongruencí z množiny K , tj. pro libovolné $a, b \in A$ klademe $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$.

Uvažme součin Ω -algeber $B = \prod_{\sim \in K} A/\sim$. Pro každé $\sim \in K$ označme $\pi_{\sim} : B \rightarrow A/\sim$ projekci ze součinu a $\mu_{\sim} : A \rightarrow A/\sim$ projekci Ω -algebry A na faktorovou algebru A/\sim . Podle věty o součinu existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : A \rightarrow B$ takový, že $\pi_{\sim} \circ \varphi = \mu_{\sim}$. Pak platí: jádrem homomorfismu φ je kongruence \approx .



Věta. Necht' Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω -algeber. Necht' \sim_V je relace z předchozí definice, tj. průnik množiny K všech kongruencí \sim na Ω -algebře $F_X(\Omega)$ takových, že $F_X(\Omega)/\sim \in V$. Pak \sim_V je kongruence na Ω -algebře $F_X(\Omega)$ a příslušná faktorová algebra $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ leží v třídě V .

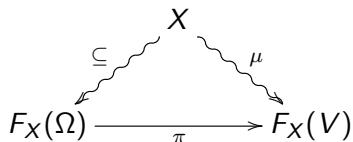
Důkaz. Podle připomenuté věty existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow \prod_{\sim \in K} (F_X(\Omega)/\sim)$, pro který komutuje:

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{\sim \in K} (F_X(\Omega)/\sim) & & \\
 \uparrow \varphi & \searrow \pi_{\cong} & \\
 \dots F_X(\Omega)/\simeq \dots & & F_X(\Omega)/\cong \dots (\simeq, \cong, \dots \in K) \\
 \nearrow \mu_{\simeq} & & \nearrow \mu_{\cong} \\
 F_X(\Omega) & &
 \end{array}$$

Přitom jádrem φ je kongruence \sim_V . Proto $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ je izomorfní s podalgebrou $\varphi(F_X(\Omega))$ součinu Ω -algeber z V . Protože V je uzavřená třída, platí $F_X(V) \in V$.

Volná algebra třídy V generovaná množinou X

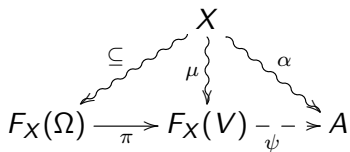
Definice. Necht' Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω -algeber. Faktorová algebra $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ z předchozí věty se nazývá volná algebra třídy V generovaná množinou X . Necht' $\mu : X \rightarrow F_X(V)$ je zobrazení určené podmínkou $\mu(x) = \pi(x)$ pro všechny prvky $x \in X$, kde $\pi : F_X(\Omega) \rightarrow F_X(V)$ je projekce na faktorovou algebru. Pak zobrazení μ se nazývá vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$.



Poznámka. Pokud třída V obsahuje nějakou Ω -algebru, která není jednoprvková nebo prázdná, lze snadno odvodit z následující věty, že zobrazení μ je injektivní. Není to však homomorfismus Ω -algeber, přestože se nazývá vnoření, vždyť X je jen množina, nikoli Ω -algebra.

Charakterizace volnosti pomocí homomorfismů

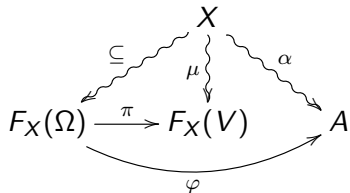
Věta. Necht' Ω je typ, X množina. Necht' V je uzavřená třída Ω -algeber, $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ volná algebra třídy V generovaná množinou X , $\pi : F_X(\Omega) \rightarrow F_X(V)$ je projekce na faktorovou algebru a $\mu : X \rightarrow F_X(V)$ vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$. Necht' A je libovolná Ω -algebra z třídy V a $\alpha : X \rightarrow A$ libovolné zobrazení. Pak existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\psi : F_X(V) \rightarrow A$ splňující podmínku $\psi \circ \mu = \alpha$.



Poznámka. Neformálně řečeno, předchozí věta popisuje to, že prvky množiny X generují Ω -algebru $F_X(V)$ v rámci třídy V co „nejvolněji,“ tedy že tyto generátory jsou v Ω -algebře $F_X(V)$ svázány jen rovnostmi platnými v každé Ω -algebře z třídy V .

Důkaz věty

Podle věty o volnosti $F_X(\Omega)$ existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : F_X(\Omega) \rightarrow A$ splňující podmínku $\forall x \in X : \varphi(x) = \alpha(x)$.

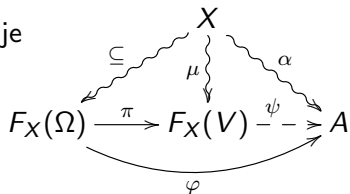


$\varphi(F_X(\Omega))$ je podalgebra Ω -algebry $A \in V$, z uzavřenosti V na podalgebry $\varphi(F_X(\Omega)) \in V$. Z důsledku hlavní věty o faktorových algebrách pro jádro \sim homomorfismu φ je $\varphi(F_X(\Omega)) \cong F_X(\Omega)/\sim$, z uzavřenosti V na obrazy v surjektivních homomorfismech $F_X(\Omega)/\sim \in V$. Tedy \sim je jedna z těch kongruencí, jejichž průnikem je \sim_V . Proto $\sim_V \subseteq \sim$ a podle

hlavní věty o faktorových algebrách existuje jediný homomorfismus Ω -algeber

$\psi : F_X(V) \rightarrow A$ s vlastností $\psi \circ \pi = \varphi$, tedy komutuje diagram

Proto $\psi \circ \mu = \psi \circ \pi \circ \subseteq = \varphi \circ \subseteq = \alpha$.



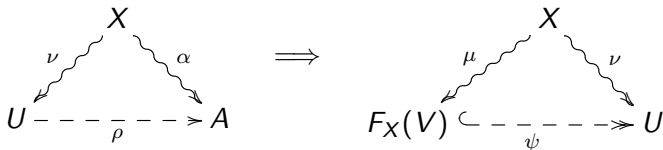
Jednoznačnost: $\psi' \circ \mu = \alpha \implies \psi' \circ \pi = \varphi \implies \psi' = \psi$.

Volná algebra je určena předchozí větou až na izomorfismus

Poznámka. Následující věta umožňuje konstruovat volné algebry jinak než z definice: odhadnout, jak asi vypadá, a pak ukázat, že je to opravdu ona, protože splňuje tuto charakterizační vlastnost.

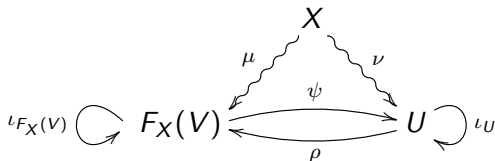
Věta. Necht' Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω -algeber, $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ volná algebra třídy V generovaná množinou X , $\mu : X \rightarrow F_X(V)$ vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$. Necht' algebra U z třídy V a zobrazení $\nu : X \rightarrow U$ splňují následující podmínku: pro libovolnou Ω -algebru A z třídy V a libovolné zobrazení $\alpha : X \rightarrow A$ existuje jediný homomorfismus Ω -algeber $\rho : U \rightarrow A$ splňující podmínku $\rho \circ \nu = \alpha$. Pak platí: existuje izomorfismus Ω -algeber $\psi : F_X(V) \rightarrow U$ takový, že $\psi \circ \mu = \nu$.

$\forall A \forall \alpha$



Důkaz věty

Podle předchozí věty pro Ω -algebru U a zobrazení $\nu : X \rightarrow U$ existuje homomorfismus Ω -algeber $\psi : F_X(V) \rightarrow U$ splňující podmínku $\psi \circ \mu = \nu$. Protože Ω -algebra U splňuje podmínku věty, pro Ω -algebru $F_X(V)$ a zobrazení $\mu : X \rightarrow F_X(V)$ existuje homomorfismus Ω -algeber $\rho : U \rightarrow F_X(V)$ splňující $\rho \circ \nu = \mu$.



Homomorfismus $\rho \circ \psi$ splňuje $\rho \circ \psi \circ \mu = \rho \circ \nu = \mu = \iota_{F_X(V)} \circ \mu$, kde $\iota_{F_X(V)}$ je identita na $F_X(V)$. Z jednoznačnosti popsané v předchozí větě $\rho \circ \psi = \iota_{F_X(V)}$. Zcela analogicky se dokáže z jednoznačnosti popsané v předpokladech věty, že $\psi \circ \rho = \iota_U$. To znamená, že ψ je inverzní zobrazení k ρ , a tedy ρ je bijekce, tedy izomorfismus.

Příklady použití věty

Příklad. Necht' $\Omega = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ a V je varieta všech grup. Pak $F_{\emptyset}(V) \cong \{e\}$ je jednoprvková grupa, neboť do libovolné grupy jde z grupy $\{e\}$ jediný homomorfismus. Podobně $F_{\{x\}}(V)$ je nekonečná cyklická grupa $\langle x \rangle$. (Každá nekonečná cyklická grupa je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}, +)$.) Pro libovolnou grupu G a libovolný prvek $g \in G$ máme jediný homomorfismus $\langle x \rangle \rightarrow G$, totiž $x^n \mapsto g^n$.

Příklad. Necht' $\Omega = \{\cdot, +, -, 0, 1\}$ a V je varieta všech okruhů. Pak $F_{\emptyset}(V)$ je okruh celých čísel \mathbb{Z} , neboť pro libovolný okruh R existuje jediný homomorfismus okruhů $\mathbb{Z} \rightarrow R$. Podobně $F_{\{x\}}(V)$ je okruh polynomů $\mathbb{Z}[x]$, protože pro libovolný okruh R a libovolný prvek $r \in R$ máme jediný homomorfismus $\mathbb{Z}[x] \rightarrow R$, totiž $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mapsto a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 1$, kde vpravo jsou celočíselné násobky prvků z R .

Příklad. Necht' $\Omega = \{+, -, 0\}$ a V je varieta všech komutativních grup. Pak $F_{\{x,y\}}(V) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, kde vnoření generátorů je definováno takto: $x \mapsto (1, 0)$, $y \mapsto (0, 1)$. Podobně $F_{\{x_1, \dots, x_n\}}(V) \cong \mathbb{Z}^n$.