Charakterizace volnosti pomocí homomorfismů

Poznámka. Pro volnou algebru $F_X(\Omega)$ typu Ω generovanou množinou X jsme dokázali následující větu:

Věta. Nechť Ω je typ, X množina. Dále nechť A je libovolná Ω-algebra a $\alpha : X \to A$ libovolné zobrazení. Pak existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi : F_X(\Omega) \to A$ splňující podmínku $\varphi(x) = \alpha(x)$ pro všechny prvky $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\ F_X(\Omega) \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & A \end{tikzcd}$$

Poznámka. Tvrzení věty znamená, že pro libovolnou Ω-algebru A platí, že když v ní jakkoli předepíšeme obraz každému prvku množiny X (což je množina generátorů Ω-algebry $F_X(\Omega)$), pak vždy existuje (jediná) možnost, jak tento předpis doplnit na homomorfismus Ω-algeber $\varphi : F_X(\Omega) \to A$. Prvky množiny X tedy nejsou svázány žádnou netriviální rovností.

Speciální případ $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

<u>*Věta.*</u> *Nechť* Ω *je typ,* n *nezáporné celé číslo,* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *je* n*-prvková množina proměnných. Dále nechť* A *je libovolná* Ω*-algebra a* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *libovolné. Nechť* $\alpha : X \to A$ *je zobrazení určené předpisem* $\alpha(x_i) = a_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$*. Předchozí věta zaručuje existenci jediného homomorfismu* Ω*-algeber* $\varphi : F_X(\Omega) \to A$ *splňujícího podmínku* $\varphi(x_i) = a_i$ *pro všechny* $i = 1, \ldots, n$*.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\ F_X(\Omega) \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & A \end{tikzcd}$$

Pak platí: tento homomorfismus φ *přiřadí libovolnému termu* $t \in F_X(\Omega)$ *hodnotu operace, kterou tento term určuje, v* n*-tici* $(a_1, \ldots, a_n)$*, tj. platí* $\varphi(t) = t_A(a_1, \ldots, a_n)$*.*

<u>*Důkaz.*</u> Stačí porovnat konstrukci z důkazu předchozí věty s definicí n-ární operace určené termem.

Cíl: konstrukce volné Ω-algebry v dané varietě

Nechť Ω je typ, t_1, t_2 dva různé n-ární termy typu Ω. Z předchozí věty plyne, že pokud má množina X alespoň n prvků, pak ve volné algebře $F_X(\Omega)$ typu Ω generované množinou X není splněna rovnost $t_1 = t_2$. Proto pokud v teorii T typu Ω je alespoň jedna rovnost dvou *různých* n-árních termů a množina X má alespoň n prvků, pak ve varietě V určené teorií T volná algebra $F_X(\Omega)$ neleží.

Potřebujeme tedy pro danou teorii T typu Ω konstruovat Ω-algebru generovanou množinou X, v níž platí všechny rovnosti teorie T a všechny důsledky těchto rovností, ale žádná rovnost, která není důsledkem rovností teorie T, už v konstruované algebře platit nebude. Otázka je, jak takové důsledky popsat. Asi první cesta, která člověka napadne, je pokusit se popisovat nějaká odvozovací pravidla, jak z rovností teorie T odvodit další rovnosti. My ale použijeme jinou cestu: důsledkem rovností teorie T jsou právě ty rovnosti, které platí v každé Ω-algebře z variety určené teorií T. Výhoda takového postupu je, že jej lze užít i v situaci, kdy neznáme teorii T, ale jen jí určenou varietu.

Uzavřená třída Ω-algeber

Protože naším cílem je důkaz Birkhoffovy věty, nebudeme konstrukci volné Ω-algebry generované množinou X provádět pouze ve varietě V typu Ω, ale zdánlivě obecněji: v libovolné tzv. uzavřené třídě Ω-algeber dle následující definice. (Podle Birkhoffovy věty ovšem každá uzavřená třída Ω-algeber je varietou.)

Definice. Nechť V je třída Ω-algeber. O třídě V řekneme, že je uzavřená, právě když splňuje všechny podmínky Birkhoffovy věty, tj.

- obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω-algeber;
- obsahuje obrazy všech svých Ω-algeber ve všech surjektivních homomorfismech;
- obsahuje součin libovolného (i prázdného) systému svých Ω-algeber.

Poznámka. Už víme, že poslední podmínka znamená, že ve V leží také jednoprvková Ω-algebra $\{\emptyset\}$. Odtud druhou podmínkou dostaneme, že ve V leží všechny jednoprvkové Ω-algebry, neboť uzavřená třída Ω-algeber s každou Ω-algebrou A obsahuje i všechny Ω-algebry izomorfní s A. Tedy V není množina, ale vlastní třída.

Volnou Ω-algebru generovanou X získáme faktorizací $F_X(\Omega)$

Nechť V je uzavřená třída Ω-algeber. Protože $F_X(\Omega)$ je Ω-algebra generovaná množinou X, její libovolná faktorová algebra je generovaná třídami obsahujícími prvky z X. Je tedy nutné najít kongruenci $\sim$ na $F_X(\Omega)$ tak, aby $F_X(\Omega)/\!\sim\; \in V$. Takových kongruencí může být hodně, ale vždy je alespoň jedna, totiž největší kongruence dávající jednoprvkovou faktorovou Ω-algebru.

Definice. Nechť Ω je typ, X množina. Pro libovolnou uzavřenou třídu Ω-algeber V definujeme relaci $\sim_V$ na Ω-algebře $F_X(\Omega)$ takto: $\sim_V$ je průnikem všech kongruencí $\sim$ na Ω-algebře $F_X(\Omega)$ takových, že $F_X(\Omega)/\!\sim$ patří do třídy V.

Poznámka. Skutečně můžeme o tomto průniku mluvit: všechny relace na dané množině tvoří množinu (tedy ne vlastní třídu), proto tvoří množinu i všechny kongruence na dané Ω-algebře. Dokazovali jsme, že průnik libovolného neprázdného systému kongruencí na dané Ω-algebře je opět kongruence na ní, tedy $\sim_V$ je kongruence na $F_X(\Omega)$. Není však hned jasné, zda faktorová algebra $F_X(\Omega)/\!\sim_V$ leží v třídě V. Připomeňme větu o průniku množiny kongruencí.

Věta o průniku množiny kongruencí

<u>Věta.</u> *Nechť A je univerzální algebra typu Ω, K neprázdná množina kongruencí na Ω-algebře A. Nechť relace $\approx$ na množině A je průnikem všech kongruencí z množiny K, tj. pro libovolné $a, b \in A$ klademe $a \approx b$ právě tehdy, když pro každé $\sim \in K$ je $a \sim b$.*

Uvažme součin Ω-algeber $B = \prod_{\sim \in K} A/\sim$. Pro každé $\sim \in K$ označme $\pi_\sim : B \to A/\sim$ projekci ze součinu a $\mu_\sim : A \to A/\sim$ projekci Ω-algebry A na faktorovou algebru $A/\sim$. Podle věty o součinu existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi : A \to B$ takový, že $\pi_\sim \circ \varphi = \mu_\sim$. Pak platí: jádrem homomorfismu φ je kongruence $\approx$.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, "\pi_\sim"] \arrow[drrrr, "\pi_\simeq"] & & & & & & \\
 & \ldots & A/\sim & \ldots & A/\simeq & \cdots & (\sim, \simeq, \ldots \in K) \\
A \arrow[uu, dashed, "\varphi"'] \arrow[urr, "\mu_\sim"] \arrow[urrrr, "\mu_\simeq"'] & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Věta. *Nechť Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω-algeber. Nechť $\sim_V$ je relace z předchozí definice, tj. průnik množiny K všech kongruencí $\sim$ na Ω-algebře $F_X(\Omega)$ takových, že $F_X(\Omega)/\sim \in V$. Pak $\sim_V$ je kongruence na Ω-algebře $F_X(\Omega)$ a příslušná faktorová algebra $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ leží v třídě V.*

Důkaz. Podle připomenuté věty existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi : F_X(\Omega) \to \prod_{\sim\in K}(F_X(\Omega)/\sim)$, pro který komutuje:

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\sim\in K}(F_X(\Omega)/\sim) \arrow[drr, "\pi_{\simeq}"] \arrow[drrrr, "\pi_{\cong}"] & & & & & \\
 & \cdots & F_X(\Omega)/\simeq & \dots & F_X(\Omega)/\cong & \cdots \ (\simeq, \cong, \ldots \in K) \\
F_X(\Omega) \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, "\mu_{\simeq}"] \arrow[urrrr, "\mu_{\simeq}"'] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Přitom jádrem φ je kongruence $\sim_V$. Proto $F_X(V) = F_X(\Omega)/\sim_V$ je izomorfní s podalgebrou $\varphi(F_X(\Omega))$ součinu Ω-algeber z V. Protože V je uzavřená třída, platí $F_X(V) \in V$.

Volná algebra třídy V generovaná množinou X

Definice. Nechť Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω-algeber. Faktorová algebra $F_X(V) = F_X(\Omega)/{\sim_V}$ z předchozí věty se nazývá volná algebra třídy V generovaná množinou X. Nechť $\mu : X \to F_X(V)$ je zobrazení určené podmínkou $\mu(x) = \pi(x)$ pro všechny prvky $x \in X$, kde $\pi : F_X(\Omega) \to F_X(V)$ je projekce na faktorovou algebru. Pak zobrazení μ se nazývá vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[dr, squiggly, "\mu"] & \\
F_X(\Omega) \arrow[rr, "\pi"'] & & F_X(V)
\end{tikzcd}$$

Poznámka. Pokud třída V obsahuje nějakou Ω-algebru, která není jednoprvková nebo prázdná, lze snadno odvodit z následující věty, že zobrazení μ je injektivní. Není to však homomorfismus Ω-algeber, přestože se nazývá vnoření, vždyť X je jen množina, nikoli Ω-algebra.

Charakterizace volnosti pomocí homomorfismů

__Věta.__ Nechť Ω je typ, X množina. Nechť V je uzavřená třída Ω-algeber, $F_X(V) = F_X(\Omega)/{\sim_V}$ volná algebra třídy V generovaná množinou X, $\pi : F_X(\Omega) \to F_X(V)$ je projekce na faktorovou algebru a $\mu : X \to F_X(V)$ vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$. Nechť A je libovolná Ω-algebra z třídy V a $\alpha : X \to A$ libovolné zobrazení. Pak existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\psi : F_X(V) \to A$ splňující podmínku $\psi \circ \mu = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, rightsquigarrow, "\subseteq"'] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mu"'] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\alpha"] & \\
F_X(\Omega) \arrow[r, "\pi"'] & F_X(V) \arrow[r, dashed, "\psi"'] & A
\end{tikzcd}$$

__*Poznámka.*__ Neformálně řečeno, předchozí věta popisuje to, že prvky množiny X generují Ω-algebru $F_X(V)$ v rámci třídy V co „nejvolněji," tedy že tyto generátory jsou v Ω-algebře $F_X(V)$ svázány jen rovnostmi platnými v každé Ω-algebře z třídy V.

Důkaz věty

Podle věty o volnosti $F_X(\Omega)$ existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\varphi:\ F_X(\Omega) \to A$ splňující podmínku $\forall x \in X : \varphi(x) = \alpha(x)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[d, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\
F_X(\Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & F_X(V) & A
\end{tikzcd}
$$

$\varphi(F_X(\Omega))$ je podalgebra Ω-algebry $A \in V$, z uzavřenosti V na podalgebry $\varphi(F_X(\Omega)) \in V$. Z důsledku hlavní věty o faktorových algebrách pro jádro $\sim$ homomorfismu φ je $\varphi(F_X(\Omega)) \cong F_X(\Omega)/\sim$, z uzavřenosti V na obrazy v surjektivních homomorfismech $F_X(\Omega)/\sim \in V$. Tedy $\sim$ je jedna z těch kongruencí, jejichž průnikem je $\sim_V$. Proto $\sim_V \subseteq \sim$ a podle hlavní věty o faktorových algebrách existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\psi:\ F_X(V) \to A$ s vlastností $\psi \circ \pi = \varphi$, tedy komutuje diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\subseteq"'] \arrow[d, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\
F_X(\Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & F_X(V) \arrow[r, dashed, "\psi"] & A
\end{tikzcd}
$$

Proto $\psi \circ \mu = \psi \circ \pi \circ \subseteq = \varphi \circ \subseteq = \alpha$.

Jednoznačnost: $\psi' \circ \mu = \alpha \implies \psi' \circ \pi = \varphi \implies \psi' = \psi$.

Volná algebra je určena předchozí větou až na izomorfismus

<u>*Poznámka.*</u> Následující věta umožňuje konstruovat volné algebry jinak než z definice: odhadnout, jak asi vypadá, a pak ukázat, že je to opravdu ona, protože splňuje tuto charakterizační vlastnost.

<u>*Věta.*</u> *Nechť Ω je typ, X množina, V je uzavřená třída Ω-algeber, $F_X(V) = F_X(\Omega)/{\sim_V}$ volná algebra třídy V generovaná množinou X, $\mu : X \to F_X(V)$ vnoření generátorů do volné algebry $F_X(V)$. Nechť algebra U z třídy V a zobrazení $\nu : X \to U$ splňují následující podmínku: pro libovolnou Ω-algebru A z třídy V a libovolné zobrazení $\alpha : X \to A$ existuje jediný homomorfismus Ω-algeber $\rho : U \to A$ splňující podmínku $\rho \circ \nu = \alpha$. Pak platí: existuje izomorfismus Ω-algeber $\psi : F_X(V) \to U$ takový, že $\psi \circ \mu = \nu$.*

$$\forall A\ \forall\alpha \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, squiggly, "\nu"'] \arrow[dr, squiggly, "\alpha"] & \\ U \arrow[rr, dashed, "\rho"'] & & A \end{tikzcd} \quad\Longrightarrow\quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\nu"] & \\ F_X(V) \arrow[rr, dashed, hook, two heads, "\psi"'] & & U \end{tikzcd}$$

Důkaz věty

Podle předchozí věty pro Ω-algebru U a zobrazení $\nu : X \to U$ existuje homomorfismus Ω-algeber $\psi : F_X(V) \to U$ splňující podmínku $\psi \circ \mu = \nu$. Protože Ω-algebra U splňuje podmínku věty, pro Ω-algebru $F_X(V)$ a zobrazení $\mu : X \to F_X(V)$ existuje homomorfismus Ω-algeber $\rho : U \to F_X(V)$ splňující $\rho \circ \nu = \mu$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, squiggly, "\nu"] & \\
F_X(V) \arrow[loop left, "\iota_{F_X(V)}"] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & & U \arrow[ll, bend left, "\rho"] \arrow[loop right, "\iota_U"]
\end{tikzcd}$$

Homomorfismus $\rho \circ \psi$ splňuje $\rho \circ \psi \circ \mu = \rho \circ \nu = \mu = \iota_{F_X(V)} \circ \mu$, kde $\iota_{F_X(V)}$ je identita na $F_X(V)$. Z jednoznačnosti popsané v předchozí větě $\rho \circ \psi = \iota_{F_X(V)}$. Zcela analogicky se dokáže z jednoznačnosti popsané v předpokladech věty, že $\psi \circ \rho = \iota_U$. To znamená, že ψ je inverzní zobrazení k ρ, a tedy ρ je bijekce, tedy izomorfismus.

Příklady použití věty

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$ a V je varieta všech grup. Pak $F_\emptyset(V) \cong \{e\}$ je jednoprvková grupa, neboť do libovolné grupy jde z grupy $\{e\}$ jediný homomorfismus. Podobně $F_{\{x\}}(V)$ je nekonečná cyklická grupa $\langle x \rangle$. (Každá nekonečná cyklická grupa je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}, +)$.) Pro libovolnou grupu G a libovolný prvek $g \in G$ máme jediný homomorfimus $\langle x \rangle \to G$, totiž $x^n \mapsto g^n$.

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot, +, -, 0, 1\}$ a V je varieta všech okruhů. Pak $F_\emptyset(V)$ je okruh celých čísel $\mathbb{Z}$, neboť pro libovolný okruh R existuje jediný homomorfismus okruhů $\mathbb{Z} \to R$. Podobně $F_{\{x\}}(V)$ je okruh polynomů $\mathbb{Z}[x]$, protože pro libovolný okruh R a libovolný prvek $r \in R$ máme jediný homomorfimus $\mathbb{Z}[x] \to R$, totiž $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mapsto a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 1$, kde vpravo jsou celočíselné násobky prvků z R.

Příklad. Nechť $\Omega = \{+, -, 0\}$ a V je varieta všech komutativních grup. Pak $F_{\{x,y\}}(V) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, kde vnoření generátorů je definováno takto: $x \mapsto (1, 0)$, $y \mapsto (0, 1)$. Podobně $F_{\{x_1,\dots,x_n\}}(V) \cong \mathbb{Z}^n$.