

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Sbírka řešených úloh z
Globální Analýzy

TOMÁŠ MICHALÍK
PATRIK NOVOŠAD
RADEK SUCHÁNEK

BRNO 2017



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Sbírka řešených úloh z Globální Analýzy

Tomáš Michalík

Patrik Novosad

Radek Suchánek

Obsah

Úvod	iii
1. Hladká zobrazení číselných prostorů	1
2. Podvariety číselných prostorů	12
3. Hladké variety a hladká zobrazení	20
4. Tečné bandly a tečná zobrazení	25
5. Vektorová pole	31
6. Tenzory a tenzorová pole	41
7. Integrovaní vnějších forem	58
8. Podvariety v euklidovských prostorech	73
9. Riemannův prostor	79
10. Paralelní přenos vektorových polí	90
11. Torze a křivost lineární konexe	103
12. Kovariantní derivování tenzorových polí	110
Literatura	118

Úvod

Milý čtenáři,

sbírka příkladů, kterou se chystáte číst, je doplňujícím studijním materiálem k předmětu Úvod do globální analýzy, vyučovaném na Ústavu matematiky a statistiky Masarykovy univerzity. Vznikla jako projekt Fondu rozvoje MU pro rok 2016 a autoři si velice váží podpory, které se jim pro tvorbu studijního materiálu od univerzity dostalo. Chtěli bychom také poděkovat garantovi projektu profesoru J. Slovákovi za veškerou jeho pomoc při realizaci sbírky.

Naším cílem je přiblížit Vám rozsáhlou teorii tohoto kurzu ve formě příkladů s podrobnými řešeními. Na začátku každé kapitoly jsou nejprve uvedeny definice, věty a lemmata, které jsou v téměř nezměněné formě, a také bez důkazů, převzaty ze skript profesora I. Koláře [1]. Na některých místech jsme si dovolili text obohatit o drobné komentáře, zejména v pasážích, jež mohou být problematické, nebo u kterých vidíme potenciál nenásilně rozšířit perspektivu studenta. Budeme rádi, pokud pro Vás budou příklady srozumitelné a obohacující, avšak úroveň, kterou jsme se snažili vytvořit, vyžaduje zároveň jistou píli na straně studenta. Aby byl průchod textem co nejhladší, doporučujeme věnovat se také studiu literatury, zejména výše zmíněným skriptům, která při tvorbě sbírky sloužila jako hlavní referenční zdroj.

Přejeme Vám příjemné čtení a v případě nalezení chyb budeme vděční, kontaktujete-li nás na univerzitní mail.

Hladká zobrazení číselných prostorů

Definice 1.1.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že f je **funkce r -krát diferencovatelná** nebo funkce **třídy C^r** , má-li spojité parciální derivace až do řádu r včetně ve všech bodech U .

Poznámka. Funkce třídy C^0 znamená spojitou funkci. Funkce třídy C^∞ se nazývá **hladká** nebo **nekonečně diferencovatelná**. O funkci **analytické**, tj. takové, která je v každém bodě rozvinutelná v mocninnou řadu, říkáme, že je třídy C^ω . Platí implikace

$$f \in C^\omega \Rightarrow f \in C^\infty$$

Věta 1.2.

Funkce $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t \geq 0 \end{cases}$$

je hladká.

Věta 1.3.

Pro libovolné reálné číslo $c > 0$ je funkce $\chi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\chi_c(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \lambda(c-t)}$$

hladká.

Poznámka. Všimněme si, že funkce z věty 1.3 nabývá pouze hodnot 0 nebo 1

$$\chi_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

a je neklesající.

Definice 1.4.

Euklidovskou normu vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2} \tag{1.5}$$

Pomocí normy dále můžeme definovat otevřenou n -dimenzionální kouli se středem v bodě a a poloměrem r

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| < r\}. \quad (1.6)$$

Topologický uzávěr koule značíme $\bar{B}(a, r)$.

Věta 1.7.

Uvažujme funkci $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ závisující na třech parametrech $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $c > 0$, definovanou předpisem

$$\mu(x) = 1 - \chi_c(\|x - a\| - r), \quad (1.8)$$

pak platí

- funkce μ je hladká,
- $0 \leq \mu(x)$ a $\mu(x) = 0$ právě tehdy, když $x \notin B(a, r + c)$
- $\mu(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$, přičemž $\mu(x) = 1$ právě tehdy, když $x \in \bar{B}(a, r)$.

Definice 1.9.

Nosičem hladké funkce $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, rozumíme uzávěr množiny bodů, v nichž f má nenulovou hodnotu.

Poznámka. Pro funkci μ tedy platí, že je konstantní v jistém okolí bodu a a jejím nosičem je kompaktní množina $\bar{B}(a, r + c)$.

Následující věta se nazývá **Whitneyho** a popisuje významnou charakteristickou vlastnost hladkých funkcí.

Věta 1.10.

Každá uzavřená množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je množinou nulových bodů nějaké nezáporné hladké funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice 1.11.

Nechť I je libovolná indexová množina. Otevřené pokrytí (V_α) , $\alpha \in I$, otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **lokálně konečné**, jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje okolí, mající neprázdný průnik pouze s konečně mnoha množinami pokrytí (V_α) .

Následující věta je jednou z mnoha verzí tzv. věty o **rozkladu jednotky**. Jejím užitím jsme schopni globalizovat lokální konstrukce.

Věta 1.12.

Nechť (V_α) , $\alpha \in I$, je lokálně konečné pokrytí otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$. Pak na U existuje soustava nezáporných hladkých funkcí (f_α) , $\alpha \in I$, taková, že platí

- a) $f_\alpha(x) \neq 0$ právě tehdy, když $x \in V_\alpha$,
 b) $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in U$.

Poznámka. Od nynějška budeme značení $f: U \rightarrow V$ využívat výhradně pro zobrazení mezi otevřenými množinami $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^k$, pokud nebude řečeno jinak.

Definice 1.13.

Uvažujme zobrazení $f: U \rightarrow V$, které je dáno k -ticí funkcí

$$y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^k = f^k(x^1, \dots, x^n), \quad (1.14)$$

které nazýváme **složky zobrazení** f . Píšeme také

$$y^p = f^p(x^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, k \quad (1.15)$$

nebo stručně také $y = f(x)$. Říkáme, že f je **diferencovatelné zobrazení třídy** C^r jestliže všechny jeho složky jsou funkce třídy C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$. **Hladké zobrazení** znamená zobrazení třídy C^∞ , tj. takové, které je diferencovatelné do libovolného řádu.

Věta 1.16.

Uvažujme otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^k, W \subset \mathbb{R}^m$ a dvojici zobrazení $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$ třídy C^r . Pak složené zobrazení $g \circ f: U \rightarrow W$ je také zobrazení třídy C^r .

Poznámka. Pro přehlednost při indexových výpočtech si zafixujeme následující rozmezí indexů

$$i, j = 1, \dots, n, \quad p, q = 1, \dots, k, \quad s, t = 1, \dots, m. \quad (1.17)$$

Vyskytne-li se tedy v textu značení (x^i) , míníme tím n -tici souřadnic v prostoru \mathbb{R}^n , obdobně $(f^p(x^i))$ značí souřadné vyjádření k -tice složek zobrazení $f: U \rightarrow V$ a analogicky pro ostatní indexy.

Definice 1.18.

Matici $\left(\frac{\partial f^p(a)}{\partial x^i}\right)$ nazýváme **Jacobiho matice** zobrazení f v bodě $a \in U$. Hodnost této matice označujeme $Rk_a f$ a nazýváme ji **hodnost zobrazení** f v bodě a . Speciálně, je-li $k = n$, pak determinant $\det\left(\frac{\partial f^p(a)}{\partial x^i}\right)$ nazýváme **Jacobián** (čteme *jakobián*) zobrazení f v bodě a .

Věta 1.19.

Jacobiho matice složeného zobrazení $g \circ f$ v bodě a je součinem Jacobiho matic $\left(\frac{\partial g^s(f(a))}{\partial y^p}\right)$ a $\left(\frac{\partial f^p(a)}{\partial x^i}\right)$

Definice 1.20.

Nechť $U, V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Bijektivní zobrazení $f: U \rightarrow V$ nazýváme **difeomorfismus třídy C^r** , jestliže f i inverzní zobrazení $f^{-1}: V \rightarrow U$ jsou třídy $C^r, r \geq 1$.

Poznámka. Difeomorfismus mezi otevřenými množinami můžeme chápat jako soustavu křivočarých souřadnic.

Věta 1.21.

Jestliže $f: U \rightarrow V$ je difeomorfismus, pak pro Jacobián platí

$$\det \left(\frac{\partial f^p(a)}{\partial x^i} \right) \neq 0 \quad \forall a \in U. \quad (1.22)$$

Z matematické analýzy víme, že kružnici nelze vyjádřit jako graf jediné funkce. Zároveň však víme, že z obecného tvaru

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

lze vyjádřit proměnnou y pomocí kladné a záporné větve odmocniny. Poté můžeme popsat kružnici po částech pomocí grafu kladné a záporné části y . Zobecněním této úvahy dospějeme k otázce lokálního vyjádření geometrického objektu zadaného soustavou rovnic pomocí grafu nějakého zobrazení. Podmínku existence takového zobrazení, které může být v rovnicích obsaženo implicitně, popisuje následující věta o **implicitním zobrazení**.

Věta 1.23.

Nechť $G^p(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k), p = 1, \dots, k$, jsou funkce třídy $C^r, r \geq 1$, definované na jistém okolí W bodu $(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, které splňují

$$G^p(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^k) = 0 \quad (1.24)$$

$$\det \left(\frac{\partial G^p(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^k)}{\partial y^q} \right) \neq 0. \quad (1.25)$$

Pak existuje okolí U bodu $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ a okolí V bodu $(b^1, \dots, b^k) \in \mathbb{R}^k$ taková, že $U \times V \subset W$ a ke každému bodu $(x^1, \dots, x^n) \in U$ existuje právě jeden bod $(y^1, \dots, y^k) \in V$, pro nějž platí

$$G^p(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k) = 0. \quad (1.26)$$

Takto určené funkce $y^p = f^p(x^1, \dots, x^n)$ jsou rovněž třídy C^r .

Lemma 1.27.

Nechť $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $C^r, U \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže Jacobián f je nenulový v každém bodě, pak $f(U)$ je otevřená množina.

Věta 1.28.

Nechť $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^r , $U \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže existuje $a \in U$, ve kterém je Jacobián f nenulový, pak také existují okolí $\tilde{U} \subset U$ bodu a , okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu $f(a)$, pro něž je zúžené zobrazení $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V$ difeomorfismus.

Definice 1.29.

Zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$, nazveme **imerse**, je-li $Rk_a f = n$ pro všechna $a \in U$.

Poznámka. Hodnota Jacobiho matice $\left(\frac{\partial f^p(a)}{\partial x^i}\right)$ je nejvýše rovna minimu dimenzí n a k , proto pro imersi platí $n \leq k$.

Věta 1.30.

Je-li $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ imerse, pak pro každé $a \in U$ existují okolí \tilde{U} bodu a , okolí V bodu $f(a)$ a křivočará soustava souřadnic \tilde{y}^p na V taková, že zúžené zobrazení $f|_{\tilde{U}}$ má tvar

$$\tilde{y}^1 = x^1, \dots, \tilde{y}^n = x^n, \tilde{y}^{n+1} = 0, \dots, \tilde{y}^k = 0. \quad (1.31)$$

Definice 1.32.

Zobrazení $f: U \rightarrow V$ mezi otevřenými množinami $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$, nazveme **submerse**, jestliže $Rk_a f = k$ pro všechna $a \in U$.

Poznámka. Ze stejného důvodu jako v případě imerse musí v případě submerse platit $n \geq k$.

Věta 1.33.

Je-li $f: U \rightarrow V$ submerse, pak pro všechna $a \in U$ existuje okolí \tilde{U} bodu a , spolu s křivočarou soustavou souřadnic \tilde{x}^i na \tilde{U} takovou, že zúžené zobrazení $f|_{\tilde{U}}$ má tvar

$$y^1 = \tilde{x}^1, \dots, y^k = \tilde{x}^k. \quad (1.34)$$

Shrňme význam pojmů imerse a submerse do následující poznámky. Každá imerse má lokálně tvar vložení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$. Každá submerse má lokálně tvar projekce $\mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^{k+m}) \mapsto (x^1, \dots, x^k)$.

Cvičení 1.35.

Určete příklad zobrazení, které

- | | |
|---|--|
| 1. a) patří do třídy C^0 , ale nepatří do C^1 | 2. patří do třídy C^r |
| b) patří do C^1 , ale nepatří C^2 | c) patří do C^2 |
| | 3. patří do třídy C^{r+1} , ale nikoliv do C^r |

4. je hladké i analytické
5. je hladké, ale není analytické
6. je hladké, invertibilní, ale nikoliv difeomorfismus
7. je difeomorfismus .

Řešení. 1. Zobrazení patřící do třídy C^0 je například funkce absolutní hodnoty $f(x) = |x|$. Ta je spojitá, v nule však nemá derivaci.

Zobrazení třídy C^1 je kupříkladu $f(x) = (\sin x, x^{\frac{3}{2}})$. Ačkoliv je jeho první složka $f_1(x) = \sin x$ hladká, druhá složka $f_2(x) = x^{\frac{3}{2}}$ je třídy C^1 . Obdobně $f(x, y, z) = (x^2 + y + z^4, x^{\frac{5}{2}}, e^x)$ je zobrazení třídy C^2 . Obecně: nechť i je index určující, do které třídy náleží složka zobrazení. Pak třída zobrazení je podle 2.8 určena třídou s nejmenším i .

2. Funkce $f(x) = x^{\frac{2r+1}{2}}$ má r spojitých derivací, r -tá má tvar

$$f^{(r)}(x) = (2r+1)!! \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

symbolem $n!! = n \cdot (n-2) \cdots 1$ myslíme dvojité faktoriál. Přitom $f^{(r+1)}(x) = \frac{1}{2}(2r+1)!! \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ již v 0 není definovaná a tedy ani diferencovatelná.

3. Tento případ není možný. Triviálně: má-li zobrazení f každou svou složku spojitě diferencovatelnou až do řádu $r+1$ včetně, pak je každá složka i r -krát spojitě diferencovatelná, proto f musí náležet do C^r .
4. Funkce zadaná polynomem $f(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ je hladká. Libovolné zobrazení, které má ve svých složkách polynomiální funkce je hladké zobrazení, které je analytické. Rozvoj do mocninné řady polynomu je polynom sám. Dalším příkladem je exponenciální funkce $f(x) = e^x$, což je také hladké i analytické zobrazení, s rozvojem ve tvaru

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

5. Hladké zobrazení je diferencovatelné do libovolného řádu. Můžeme proto sestavit Taylorův rozvoj. Otázkou je, zda-li výsledná mocninná řada ve vhodném okolí libovolného bodu konverguje (bodově) k původní funkci. Příkladem splňujícím naše podmínky je funkce z věty 1.2

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

kteřá je hladká, nikoliv však analytická, k čemuž je potřeba netriviální důkaz. Tento příklad uvádíme bez řešení pouze pro ilustraci faktu nerovnosti množin $C^\infty \neq C^\omega$. Poznamenejme ještě, že hladké neanalytické funkce komplexní proměnné neexistují.

6. Funkce $f(x) = x^n$ uvažovaná na definičním oboru $[0, \infty)$ je hladká a invertibilní. Inverze je $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$, která však není v 0 diferencovatelná (derivace funkce f^{-1} jde v limitě zprava k nekonečnu). Protože inverze není diferencovatelná, nemůže být f difeomorfismus.
7. Exponenciální funkce $f(x) = e^x$, s inverzí $f^{-1} = \ln x$, je příkladem hladkého difeomorfismu intervalu $(0, \infty)$. Obdobně pro zobrazení $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + y^2 + 1, e^{xy})$. Matice jeho parciálních derivací má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$$

a je nenulová na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Věta 1.28 nám říká, že pro každý bod \mathbb{R}^2 existuje vhodné okolí, na kterém lze f zúžit na difeomorfismus. ◇

Cvičení 1.36.

Ukažte, že translace a lineární izomorfismy \mathbb{R}^n jsou difeomorfismy.

Řešení. Translace je popsána vektorem posunutí, označme jej $U = (u_1, \dots, u_n)$. Takto získáme nové souřadnice přičtením U k původním souřadnicím

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + u^1, \dots, x^n + u^n)$$

Jelikož nové proměnné y^i jsou funkce v původních proměnných, tj. $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, můžeme spočítat matici parciálních derivací $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$. Ta bude rovna jednotkové matici, protože hodnoty u_i jsou konstanty

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i + u^i}{\partial x^j} = \delta_j^i,$$

kde δ_j^i je Kroneckerovo delta. Determinant matice je konstantně roven jedničce pro libovolný bod prostoru \mathbb{R}^n . Podle věty 1.28 je translace difeomorfismem.

Z lineární algebry víme, že lineární izomorfismus \mathbb{R}^n můžeme popsat pomocí reálné matice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a obraz je dán součinem s maticí

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (a_{11}x^1 + \dots + a_{1n}x^n, \dots, a_{n1}x^1 + \dots + a_{nn}x^n).$$

Jednoduše vidíme, že matice parciálních derivací nových souřadnic $(y^i) = (a_{i1}x^1 + \dots + a_{in}x^n)$ podle původních souřadnic (x^j) je rovna matici A . Její determinant je nenulový podle předpokladu, jelikož A může reprezentovat lineární izomorfismus právě tehdy, když $\det A \neq 0$. Proto je každý lineární izomorfismus difeomorfismem. ◇

Cvičení 1.37.

Rozhodněte, na jakých množinách jsou následující zobrazení difeomorfismy: transformace ze standardních souřadnic do

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. polárních | 3. sférických |
| 2. cylindrických | 4. hyperbolických |

Řešení. 1. Polární souřadnice popisující rovinu \mathbb{R}^2 mají tvar

$$\begin{aligned}x(r, \varphi) &= r \cos \varphi, \\y(r, \varphi) &= r \sin \varphi,\end{aligned}$$

kde r je délka průvodiče (tj. vzdálenost popisovaného bodu od počátku) a φ je úhel sevřený mezi průvodičem a kladnou částí osy x . Spočteme matici parciálních derivací

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Determinant matice je roven

$$J = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - (-\sin \varphi \cdot \sin \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

Nenulovost Jacobiánu nutí podmínku $r > 0$. Dále aby souřadnice byly bijekce, musíme úhel φ omezit na interval $[0, 2\pi)$. Poté podle věty 1.28 jsou na množině $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ polární souřadnice difeomorfismem.

2. Cylindrické souřadnice popisující body \mathbb{R}^3 vypadají následovně

$$\begin{aligned}x(r, \varphi, z) &= r \cos \varphi, \\y(r, \varphi, z) &= r \sin \varphi, \\z(r, \varphi, z) &= z\end{aligned}$$

kde $r > 0$ je délka průvodiče (vzdálenost bodu (x, y, z) od počátku souřadného systému), $\varphi \in (0, 2\pi)$ je úhel mezi průvodičem a kladnou částí osy x (měřený pro hodnotu $z = 0$, případně můžeme uvažovat projekci průvodiče do roviny xy). Jacobiho matice souřadnic je

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle třetího řádku ihned vidíme, že hodnota Jacobiánu je stejná, jako pro polární souřadnice

$$J = r.$$

a podle 1.28 jsou cylindrické souřadnice difeomorfismem na $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$.

3. Sférické souřadnice v \mathbb{R}^3 jsou

$$x(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z(r, \varphi, \theta) = r \cos \theta,$$

kde r je délka průvodiče, θ je úhel, který svírá průvodič s kladnou částí osy z a φ je úhel, který svírá kolmá projekce průvodiče do roviny xy s osou x . Jacobiho matice pro tyto souřadnice je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Determinant spočteme Laplaceovým rozvojem podle třetího řádku

$$\begin{aligned} \det J &= r^2 \cos \theta \cdot \det \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &+ r^2 \sin \theta \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cos \theta (\sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) \\ &+ r^2 \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta \sin^2 \theta \\ &= r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Nenulová hodnota nastane pro $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$. Zajímá-li nás, na jaké množině jsou tyto souřadnice difeomorfismus, potřebujeme nejen $J \neq 0$, ale také aby úhel φ nabýval pouze hodnot z intervalu $[0, 2\pi)$ (z podmínky bijekce). Podle věty 1.28 jsou na množině $(0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ sférické souřadnice difeomorfismus.

4. Hyperbolické souřadnice mají tvar

$$x(u, v) = ve^u$$

$$y(u, v) = ve^{-u}$$

a difeomorfně zobrazují $(\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}) \times (0, \infty)$ na $(0, \infty) \times (0, \infty)$, což je v souladu s větou 1.28 vzhledem k hodnotě Jacobiánu

$$J = \det \begin{pmatrix} uve^u & e^u \\ -uve^{-u} & e^{-u} \end{pmatrix} = uv(e^{u-u} + e^{u-u}) = uv$$

◇

Cvičení 1.38.

Udejte příklad zobrazení, které je

1. imerse,
2. submerse.

Řešení. Každý difeomorfismus je imerse. Parametrizaci přímky v \mathbb{R}^n můžeme chápat jako imersi $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (p^1(t), \dots, p^n(t))$. Analogicky plocha daná grafem hladké funkce $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ je imersí \mathbb{R}^2 (nebo vhodné podmnožiny) do \mathbb{R}^3 .

Každý difeomorfismus je také submersí. Základním příkladem submerse je dále projekce na prvních k -složek $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^k)$, $k \leq n$. Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow S^1$, $(x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ které zobrazuje \mathbb{R}^2 bez počátku na jednotkovou kružnici se středem v počátku je submerse. \diamond

Cvičení 1.39.

Nalezněte difeomorfismus otevřené koule $B(a, r)$ s \mathbb{R}^n .

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že složení difeomorfismů je opět difeomorfismus, což je důsledkem věty 1.16. Nalezneme tedy vhodná zobrazení, pomocí kterých hledaný difeomorfismus poskládáme. Nejprve uvažujme

$$\varphi: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definované na otevřené jednotkové kouli se středem v nule $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$, zadané předpisem

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}},$$

pomocí normy 1.4, jejíž inverze je

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n &\rightarrow B(0, 1), \\ y &\mapsto \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}. \end{aligned}$$

Ověřme, že se jedná skutečně o difeomorfismus. Zobrazení φ i φ^{-1} jsou třídy C^∞ . Diferencovatelnost se může pokazit ve jmenovateli, ten je však v obou případech na patřičných definičních oborech hladký, jelikož na definičním oboru φ platí $1 - \|x\|^2 > 0$ (koule je jednotková a otevřená, tj. $\|x\|^2 < 1$) a pro φ^{-1} je taktéž $1 + \|y\|^2 > 0$. Jediný problém nám činí euklidovská norma, která není v nule diferencovatelná. Tento problém můžeme vyřešit tak, že odmocninu (která je zdrojem problému) ve funkci $\| - \|$ nahradíme v libovolně malém okolí nuly hladkou rostoucí funkcí, kterou poté pomocí rozkladu jednotky se zbylou částí odmocniny "slepíme". Toto intuitivní odůvodnění nebudeme rozvádět podrobně, abychom se neztratili v přílišných formálních argumentech a poprosíme proto čtenáře o shovívavost. Dále budeme symbolem $\| - \|$ chápat novou normu, která byla v okolí nuly vhodně nahrazena a φ chápeme definovanou vzhledem k této normě. Ověřme, že složení f a f^{-1} dává

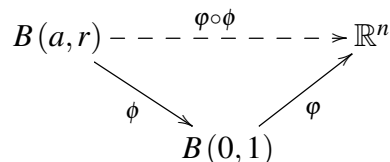
identitu.

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1} \left(\frac{x}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) & (f \circ f^{-1})(y) &= f \left(\frac{y}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= \frac{\frac{x}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \left\| \frac{x}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}} & &= \frac{\frac{y}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - \left\| \frac{y}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\frac{x}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}} & &= \frac{\frac{y}{(1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - \frac{\|y\|^2}{1 + \|y\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= x & &= y
 \end{aligned}$$

V levém sloupci jsme při odstranění normy využili $1 - \|x\|^2 > 0$ a v pravém $1 + \|y\|^2 > 0$. Máme tedy k dispozici difeomorfismus mezi $B(0, 1)$ a \mathbb{R}^n . Z příkladu 1.36 dále víme, že lineární izomorfismy a translace jsou také difeomorfismy, můžeme proto složením vhodného posunutí s proškálováním vytvořit difeomorfismus ϕ mezi otevřenou koulí s libovolným středem i poloměrem a jednotkovou $B(0, 1)$, tj.

$$\phi : B(a, r) \rightarrow B(0, 1)$$

Hledaný difeomorfismus je pak dán složením $\varphi \circ \phi$



◇

Podvariety číselných prostorů

Přirozeným zobecněním křivky nebo plochy v \mathbb{R}^n je pojem m -rozměrné podvariety v \mathbb{R}^n .

Definice 2.1.

Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **m -rozměrná podvarieta třídy C^r** , v \mathbb{R}^n , $m \leq n$, v jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W spolu s difeomorfismem $\psi: W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^r , který zobrazí $W \cap M$ na otevřenou podmnožinu $U \subset V$ určenou rovnicemi

$$x^{m+1} = 0, \dots, x^n = 0. \quad (2.2)$$

Poznámka. Podvarietu v \mathbb{R}^n budeme ve většině případů stručně nazývat pouze podvarietou, nicméně budeme mít stále na paměti, že se jedná o objekt existující vnořený v reálném prostoru vhodné dimenze. Důvod této poznámky je, že v dalších kapitolách se budeme setkávat s pojmem (hladké) variety, jejíž definice již nezávisí na vnoření do jiného prostoru.

Z předešlé definice vyplývá, že m -rozměrnou podvarietu můžeme lokálně chápat jako část m -rozměrného lineárního podprostoru v \mathbb{R}^n , která byla zakřivena. Informaci o způsobu zakřivení v sobě nese právě ψ .

Definice 2.3.

Zúžení difeomorfismu ψ z definice 2.1 zadává zobrazení $\phi: W \cap M \rightarrow U$, které nazýváme **lokální soustava souřadnic** na podvarietě M . Inverze k ϕ , chápaná jako zobrazení $\phi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, se pak nazývá **lokální parametrické vyjádření podvariety M** .

Difeomorfismus ψ nám říká pouze lokálně, jak dostat ze zakřivené podvariety lineární podprostor, což zejména může znamenat, že "narovnáni" celé podvariety nemusí být možné (tj. z definice neplyne existence globálního difeomorfismu mezi podvarietou a lineárním podprostorem). Mezi příklady této situace patří například válec, Möebiova páska, sféra, Kleinova lahev, rotační paraboloid nebo třeba torus.

Následující věta popisuje způsob zadání podvariety pomocí systému rovnic.

Věta 2.4.

Uvažujme bod $b \in \mathbb{R}^{n-m}$ a zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ třídy C^r , $U \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže f má v každém bodě množiny $f^{-1}(b)$ maximální hodnotu, pak $f^{-1}(b)$ je m -rozměrná podvarieta třídy C^r .

Definice 2.5.

Nechť ϕ_1 a ϕ_2 jsou lokální soustavy souřadnic na podvarietě M (zadané zúžením difeomorfismů z definice 2.3) definované na W_1 a W_2 . Dále uvažujme otevřené množiny U_{12} a U_{21} v \mathbb{R}^m zadané obrazem průniku definičních oborů $W_1 \cap W_2 \cap M$ při ϕ_1, ϕ_2

$$U_{12} = \phi_1(W_1 \cap W_2 \cap M), \quad U_{21} = \phi_2(W_1 \cap W_2 \cap M).$$

Pak složené zobrazení $\phi_{12} := \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_{12} \rightarrow U_{21}$ nazýváme **přechodové zobrazení** mezi dvojicí lokálních souřadnic (ϕ_1, ϕ_2) .

Poznámka. Vysvětlíme si předešlou definici a pomocí ní si vytvoříme konkrétnější představu o podvarietách. Z 2.1 víme, že každá podvarieta je lokálně vyjádřitelná pomocí nějakého difeomorfismu jako otevřená podmnožina \mathbb{R}^n . Definice 2.5 nám říká, že máme k dispozici nejen lokální popis podvariety, ale také způsob, jak "slepit" jednotlivé její části. Platí tedy: podvarieta jako celek obecně nevypadá jako \mathbb{R}^n (není difeomorfní s \mathbb{R}^n). Vhodné okolí každého bodu podvariety je ztotožnitelné s otevřenou podmnožinou v \mathbb{R}^n . Popisy (lokální souřadnice) na těchto okolicích jsme schopni ztotožnit na jejich průniku.

Věta 2.6.

Každé přechodové zobrazení ϕ_{12} dvojice lokálních map (ϕ_1, ϕ_2) je difeomorfismus třídy C^r otevřené množiny $U_{12} \subset \mathbb{R}^m$ na otevřenou množinu $U_{21} \subset \mathbb{R}^m$.

V následujícím zobecníme pojem diferencovatelnosti zobrazení mezi reálnými prostory na podvariety. Nejprve však definujeme pojem spojitého zobrazení mezi podvarietami.

Poznámka. Připomínáme, že \mathbb{R}^n má strukturu topologického prostoru. Topologie je generovaná otevřenými koulemi. Dále platí, že podvarieta $M \subset \mathbb{R}^n$ je topologický prostor vzhledem k topologii podprostoru.

Definice 2.7.

Zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi podvarietami se nazývá **spojité**, jestliže je spojitě v topologickém myslu.

Definice 2.8.

Uvažujme podvariety $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^k$ třídy C^r . Pak $f : M \rightarrow N$ nazýváme **zobrazení třídy C^s** , $s \leq r$, jestliže pro každé $a \in M$ existují okolí $U \subset M$ bodu a , okolí $V \subset N$ bodu $f(a)$ s vlastností $f(U) \subset V$ a lokální souřadnice

$$\phi : U \rightarrow W_1 \subset \mathbb{R}^m, \quad \psi : V \rightarrow W_2 \subset \mathbb{R}^l$$

takové, že složené zobrazení

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : W_1 \rightarrow W_2$$

je třídy C^s .

Poznámka. Definice zobrazení třídy C^s mezi podvarietami třídy C^r (pak nutně $s \leq r$) nezávisí na volbě lokálních souřadnic.

Věta 2.9.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^k$, $P \subset \mathbb{R}^l$ jsou podvariety třídy C^r . Dále nechť

$$f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$$

jsou zobrazení třídy C^s , $s \leq r$. Pak i složené zobrazení

$$g \circ f: M \rightarrow P$$

je třídy C^s .

Připomínáme, že je-li počet proměnných menší než 4, pak je označujeme písmeny x, y, z , indexy u těchto písmen poté značí mocniny.

Cvičení 2.10.

Rozhodněte, jsou-li následující množiny podvariety euklidovského prostoru. Jestliže ano, určete jejich dimenzi a do jaké třídy náleží.

1. Bernoulliho lemniskáta.
2. Obecný vektorový prostor a obecný afinní podprostor v \mathbb{R}^n .
3. Řešení rovnice $x^n = \sin(x^1 x^2 \dots x^n)$ a graf libovolné hladké funkce.
4. Podmnožina \mathbb{R}^3 zadaná rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x - y = 0$, kde $r > 0$

Řešení. Většinu příkladů spočteme aplikací věty 2.4 a rozepíšeme si tedy způsob užití. Zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, z uvažované věty, je $(n-m)$ -ticí funkcí

$$f^s(x^1, \dots, x^n), \quad s = 1, \dots, n-m$$

a bod $b \in \mathbb{R}^{n-m}$, tj. $b = (b^1, \dots, b^{n-m})$ je $(n-m)$ -ticí čísel. Množina $f^{-1}(b)$ je tedy zadaná soustavou $(n-m)$ rovnic

$$f^s(x^1, \dots, x^n) = b^s, \quad s = 1, \dots, n-m.$$

Tvrzení dále říká, že na množině $f^{-1}(b)$ je hodnota zobrazení f maximální. Hodnota zobrazení, Rk_{af} , jsme si v předešlé kapitole definovali jako hodnotu odpovídající Jacobiho matice $\left(\frac{\partial f^s}{\partial x^i}\right)$. Vzhledem k dimenzím víme, že hodnota této matice musí být $n-m$.

1. Bernoulliho lemniskáta je rovinná křivka, která je určena dvěma body A_1, A_2 na ose x , které jsou oba ve vzdálenosti a od počátku. Bod P , ležící na lemniskátě, musí splňovat vztah $\|PA_1\| \cdot \|PA_2\| = a^2$. Jelikož tato křivka protne v bodě $(0,0)$ sebe samu, nemůže existovat okolí $W \subset \mathbb{R}^2$ tohoto bodu, jehož průnik s křivkou bude difeomorfní otevřené úsečce. Důvod je, že každý difeomorfismus je spojitou bijekcí a v našem případě určitě nebude splněna podmínka injektivit. Z věty 2.4 proto obměnou plyne, že musí existovat bod, ve

kterém hodnost zobrazení f nebude maximální. Nalezněme tento bod. Lemniskátu lze v kartézských souřadnicích popsat rovnicí

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2), \quad a > 0$$

a platí $a^2 > x^2$. Přepíšeme rovnici do tvaru $f(x, y) = 0$

$$2a^2x^2 - 2a^2y^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 = 0$$

a spočteme Jacobiho matici, která bude mít pouze jediný řádek, jelikož zobrazení f má pouze jednu složku.

$$\left(\frac{\partial f^s}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (4a^2x - 4x^3 - 4xy^2, -4a^2y - 4x^2y - 4y^3) .$$

Aby matice měla maximální hodnost (tj. 1) v každém bodě \mathbb{R}^2 , alespoň jeden sloupec musí být vždy nenulový. Zkoumejme podmínky na proměnné, položíme-li oba sloupce rovny nule. Začneme druhým

$$0 = -4a^2y - 4x^2y - 4y^3 = -4y(a^2 + x^2 + y^2) .$$

Výraz v závorce je vždy větší roven nule, protože předpokládáme $a > 0$. Musí proto platit $y = 0$, což dosadíme do prvního sloupce

$$0 = 4a^2x - 4x^3 = 4x(a^2 - x^2) .$$

Protože $a^2 > x^2$, dostáváme $x = 0$. V bodě $(0, 0)$ má f nulovou hodnost.

2. Z definice podvariety vyplývá, že pro libovolné n je \mathbb{R}^n podvarieta dimenze n . Na tomto prostoru totiž máme globálně definované standardní souřadnice (x^1, \dots, x^n) . Jinak řečeno, chceme-li nalézt difeomorfismus z definice 2.1, stačí vzít identické zobrazení na celém prostoru. Nyní uvažme obecný vektorový prostor V dimenze n . Z lineární algebry víme, že vektorové prostory stejné dimenze jsou izomorfní. Volba báze ve V zadává globální souřadnice na V a zároveň jednoznačně určuje difeomorfismus s \mathbb{R}^n (lineární izomorfismus daný maticí přechodu od zvolené báze ke standardní).

Obecný vektorový prostor dimenze n je tedy podvarieta dimenze n . Příklad afinního podprostoru vyřešíme tak, že si uvědomíme, jak geometricky z afinního podprostoru získat vektorový podprostor. Volbou počátku v afinním podprostoru jednoznačně určíme vektor posunutí jako rozdíl tohoto bodu a nuly. Protože každé posunutí je difeomorfismus a složení difeomorfismů je difeomorfismus, libovolný afinní podprostor je podvarieta. Její dimenze je rovna dimenzi zaměření. Jelikož afinní podprostor lze vyjádřit jako řešení rovnice $a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + c = 0$, tj. rovnice tvaru $f(x^1, \dots, x^n) = 0$, kde f je hladká, jedná se o hladkou podvarieta.

3. Rovnici $x^n = \sin(x^1x^2 \dots x^n)$ přepíšeme do tvaru $f(x^1, \dots, x^n) = 0$

$$\sin(x^1x^2 \dots x^n) - x^n = 0 .$$

Pro přehlednost zaveďme substituci $\mathbf{z} = x^1 x^2 \cdots x^n$, ve které parciální derivace mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1} &= x^2 \cdots x^n \cos(\mathbf{z}) \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} &= x^1 x^3 \cdots x^n \cos(\mathbf{z}) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} &= x^1 \cdots x^{n-1} \cos(\mathbf{z}) - 1\end{aligned}$$

Jacobiho matice sestávající z jediného řádku vypadá následovně

$$(x^2 \cdots x^n \cos(\mathbf{z}), x^1 x^3 \cdots x^n \cos(\mathbf{z}), \dots, x^1 x^2 \cdots x^{n-1} \cos(\mathbf{z}) - 1) .$$

Ukážeme, že vždy alespoň jeden sloupec bude nenulový. Nechť je 1. až $(n-1)$. sloupec nulový. Pak musí platit buďto $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$ a nebo $\cos(\mathbf{z}) = 0$, což dává v obou případech na posledním sloupci hodnotu -1 . Jedná se tedy o $(n-1)$ -rozměrnou podvarietu, která je hladká, neboť $f(x^1, \dots, x^n) = \sin(x^1 x^2 \cdots x^n) - x^n$ je hladká funkce.

Z analogického důvodu platí, že pro libovolnou funkci $f \in C^r$ je její graf

$$\{(x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

n -rozměrnou podvarietou třídy C^r . Rovnice grafu je

$$f(x^1, \dots, x^n) = x^{n+1} \Leftrightarrow F(x^1, \dots, x^{n+1}) = f - x^{n+1} = 0$$

a odpovídající (jednořádková) Jacobiho matice funkce F má v prvních n sloupcích parciální derivace funkce f a v posledním jedničku. Stejný argument můžeme použít pro $f \in C^\infty$, tedy graf hladké funkce je hladkou varietou dimenze n .

4. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby. Ačkoliv se první z nich odkazuje se na výsledek jiné kapitoly, popíšeme si jeho myšlenku. Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ popisuje dvou-dimenzionální sféru se středem v bodě 0 a rovnice $x - y = 0$ popisuje rovinu na které leží přímka $y = x$ a osa z . Množina zadaná řešením obou rovnic je průnik roviny se sférou, což je kružnice o poloměru r , se středem v bodě 0. V následující kapitole uvidíme, že libovolná kružnice je podvarietou dimenze 1 tak, že sestrojíme lokální souřadnice.

Druhý způsob využívá větu 2.4. Uvažovaná funkce je tvaru

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2, x - y)$$

a její Jacobiho matice je velikosti 2×3 . Vypadá následovně

$$\left(\frac{\partial f^s}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Druhý řádek je vždy nenulový a první se vynuluje pouze v bodě 0, avšak tento bod rovnici sféry nespĺňuje, proto bude mít matice na zadané množině maximální hodnot. Podle věty 2.4 se jedná o dvourozměrnou podvarietu, která je hladká. \diamond

Cvičení 2.11.

Ukažte, že je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená podmnožina, pak je M hladkou podvarietou dimenze n .

Řešení. Ve cvičení 2.10 jsme si ve druhém bodě ukázali, že samotné \mathbb{R}^n je hladkou podvarietou dimenze n . Nechť M je otevřená podmnožina v \mathbb{R}^n . Podle 2.1 potřebujeme ukázat, že ke každému bodu $a \in M$ existuje jeho okolí, které je difeomorfní s otevřenou podmnožinou v \mathbb{R}^n . To je však triviální, protože samotné M sestává z bodů, které již souřadnicový popis mají "zděděný" z okolního \mathbb{R}^n . Okolí je samotné M a difeomorfismus je dán identitou. \diamond

Cvičení 2.12.

Dokažte, že množina všech lineárních izomorfismů prostoru \mathbb{R}^n je hladkou podvarietou. Určete její dimenzi.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že lineární izomorfismy prostoru \mathbb{R}^n odpovídají reálným maticím $n \times n$ s nenulovým determinanem. Prostor všech těchto matic se značí $GL(n, \mathbb{R})$. Každý prvek $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ sestává z n^2 složek a_{ij} . Disponujeme proto injektivním zobrazením

$$GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

kteřé je dáno ztotožněním A s n^2 -ticí reálných čísel

$$(a_{ij}) \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}). \quad (2.13)$$

Determinant je poté funkcí

$$\det: GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R},$$

kteřá je hladká. To plyne z formulky pro determinant, jejíž tvar známe z lineární algebry

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma_i},$$

kde S_n je množina všech permutací na n prvcích. Pravá strana rovnice je polynom v proměnných a_{ij} a z matematické analýzy víme, že polynomy ve více proměnných jsou hladké funkce. Pro nás to zejména znamená, že můžeme množinu izomorfismů vyjádřit jako vzor otevřené množiny spojitěho zobrazení

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Je tedy $GL(n, \mathbb{R})$ otevřená podmnožina v \mathbb{R}^{n^2} , jelikož vzor otevřené množiny při spojitěm zobrazení je otevřená množina. Podle 2.11 je proto množina všech lineárních izomorfismů prostoru \mathbb{R}^n hladká varieta dimenze n^2 . \diamond

Cvičení 2.14.

Ukažte, že množina všech reálných matic s determinanem 1 je hladkou podvarietou.

Řešení. Využijeme výsledků a podobné úvahy jako v příkladě 2.12. Již víme, že prostor všech matic $n \times n$ můžeme injektivně zobrazit do \mathbb{R}^{n^2} pomocí zobrazení 2.13. Dále víme, že determinant je hladké zobrazení z matic do reálných čísel. Množina všech reálných matic s determinantem 1, která se značí $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, je pak vzorem jedničky tohoto zobrazení

$$\det: \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1).$$

Ukážeme, že Jacobiho (jednořádková) matice pro zobrazení \det má na $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ maximální hodnotu. K tomu nám stačí ukázat, že pro každé $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ existuje dvojice i, j , pro kterou platí

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} \neq 0,$$

tj. Jacobiho matice bude mít alespoň jednu nenulovou hodnotu a tedy maximální hodnotu. Laplaceův rozvoj determinantu matice $A = (a_{ij})$ podle i -tého řádku vypadá následovně

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

kde M_{ij} je minor (nebo také kofaktor) odpovídající prvku a_{ij} . Jestliže předpokládáme sporem, že

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij} = 0$$

pro fixní i a libovolné j , tj. platí

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{i1}} = M_{i1} = \cdots = \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{in}} = M_{in} = 0.$$

Jsou-li však všechny minory pro daný řádek nulové, pak je Laplaceův rozvoj podle tohoto řádku roven nule, což by znamenalo $\det(A) = 0$. To je spor s předpokladem $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Ukázali jsme, že Jacobiho matice má maximální hodnotu v libovolném bodě A množiny $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, která je proto podle 2.4 hladkou podvarietou dimenze $n^2 - 1$. \diamond

Cvičení 2.15.

Rozhodněte, je-li obecný n -úhelník, $n \geq 3$, podvarietou roviny.

Řešení. Cvičení vyřešíme tak, že uvážíme část n -úhelníka, o které dokážeme, že není podvarietou. To bude znamenat, že ani samotný n -úhelník není podvarietou.

Nechť uvažovaná část n -úhelníka obsahuje nějaký vrchol V a dvě k němu přilehlé hrany h_1, h_2 s otevřenými konci. Z předešlé kapitoly víme, že rotace a posunutí neovlivní, je-li zkoumaný objekt podvarietou, či nikoliv. Bez újmy na obecnosti proto uvažujme část $h_1 V h_2$ v \mathbb{R}^2 v takové poloze, že vrchol V bude v bodě 0, h_1 zarovnána s osou x a h_2 svírající s h_1 úhel $\alpha \in (0, \pi) \setminus \frac{\pi}{2}$ (případ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bychom opět vyřešili rotací). Lomená čára $h_1 V h_2$ není podvarietou, jelikož je grafem funkce, která v bodě 0 není diferencovatelná. Předpis této funkce, označme ji f , by byl definován po částech dvěma lineárními funkcemi se zlomem v bodě 0: jedna část závislá na úhlu svíraném hranami n -úhelníka, druhá část konstatně

nulová. Přesný tvar po částech lineární f nás však nezajímá. Podstatný je pouze bod zlomu, ve kterém funkce nebude spojitě diferencovatelná, jelikož svíraný úhel je z předpokladu nenulový (tj. derivace zleva a zprava v bodě 0 nebudou stejné). Chceme-li $h_1Vh_2 \subset \mathbb{R}^2$ popsat jako podvarietu v souladu s 2.1, nebude to nikdy možné z následujícího důvodu. Dva různé souřadné popisy nějakého okolí bodu V , jeden daný funkcí f a druhý libovolný, označme jej g , se od sebe musí lišit hladkým přechodovým zobrazením ψ takovým, že složení $f \circ \psi \circ g^{-1}$ je přinejmenším diferencovatelné zobrazení. Avšak kompozice zobrazení zachovává menší ze stupňů diferencovatelnosti, což kvůli f bude nula. Vidíme, že h_1Vh_2 nemůže být podvarietou, tedy ani obecný n -úhelník není podvarietou. \diamond

Cvičení 2.16.

Ukažte, že je-li $f: M \rightarrow N$ zobrazení třídy C^r mezi podvariety třídy C^s , pak je $r \leq s$.

Řešení. Uvažujme zobrazení $f: M \rightarrow N$ ze zadání. Aby f bylo třídy C^r , musí podle 2.8 existovat pro každý bod $a \in M$ jeho okolí $U \subset M$, spolu s okolím $V \subset N$ pro bod $f(a)$, splňující $f(U) \subset V$, a dále lokální souřadnice ϕ na U a ψ na V tak, že zobrazení $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ je třídy C^r . Situaci si můžeme nakreslit do komutujícího diagramu

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} & \psi(V) \end{array}$$

Stupeň diferencovatelnosti složeného zobrazení je roven nejmenšímu stupni skládaných zobrazení, přitom oba difeomorfismy ψ i ϕ ve složení $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jsou z předpokladu třídy C^s , podle definice 2.1. Proto platí $r \leq s$. \diamond

Cvičení 2.17.

Rozhodněte, je-li podmnožina v \mathbb{R}^2 , tvořená dvěma kružnicemi (s nenulovým poloměrem) spojenými v jediném bodě, podvarietou.

Řešení. Úlohu můžeme vyřešit topologickým argumentem. Z definice podvariety víme, že pro libovolný její bod existuje vhodné okolí a na něm difeomorfismus f na jednoduše souvislou podmnožinou v \mathbb{R}^n . Z topologie víme, že jednoduše souvislou množinu lze homeomorfně zobrazit na celé \mathbb{R}^n . Jelikož každý difeomorfismus je zároveň homeomorfismem, musí být lokálně každá podvarieta euklidovského prostoru homeomorfní \mathbb{R}^n . Nechtě tedy M je množina tvořená dvěma kružnicemi spojenými v jediném bodě, který označme x . Předpokládejme sporem, že M je podvarieta v \mathbb{R}^2 a uvažme libovolné okolí U bodu x . Z topologie víme, že \mathbb{R}^2 , ze kterého vyjmeeme bod, má jedinou komponentu souvislosti. Jestliže vyjmeeme z U bod x , vzniknou čtyři komponenty souvislosti. To je spor, protože \mathbb{R}^2 bez (libovolného) bodu je homeomorfní okolí U bez bodu x . Avšak počet komponent souvislosti je invariantem homeomorfismu. Situace tedy nemůže nastat a M nemůže být podvarietou v \mathbb{R}^2 . \diamond

Hladké variety a hladká zobrazení

Definice 3.1.

n -dimenzionální **topologická varieta** je separabilní topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní \mathbb{R}^n , tj. $\forall x \in M$ existuje okolí U , otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\varphi : U \rightarrow V$.

Definice 3.2.

Každý homeomorfismus $\varphi : U \rightarrow V$, kde $U \in M$ a $V \in \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, se nazývá **lokální mapa** na M . Souřadnice $\varphi(a)$, kde $a \in U$, se nazývají souřadnice a v lokální mapě φ . Jestliže $0 \in V$, pak se $\varphi^{-1}(0)$ nazývá **střed lokální mapy** φ .

Definice 3.3.

Nechť M je topologická varieta a φ_1, φ_2 dvě lokální mapy na množinách U_1 a U_2 . Indukované zobrazení $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ (\varphi_1^{-1}|_{V_{12}}) : V_{12} \rightarrow V_{21}$ se nazývá **přechodové zobrazení** mezi lokálními mapami φ_1 a φ_2 . Občas se také toto zobrazení označuje jako **změna souřadnic** na překryvu.

Definice 3.4.

Dvě lokální mapy $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ a $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ na topologické varietě M se nazývají **C^r -relované**, jestliže přechodové zobrazení φ_{12} je C^r -difeomorfismus.

Definice 3.5.

C^r **atlas** \mathcal{A} na topologické varietě M je množina C^r -relovaných lokálních map $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ takových, že jejich definiční obory U_α pokrývají M . Takový atlas se často označuje názvem **diferenciální struktura**.

Poznámka. Můžeme uvažovat i atlasy na \mathbb{R}^n , s nimiž není kompatibilní identita $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Takové atlasy se poté nazývají **netriviální diferenciální struktura**.

Definice 3.6.

Mapa $\varphi_0 : U_0 \rightarrow V_0$ je **kompatibilní** s C^r atlasem \mathcal{A} , jestliže každé přechodové zobrazení $\varphi_{0\alpha} : V_{0\alpha} \rightarrow V_{\alpha 0}$ je C^r -difeomorfismus.

Definice 3.7.

Atlas \mathcal{A} na topologické varietě M se nazývá **úplný**, jestliže obsahuje všechny kompatibilní lokální mapy.

Věta 3.8.

Nechť \mathcal{A} je libovolný C^r atlas na M . Jestliže přidáme všechny kompatibilní lokální mapy, obdržíme úplný atlas.

Definice 3.9.

Řekneme, že spojitě zobrazení $f : M \rightarrow N$ je třídy C^s , jestliže pro každou mapu $\phi : U \rightarrow V$ kompatibilní s atlasem \mathcal{A} a všechny mapy $\psi : W \rightarrow Z$ kompatibilní s atlasem \mathcal{B} splňující $f(U) \in W$, je indukované zobrazení $\psi \circ \phi^{-1} : V \rightarrow Z$ třídy C^s .

Definice 3.10.

Diferenciální varieta třídy C^r je topologická varieta s C^r atlasem \mathcal{A} .

Věta 3.11.

Spojitě zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi dvěma C^r varietami je třídy C^s ($(s \leq r)$), jestliže pro všechny $x \in M$ existují lokální mapy ϕ na M a ψ na N takové, že indukované zobrazení $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ je třídy C^s na okolí bodu x .

Věta 3.12.

Nechť M, N a P jsou C^r variety a $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$ jsou C^s zobrazení. Pak kompozice $g \circ f : M \rightarrow P$ je také C^s zobrazení.

Definice 3.13.

C^s **difeomorfismus** dvou n -dimenzionálních C^r variet M_1 a M_2 je bijektivní C^s zobrazení $f : M_1 \rightarrow M_2$ takové, že inverzní zobrazení $f^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ je také C^s .

Definice 3.14.

Součin dvou C^r variet M a N s atlasy \mathcal{A} a \mathcal{B} je C^r varieta daná kartézským součinem topologických variet $M \times N$ a diferenciální strukturou $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Poznámka. I když jsou atlasy \mathcal{A} a \mathcal{B} úplné, atlas $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nemusí být nutně úplný.

Definice 3.15.

Nechť je M n -dimenzionální C^r varieta. Podmnožina $N \subseteq M$ je k -dimenzionální C^s **podvarieta**, jestliže N je k -dimensional C^s varieta.

Poznámka. Řekneme, že variety nebo zobrazení jsou hladké, jestliže jsou C^∞ . Od teď budeme slovo hladké vynechávat.

Cvičení 3.16.

Jsou následující zobrazení lokální mapy?

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^{2k}, k \in \mathbb{N}$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$
3. $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \tan\left(\frac{\pi t}{2a}\right), a \in \mathbb{R}$

Řešení.

1. Nejprve si všimněme, že zobrazení není injektivní. Obrazem tohoto zobrazení je interval $[0, \infty)$. Toto ale není ani otevřená množina v \mathbb{R} ! Dále, obrazy otevřených množin obsahujících 0 nejsou otevřené, protože $f((-\epsilon, \epsilon)) = [0, \epsilon^{2k})$.
2. Tyto zobrazení jsou lokální mapy. Jsou injektivní a každá otevřená množina se zobrazí na otevřenou množinu.
3. Tento příklad ukazuje, že \mathbb{R} je C^∞ -difeomorfní otevřenému intervalu $(-a, a)$. Zobrazení je injektivní a obrazy otevřených množin jsou otevřené množiny.

◇

Cvičení 3.17.

Může existovat atlas na sféře S^n pouze s jednou mapou?

Řešení. Kdyby taková mapa $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ šla zkonstruovat, musela by být homeomorfismem na otevřenou množinu v \mathbb{R}^n . Jelikož ale S^n je kompaktní, $\varphi(S^n)$ by byla jak uzavřená, tak otevřená množina v \mathbb{R}^n , tudíž $\varphi(S^n) = \mathbb{R}^n$. To však nelze, protože \mathbb{R}^n není kompaktní. Proto nelze zkonstruovat atlas na S^n obsahující pouze jednu mapu. ◇

Cvičení 3.18.

Uvažme otevřené množiny U a V jednotkové kružnice S^1 v \mathbb{R}^2 dané jako

$$U = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) : \alpha \in (0, 2\pi)\}$$

$$V = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) : \alpha \in (-\pi, \pi)\}$$

Dokažte, že $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, kde

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(\cos \alpha, \sin \alpha) = \alpha$$

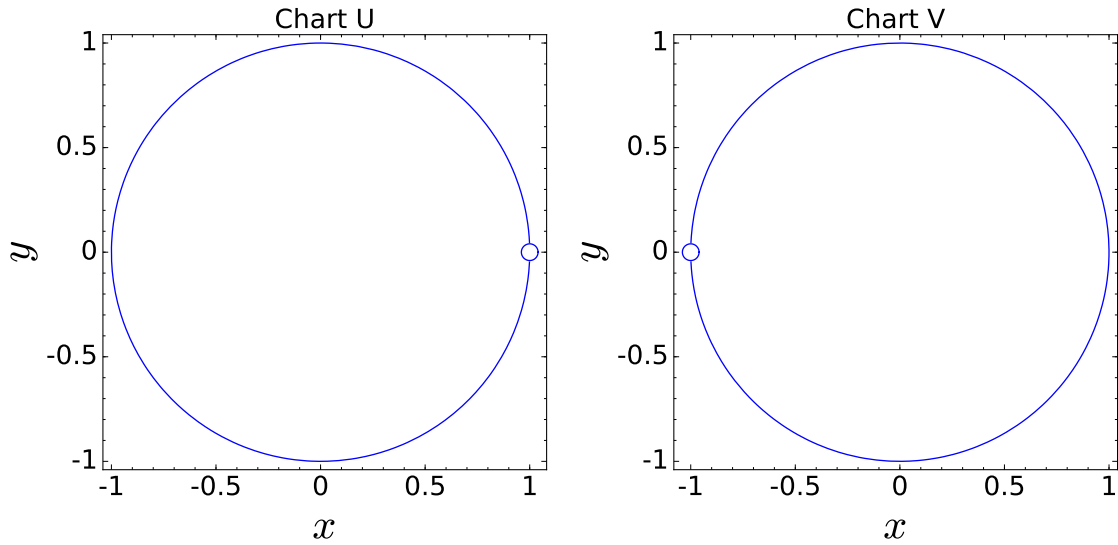
$$\psi: V \rightarrow \mathbb{R}, \psi(\cos \alpha, \sin \alpha) = \alpha$$

je atlas na S^1 .

Řešení. Jak jde vidět například z obrázků, platí $U \cup V = S^1$. Zobrazení φ a ψ jsou homeomorfní na $(0, 2\pi)$, respektive $(-\pi, \pi)$, proto (U, φ) a (V, ψ) jsou lokální mapy na S^1 . Přejchodové zobrazení $\psi \circ \varphi^{-1}$ je dáno

$$\alpha \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha) \rightarrow \begin{cases} \alpha, & \alpha \in (0, \pi) \\ \alpha - 2\pi, & \alpha \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

To je difeomorfismus na $U \cap V$, proto \mathcal{A} je atlas na S^1 .



Obrázek 3.1: Mapy U a V na S^1

◇

Cvičení 3.19.

Zadejte atlas na válcové ploše

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 < z < h\}$$

kde $h, r \in \mathbb{R}^+$

Řešení. Do atlasu musíme vložit mapy popisující kružnici $S_r^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Toto jsme však provedli již v předchozím příkladu. Proto jsou $U \times (0, h)$, $V \times (0, h)$ otevřené množiny v M a definujme atlas na M pomocí

$$\mathcal{A} = \{(U \times (0, h); \varphi \times \text{id}), (V \times (0, h); \psi \times \text{id})\}$$

Přejchodové zobrazení mezi mapami je

$$(\psi \times \text{id}) \circ (\varphi \times \text{id})^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}) \times \text{id}$$

což je C^∞ -difeomorfismus a tedy \mathcal{A} je atlas na M .

◇

Poznámka. Tento postup může být rozšířen na součin libovolných dvou variet $M = M_1 \times M_2$.

Cvičení 3.20.

Pro každé kladné reálné číslo r uvažme zobrazení $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\phi_r(t) = t$ if $t \leq 0$ a $\phi_r(t) = rt$ if $t > 0$. Dokažte, že atlasy $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}$ určují nespočetně mnoho diferenciálních struktur na \mathbb{R} . Jsou tyto diferenciální struktury navzájem difeomorfní?

Řešení. Pro každé kladné reálné r je ϕ_r homeomorfismus, tudíž $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}$ je atlas. Aby jsme určili, zda jsou diferenciální struktury ekvivalentní, musíme ověřit pro jaké r a s jsou zobrazení ϕ_r a ϕ_s C^r -relované. Musíme tedy spočítat $\phi_r \circ \phi_s^{-1}$, které je

$$(\phi_r \circ \phi_s^{-1})(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0 \\ \frac{r}{s}t, & t > 0 \end{cases}$$

Tyto funkce jsou nespojité pro $r \neq s$, tudíž diferenciální struktury jsou různé. Nicméně uvažme zobrazení

$$\phi : \mathbb{R}_r \rightarrow \mathbb{R}_s = \begin{cases} t \rightarrow t, & t \leq 0 \\ t \rightarrow \frac{r}{s}t, & t > 0 \end{cases}$$

Toto zobrazení je difeomorfismus, protože $\phi_s \circ \phi \phi_r^{-1}$ je identita, která je C^∞ . ◇

Tečné bandly a tečná zobrazení

Definice 4.1.

Dráha na M je hladké zobrazení $f : I \rightarrow M$, kde $I \in \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Poznámka. Dráha se někdy nazývá i jako **hladký pohyb**, protože neobsahuje pouze informace o „trajektorii“, ale i o vlastním „pohybu“, který vytváří. Jestli je $f(I) \in M$ křivka a f je její parametrizace, pak říkáme, že máme **parametrizovanou křivku** na M .

Poznámka. Jestli je M otevřená podmnožina $U \subset \mathbb{R}^n$, pak k dráze $f(t) : I \rightarrow U$ existuje tečný vektor $\frac{df^i(t_0)}{dt}$ v každém $t_0 \in I$. Tento vektor můžeme chápat jako vektor zafixovaný v bodě $f(t_0)$.

Pro jednoduchost dále budeme předpokládat, že $0 \in I$.

Definice 4.2.

Nechť $a \in U$ je bod a $f_b = a + tb$ je dráha, která pro dostatečně malé t leží uvnitř U . Poté $\frac{df(0)}{dt} = b$. Dvojice (a, b) se nazývá **tečný vektor** k U v bodě a . Množina všech tečných vektorů se nazývá **tečný prostor** množiny U v a a značí se $T_a U \cong \mathbb{R}^n$. Sjednocení tečných prostorů ve všech bodech $TU = \bigcup_{a \in U} T_a U \cong U \times \mathbb{R}^n$ se nazývá **tečný bandl**.

Poznámka. Také budeme používat značení f' pro $\frac{df}{dt}$.

Poznámka. Definice tečného prostoru a tečného bandlu je mnohem abstraktnější, pokud je M topologická varieta.

Poznámka. Funkce $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ má nulu prvního řádu v $t_0 \in I$, pokud

$$h(t_0) = \frac{dh(t_0)}{dt} = 0$$

Definice 4.3.

Dvě dráhy $f, g : I \rightarrow M$ se **dotýkají** v t_0 , jestliže $f(t_0) = g(t_0)$ a pro každou hladkou funkci $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, indukovaná funkce $\varphi \circ f - \varphi \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ má nulu prvního řádu v t_0 .

Věta 4.4.

Dvě dráhy $f, g : I \rightarrow M$ se dotýkají v 0 , pokud $f(0) = g(0) = a$ a existuje souřadnicový systém x^i v nějakém okolí bodu a takový, že

$$\frac{df^i(0)}{dt} = \frac{dg^i(0)}{dt}$$

Tato věta nám umožňuje definovat tečný vektor jako třídu ekvivalence drah, které se dotýkají.

Definice 4.5.

Třída ekvivalence A drah $f(t)$ na M splňujících $f(0) = a$ a nulou prvního řádu v 0 se nazývá **tečný vektor** na M v bodě a . Značíme $A = \frac{df(0)}{dt}$. Množina všech takových tříd ekvivalence je **tečný prostor** T_aM .

Definice 4.6.

Derivace funkce φ ve směru A je dána

$$A\varphi = \frac{d(\varphi \circ f)(0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x^i} \frac{df^i(0)}{dt}$$

Definice 4.7.

Nechť $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, pro které platí $\varphi(a) = \psi(a)$ a $A\varphi = A\psi$ pro každé $A \in T_aM$. Pak mají tyto funkce shodný **diferenciál**. Tuto třídu ekvivalence značíme jako $d_a\varphi$.

Poznámka. Jestli mají dvě funkce shodný diferenciál, poté platí:

- $\varphi(a) = \psi(a)$
- $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x^i} = \frac{\partial \psi(a)}{\partial x^i}$

Věta 4.8.

Prostor všech diferenciálů T_a^*M je n -dimenzionální vektorový prostor, protože platí

- $(d_a\varphi) + (d_a\psi) = d_a(\varphi + \psi)$
- $k(d_a\varphi) = d_a(k\varphi)$

Tento prostor se nazývá **kotečný prostor** k M v bodě a a jeho prvky se nazývají **kovektory**.

Věta 4.9.

Tečné vektory v a jsou lineární zobrazení $T_a^*M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice 4.10.

Nechť f je zobrazení na varietě N a $A = \frac{dh(0)}{dt} \in T_aM$, kde h je nějaká dráha na M . Pak $f \circ h : I \rightarrow N$ je dráha na N a tečný vektor $\frac{df \circ h(t_0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x^i} \frac{dh^i(0)}{dt}$ závisí pouze na tečném vektoru A . Proto je zobrazení $T_af : T_aM \rightarrow T_{f(a)}N$ lineární. Toto zobrazení se nazývá **tečné zobrazení** f v bodě a . Zobrazení $Tf : TM \rightarrow TN$, splňující $Tf = \bigcup_{a \in M} T_af$ se nazývá tečné zobrazení f . Tečné zobrazení se také značí f_* .

Věta 4.11.

Pro složení dvou zobrazení platí

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$$

Věta 4.12.

Jestli je $f : M \rightarrow N$ hladké zobrazení, pak je zobrazení $Tf : TM \rightarrow TN$ také hladké.

Věta 4.13.

Jestli je M m -dimenzionální podvarieta v \mathbb{R}^n , pak TM je $2m$ -dimenzionální podvarieta v $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Definice 4.14.

Hodnost zobrazení f v bodě a , značíme $Rk_a f$, je hodnost lineárního zobrazení $T_a f$.

Cvičení 4.15.

Uvažme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x^3 + xy + y^3 + 1$

1. Spočítejte tečné zobrazení $f_* : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$
2. Pro které body je f_* injektivní?
3. Pro které body je f_* surjektivní?

Řešení.

1. Prvně určíme tečné zobrazení na bázových vektorech

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \frac{\partial f(p)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)} = (3x^2 + y) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) = \frac{\partial f(p)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)} = (3y^2 + x) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

Jelikož je f_* lineární zobrazení, stačí, když určíme, jak působí na libovolný vektor $v \in T_p \mathbb{R}^2$. Obraz vektoru $a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} \in T_p M$ je

$$f_* \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} \right) = [a_x (3x^2 + y) + a_y (3y^2 + x)] \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

2. f_* nemůže být injektivní, protože $\dim \mathbb{R}^2 > \dim \mathbb{R}$.

3. Jestli f_* není surjektivní v bodě p , pak se obraz každého vektoru zobrazí na nulu. Množina takových bodů je

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y^2 = 0, 3x^2 + y = 0\}$$

Po vyřešení příslušných rovnic dostaneme $P = \{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (0, 0)\}$. Tedy f_* je surjektivní na \mathbb{R}^2/P .

◇

Cvičení 4.16.

Nechť $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \rightarrow (x^2y + y^2, x - 2y^3, ye^x)$

1. Spočítejte $g_{*(x,y)}$.
2. Najděte $g_* \left(4 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x,y)}$.
3. Najděte podmínky na $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ takové, aby vektor $\left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}\right)_{g(0,0)}$ byl obrazem nějakého vektoru pomocí zobrazení g_* .

Řešení. 1. Jako v předchozím příkladu spočítáme tečné zobrazení na bázové vektory, což nám umožní najít matici lineárního zobrazení. V tomto případě je matice

$$g_{*(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 2y \\ 1 & -6y^2 \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

2. Spočítejte tečné zobrazení na $4 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$

$$g_* \left(4 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 2y \\ 1 & -6y^2 \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}_{g(x,y)} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 8xy - x^2 - 2y \\ 4 + 6y^2 \\ (4y - 1)e^x \end{pmatrix}_{g(x,y)}$$

3. Matice tečného zobrazení v bodě $(0, 0)$ je

$$g_{*(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proto hledaná podmínka je $\alpha_x = 0$.

◇

Cvičení 4.17.

Uvažte křivku σ v \mathbb{R}^2 definovanou jako $x = \cos t, y = \sin t, t \in (0, \pi)$ a zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + y^3$. Najděte vektor v tečný k σ v bodě $\pi/4$ a spočítejte vf .

Řešení. Máme $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, proto

$$\sigma'(\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}$$

Dále

$$\sigma'(\pi/4) f = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

◇

Cvičení 4.18.

Uvažte dráhu v \mathbb{R}^2 danou jako $\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Spočítejte $\sigma(t)$ a $\sigma'(t)$ pro $t = \pm 1$. Porovnejte získané výsledky.

Řešení. Máme

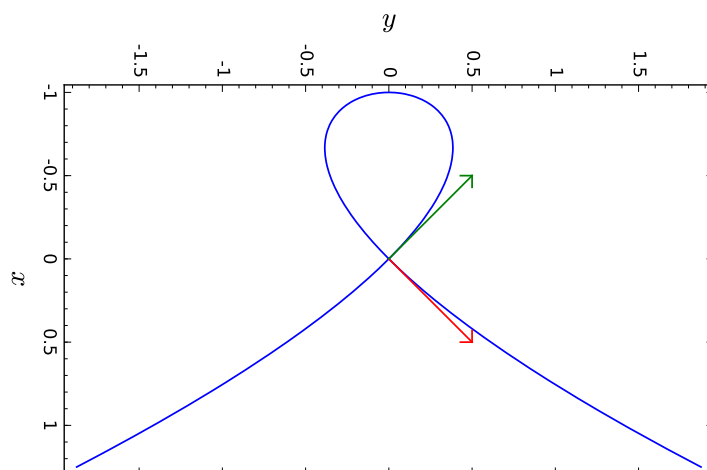
$$\sigma(1) = \sigma(-1) = (0, 0)$$

Derivaci je $\sigma'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$. To nám dává

$$\begin{aligned} \sigma'(1) &= (2, 2) \\ \sigma'(-1) &= (-2, 2) \end{aligned}$$

Výsledek jde vidět na následujícím obrázku.

◇



Obrázek 4.1: Dráha $\sigma(t)$ spolu s tečnými vektory v $t = \pm 1$.

Vektorová pole

Definice 5.1.

Vektorové pole na M je hladké zobrazení $X : M \rightarrow TM$ takové, že $p \circ X = \text{id}_M$

Definice 5.2.

Derivace ve směru vektorového pole X hladké funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $(Xf)(a) = X(a)f$, kde $X(a)$ je derivace ve směru vektoru $X(a)$. V lokálních souřadnicích máme

$$Xf = \sum_{i=1}^n X^i(a) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Věta 5.3.

Pro každou dvojici vektorových polí X, Y na M existuje právě jedno vektorové pole $[X, Y]$ na M takové, že pro každou funkci f na M platí

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Takové vektorové pole se nazývá **Lieova závorka** polí X a Y . V souřadnicovém vyjádření je toto pole dáno jako

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Věta 5.4.

Pro každé $k, l \in \mathbb{R}$, každé vektorové pole X, Y, Z a každou funkci f na M , platí

$$[kX + lY, Z] = k[X, Z] + l[Y, Z]$$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$$

Definice 5.5.

Vektorové pole $X : M \rightarrow TM$ a $Y : N \rightarrow TN$ jsou **f -relovaná**, jestliže $(Tf) \circ X = Y \circ f$.

Lemma 5.6.

Vektorová pole X a Y jsou f -relovaná právě tehdy, když pro každou funkci $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$X(h \circ f) = (Yh) \circ f$$

Věta 5.7.

Nechť X_1, X_2 jsou vektorová pole na M a Y_1, Y_2 jsou vektorová pole na N taková, že X_1, Y_1 a X_2, Y_2 jsou f -relovaná. Pak Lieovy závorky $[X_1, X_2]$ a $[Y_1, Y_2]$ jsou f -relované.

Definice 5.8.

Řekneme, že vektorové pole X je **tečné k podvarietě** N , jestliže $X(x) \in T_x N$ pro každé $x \in N$.

Věta 5.9.

Jestliže jsou vektorová pole X, Y tečné k N , pak je i $[X, Y]$ tečné vektorové pole k N .

Definice 5.10.

Dráha $f : I \rightarrow M$ je **integrální křivka** vektorového pole X , jestliže

$$\frac{df(t)}{dt} = X(f(t))$$

Poznámka. V lokálních souřadnicích máme $X = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, tedy každá integrální křivka vektorového pole X je řešením systému diferenciálních rovnic

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \dots, x^n)$$

Všimněte si, že pravá strana není závislá na t .

Definice 5.11.

Pro každé $x \in M$ existuje právě jedna **maximální integrální křivka** $f_x : \mathbb{R} \supset I_x \rightarrow M$, pro kterou platí $f_x(0) = x$. Maximální znamená, že I_x nelze rozšířit na větší interval. S ohledem na existenční větu řešení diferenciální rovnic víme, že je množina

$$\mathbb{R} \times M \supset \mathcal{D}X := \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\}$$

otevřená a můžeme tedy definovat **tok vektorového pole** X jako hladké zobrazení

$$Fl^X : \mathcal{D}X \rightarrow M, \quad Fl^X(t, x) = Fl_t^X(x) = f_x(t) .$$

Věta 5.12.

Pro **úplné** vektorové pole X platí pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$

$$Fl_{t+s}^X = Fl_t^X \circ Fl_s^X$$

Poznámka. Pokud X není úplné vektorové pole, věta stále platí pro dostatečně malá $t, s \in \mathbb{R}$.

Definice 5.13.

Nosič vektorového pole X je uzávěr množiny bodů, ve kterých je X nenulové.

Věta 5.14.

Každé vektorové pole X s kompaktním nosičem K je úplné na libovolné varietě M .

Definice 5.15.

k -dimenzionální **distribuce** S na M ke pravidlo, které každému bodu $x \in M$ přiřazuje k -dimenzionální vektorový podprostor $S(x) \subset T_x M$.

Poznámka. Vektorové pole $X \in S$, jestliže $X(x) \in S(x)$ pro každé $x \in M$.

Definice 5.16.

Distribuce S je **hladká**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje okolí U spolu s k hladkými vektorovými poli X_1, \dots, X_k takovými, že vektory $X_1(x), \dots, X_k(x)$ tvoří bázi $S(x)$ pro každé $x \in U$.

Poznámka. Odteď budeme uvažovat pouze hladké distribuce.

Definice 5.17.

k -dimenzionální podvarieta $N \subset M$ se nazývá **integrální varieta** distribuce S , jestliže $T_x N = S(x)$ pro každé $x \in N$.

Definice 5.18.

Distribuce S je **integrabilní**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje integrální podvarieta S obsahující x .

Definice 5.19.

Distribuce S je **involutivní**, jestliže pro všechny vektorové pole X_1, X_2 definované na $U \subset M$, které patří do distribuce S , také jejich Lieova závorka $[X_1, X_2]$ patří do S .

Věta 5.20.

Distribuce je integrabilní právě když je involutivní.

Věta 5.21.

Nechť S je involutivní distribuce. Pak pro každé $x \in M$ existuje lokální souřadnicový systém y^1, \dots, y^n v nějakém okolí U takový, že $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k}$ tvoří bázi S na U .

Cvičení 5.22.

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je C^∞ funkce definovaná jako $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, která definuje diferenciální strukturu na $C = f^{-1}(0)$. Uvažte vektorová pole na \mathbb{R}^3

$$1. X = (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}$$

$$2. Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2xz^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

Jsou tečná k C ?

Řešení. Vše, co musíme udělat, je spočítat příslušné derivace f ve směrech danými vektorovými poli ve všech bodech C . Je vyjdou nulové derivace, hodnota funkce se nezmění ve směru vektorového pole X a tedy implicitní rovnice $f(x, y, z) = 0$ zůstane zachovaná.

1.

$$\begin{aligned} Xf &= (x^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= 2x(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

Vidíme, že Xf je nula na C , tedy X je tečné k C .

2.

$$\begin{aligned} Yf &= x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + 2xz^2 \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Toto vektorové pole není tečné, protože $Yf|_C = 2$.

◇

Cvičení 5.23.

Uvažte vektorová pole

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}, Y = y \frac{\partial}{\partial y}$$

na \mathbb{R}^3 a zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 y$. Rozhodněte nebo spočítejte:

1. Je tato distribuce involutivní?
2. $[X, Y]_{(1,1,0)}$
3. $(fX)_{(1,1,0)}$
4. $(Xf)(1, 1, 0)$
5. $f_*(X_{(1,1,0)})$

Řešení. 1. Prvně spočítáme Lieovu závorku vektorových polí. Při počítání Lieových závorek je velice užitečné vyčíslit Lieovu závorku na nějaké testovací funkci f s použitím identity

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

V našem případě dostaneme

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \left(xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(xy \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= xy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - xy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -xy \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Vidíme, že distribuce není involutivní. Můžeme zkonstruovat bázi

$$([X, Y], Y, [X, Y] + X) = \left(-xy \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y}, x^2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ve které jsou vektory lineárně nezávislé.

2. K spočítání hodnoty Lieovy závorky jednoduše vyčíslíme vektorové pole v $(1, 1, 0)$, což dává

$$[X, Y]_{(1,1,0)} = - \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(1,1,0)}$$

3. $(fX)_{(1,1,0)} = f(1, 1, 0)X_{(1,1,0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right)_{(1,1,0)}$
4. $(Xf)(1, 1, 0) = \left(xy \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(1,1,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (1, 1, 0) = 2$
5. $f_*(X_{(1,1,0)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_1$

kde t značí kanonickou proměnnou na \mathbb{R} .

◇

Cvičení 5.24.

Nechť $X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3 \frac{\partial}{\partial z}$ je vektorové pole. Jak toto vektorové pole vypadá v \mathbb{R}^3 s použitím

1. válcových souřadnic (r, ϕ, z)

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

2. sférických souřadnic (r, ϕ, θ)

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Řešení.

1. Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace

$$J = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektorové pole je ve válcových souřadnicích dáno jako

$$X = f_1(r, \phi, z) \frac{\partial}{\partial r} + f_2(r, \phi, z) \frac{\partial}{\partial \phi} + f_3(r, \phi, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

To nám dá systém rovnic pro komponenty f_i

$$f_1 \cos \phi - f_2 r \sin \phi = 2$$

$$f_1 \sin \phi + f_2 r \cos \phi = -1$$

$$f_3 = 3$$

Tento systém se dá jednoduše vyřešit a řešením je následující výraz pro X ve válcových souřadnicích

$$X = (2 \cos \phi - \sin \phi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2 \sin \phi + \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + 3 \frac{\partial}{\partial z}$$

2. Stejně jako v předchozím případě nejprve spočítáme Jacobiho matici

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Ve sférických souřadnicích je vektorové pole dáno jako

$$X = f_1(r, \phi, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + f_2(r, \phi, \theta) \frac{\partial}{\partial \phi} + f_3(r, \phi, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

a my máme vyřešit následující systém rovnic

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Po vyřešení systému získáme komponenty vektorového pole

$$\begin{aligned} f_1 &= (2 \cos \phi - \sin \phi) \sin \theta + 3 \cos \theta \\ f_2 &= \frac{(2 \cos \phi - \sin \phi) \cos \theta - 3 \sin \theta}{r} \\ f_3 &= \frac{2(\sin \phi - \cos \phi)}{r \sin \theta} \end{aligned}$$

◇

Cvičení 5.25.

Pro každé vektorové pole najděte příslušné integrální křivky a rozhodněte, jestli jsou úplné nebo ne.

1. $X = \frac{\partial}{\partial y} + e^x \frac{\partial}{\partial z}$
2. $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$

Řešení. 1. K nalezení integrálních křivek musíme vyřešit systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0 \\ y'(t) &= 1 \\ z'(t) &= e^{x(t)} \end{aligned}$$

Řešení procházející bodem (x_0, y_0, z_0) je

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_0 \\ y'(t) &= y_0 + t \\ z'(t) &= e^{x_0} t + z_0 \end{aligned}$$

Toto je definované pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a tedy vektorové pole je úplné.

2. Diferenciální rovnice pro integrální křivku pro toto vektorové pole je

$$e^{x(t)}x'(t) = 1$$

tedy

$$e^{x(t)} = t + C$$

Integrální křivka procházející x_0 je

$$x(t) = \log(t + e^{x_0})$$

Toto vektorové pole není úplné, je definované pouze pro $t > -e^{x_0}$.

◇

Cvičení 5.26.

Uvažte distribuci \mathcal{D} na \mathbb{R}^3 zadanou jako

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2xz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2yz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}$$

1. Je \mathcal{D} involutivní?
2. Spočtete lokální tok X a Y .
3. Jestli je \mathcal{D} involutivní, najděte příslušnou integrální plochu.

Řešení. 1. Abychom zjistili, jestli je distribuce involutivní, musíme spočítat Lieovu závorku bázových vektorových polí. V tomto případě máme $[X, Y] = 0 \in \text{span}(X, Y)$ a tudíž \mathcal{D} je involutivní.

2. Nejprve spočítáme lokální tok pro X . Okamžitě máme $x = x_0 + t$ a $y = y_0$. Vše, co zbývá je určit z , pro které máme

$$\frac{z'}{z} = \frac{2(x_0 + t)}{1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2}$$

Řešení této rovnice procházející (x_0, y_0, z_0) je

$$z = z_0 \frac{1 + (x + t)^2 + y^2}{1 + x_0^2 + y_0^2}$$

To nám dává lokální tok

$$\phi_t(x, y, z) = \left(x + t, y, z \frac{1 + (x + t)^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Lokální tok pro Y se dostane stejně. Nejrychlejší cesta je ale všimnout si, že pokud přehodíme x a y , dostaneme stejné rovnice. Tok proto je

$$\psi_s(x, y, z) = \left(x, y + s, z \frac{1 + x^2 + (y + s)^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

3. Jsou dvě možnosti, jak můžeme určit integrální varietu. První možnost je jednoduše složit příslušné toky, což nám dá $\psi(t, s) = (\psi_s \circ \phi_t)(x_0, y_0, z_0)$. Tento výsledek je nicméně málo zajímavý. Lepší cesta je najít kovektor, který anihiluje \mathcal{D} . Tento kovektor bude patřit do konormálového bandlu integrální podvariety a tedy musí být nulový, pokud se omezíme pouze na kotečný bandl integrální podvariety. V tomto případě máme

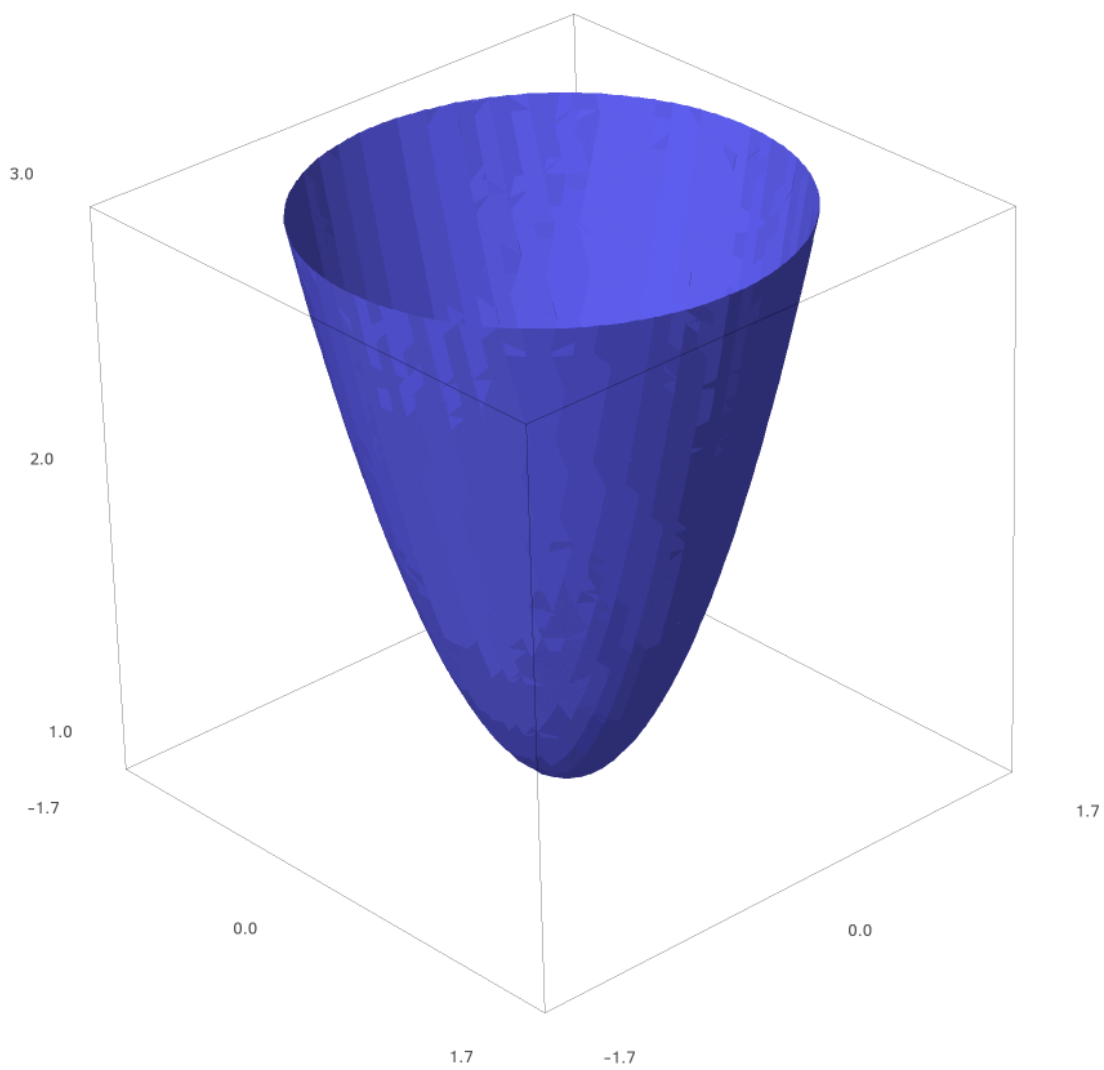
$$\alpha = 2xzdx + 2yzdy - (1 + x^2 + y^2) dz$$

Tento kovektor může být dále zjednodušen

$$\begin{aligned} \alpha &= zd(1 + x^2 + y^2) - (1 + x^2 + y^2) dz = \\ &= -(1 + x^2 + y^2)^2 d\left(\frac{z}{1 + x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

Tento kovektor bude nula tehdy a jen tehdy, když budeme derivovat konstantu, tudíž $\frac{z}{1+x^2+y^2} = \text{const.}$

◇



Obrázek 5.1: Integrální podvarieta a distribuce \mathcal{D} .

Tenzory a tenzorová pole

Tenzory

V této části se budeme zabývat algebraickým studiem multilineárních zobrazení. Všechny vektorové prostory budeme uvažovat konečně dimenzionální.

Definice 6.1.

Mějme $r + 1$ vektorových prostorů V_1, \dots, V_r, W . Zobrazení

$$f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$$

se nazývá **multilineární**, jestliže je v každé složce lineární, tj. pro každé $i \in I = \{1, \dots, r\}$ a každé vektory $v_1 \in V_1, \dots, v_{i-1} \in V_{i-1}, v_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, v_r \in V_r$ dostáváme lineární zobrazení

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, -, v_{i+1}, \dots, v_r) : V_i \rightarrow W .$$

Prostor všech multilineárních zobrazení značíme $L(V_1, \dots, V_r; W)$. V případě $V_1 = \dots = V_r = V$ hovoříme o protoru všech **r -lineárních zobrazení** z V do W .

Na $L(V_1, \dots, V_r; W)$ lze zavést strukturu vektorového prostoru.

Tvrzení 6.2.

Pro libovolné multilineární zobrazení $f, g \in L(V_1, \dots, V_r; W)$ definujeme jejich součet

$$(f + g)(v_1, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, v_r) + g(v_1, \dots, v_r) \quad (6.3)$$

a pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ definujeme skalární násobek

$$(kf)(v_1, \dots, v_r) = k(f(v_1, \dots, v_r)) . \quad (6.4)$$

Vzhledem k těmto operacím je $L(V_1, \dots, V_r; W)$ vektorovým prostorem.

Speciálním případem předešlé definice je $r = 1$, $W = \mathbb{R}$, který se uvažuje v následující definici.

Definice 6.5.

Prostor $L(V, \mathbb{R})$ všech lineárních funkcí na V nazýváme **duální prostor** k V a značíme jej V^* . Prvky duálního prostoru nazýváme **lineární 1-formy** nebo také **kovektory**. Prostor $(V^*)^*$ nazýváme **druhý duál** a značíme jej V^{**} .

Tvrzení 6.6.

Pro libovolný vektorový prostor V konečné dimenze platí (nekanonicky) $V \cong V^*$ a dále platí (kanonicky pomocí evaluace) $V \cong V^{**}$.

Poznámka. Pojem kanonického izomorfismu v předešlém tvrzení znamená, že mezi všemi možnými izomorfismy existuje jeden význačný, který není závislý na volbě popisu uvažovaného abstraktního prostoru.

Definice 6.7.

Pro vektorový prostor V definujeme jeho r -tou **tenzorovou mocninou** $\otimes^r V$ jako prostor všech r -lineárních zobrazení z V^* do \mathbb{R} , tj.

$$\otimes^r V := L(V^*, \dots, V^*; \mathbb{R}) .$$

Prvky $\otimes^r V$ nazýváme **tenzory stupně r**

Zvolíme-li bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve V , pak souřadnicové vyjádření vektoru v vzhledem k této bázi je $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ (všimněme si pozice indexů souřadnic nahoře), kde n je dimenze V .

Definice 6.8.

Ve V^* definujeme **duální bázi** $\{d^1, \dots, d^n\}$ určenou vztahy

$$d^i(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . \quad (6.9)$$

1-formu $u \in V^*$ můžeme vyjádřit v souřadnicích vzhledem k duální bázi (d^i) následovně

$$u = \sum_{i=1}^n u_i d^i \quad (6.10)$$

(všimněme si pozice indexů souřadnic dole) a pro libovolné $v \in V$ platí

$$u(v) = \sum_{i=1}^n u_i v^i . \quad (6.11)$$

Připomínáme, že každý vektor $v \in V$ lze chápat jako 1-formu na vektorovém prostoru V^*

$$v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Definice 6.12.

Pro libovolných r vektorů v_1, \dots, v_r definujeme jejich tenzorový součin

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in \otimes^r V$$

pomocí předpisu hodnoty na r -tici 1-forem

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)(u_1, \dots, u_r) = u_1(v_1) \cdots u_r(v_r) \in \mathbb{R} , \quad (6.13)$$

kde $u_i(v_i)$ je hodnota vektoru v_i při 1-formě u_i .

Nyní zavedeme tenzorový součin libovolných r a s tenzorů nad V .

Definice 6.14.

Pro libovolné $A \in \otimes^r V$ a $B \in \otimes^s V$ definujeme jejich tenzorový součin $A \otimes B \in \otimes^{r+s} V$ předpisem hodnoty na $r + s$ kovektorech

$$(A \otimes B)(u_1, \dots, u_{r+s}) = A(u_1, \dots, u_r) \cdot B(u_{r+1}, \dots, u_{r+s}). \quad (6.15)$$

Definice 6.16.

r -lineární zobrazení A se nazývá **symetrické**, jestliže platí

$$A(v_1, \dots, v_r) = A(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \quad (6.17)$$

pro libovolnou permutaci $\sigma \in P_r$, kde P_r je grupa všech permutací r -prvkové množiny.

Definice 6.18.

Podmnožina $S^r V \subset \otimes^r V$ všech symetrických r -lineárních zobrazení z V^* do \mathbb{R} nazýváme **r -tá symetrická tenzorová mocnina prostoru V** .

Tvrzení 6.19.

r -tá symetrická tenzorová mocnina $S^r V$ je lineární podprostor v $\otimes^r V$.

Definice 6.20.

Pro r -lineární zobrazení $A: V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme jeho **symetrizaci**

$$\text{Sym}: \otimes^r V \rightarrow S^r V$$

předpisem

$$\text{Sym}(A)(u_1, \dots, u_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P_r} A(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) . \quad (6.21)$$

Definice 6.22.

r -lineární zobrazení A se nazývá **antisymetrické** nebo také **alternující**, jestliže pro libovolnou permutaci $\sigma \in P_r$ platí

$$A(v_1, \dots, v_r) = \text{sgn}(\sigma) A(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) , \quad (6.23)$$

kde $\text{sgn}(\sigma)$ je znaménko permutace.

Poznámka. Symetrické/antisymetrické tenzory lze popsat tak, že prohodíme-li dva argumenty těchto multilineárních zobrazení, pak se zachová/změní znaménko výsledné hodnoty.

Definice 6.24.

Podmnožinu $\Lambda^r V \subset \otimes^r V$ všech antisymetrických r -lineárních zobrazení z V^* do \mathbb{R} nazýváme **r -tá vnější tenzorová mocnina prostoru V** .

Tvrzení 6.25.

r -tá vnější tenzorová mocnina $\Lambda^r V$ je lineární podprostor v $\otimes^r V$.

Definice 6.26.

Pro r -lineární zobrazení $A: V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme jeho **antisymetrizaci** nebo také **alternaci**

$$\text{Alt}: \otimes^r V \rightarrow \Lambda^r V$$

předpisem

$$\text{Alt}(A)(u_1, \dots, u_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P_r} \text{sgn}(\sigma) A(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}) . \quad (6.27)$$

Poznámka. Pro $A \in \otimes^2 V$ platí $\text{Sym}(A^{ij}) = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji})$ a $\text{Alt}(A^{ij}) = \frac{1}{2}(A^{ij} - A^{ji})$. Důsledkem je, že v tomto speciálním případě $r = 2$ máme rozklad libovolného tenzoru $A = (A^{ij})$ na symetrickou a antisymetrickou část

$$A = \text{Sym}A + \text{Alt}A \quad (6.28)$$

$$(A^{ij}) = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji}) + \frac{1}{2}(A^{ij} - A^{ji}) \quad (6.29)$$

Definice 6.30.

Pro $v_1, \dots, v_r \in V$ definujeme jejich **vnější součin vektorů** předpisem

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r = \text{Alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \in \Lambda^r V . \quad (6.31)$$

Věta 6.32.

Pro každé $\sigma \in P_r$ platí

$$v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(r)} = \text{sgn}(\sigma) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_r . \quad (6.33)$$

Definice 6.34.

Pro libovolné tenzory $A \in \Lambda^r V$, $B \in \Lambda^s V$ definujeme **vnější součin tenzorů** $A \wedge B \in \Lambda^{r+s}$ předpisem

$$A \wedge B = \text{Alt}(A \otimes B) . \quad (6.35)$$

Věta 6.36.

Pro $A \in \Lambda^r V$, $B \in \Lambda^s V$ platí

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A . \quad (6.37)$$

Poznámka. Uvažujme vektorový prostor V s bází $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ a vektorový prostor W s bází β . Připomínáme, že lineární zobrazení $f: V \rightarrow W$ můžeme reprezentovat vzhledem k těmto bázím maticí (a_j^i) (kde i je řádkový a j sloupcový index). Hodnotu a_j^i můžeme chápat jako souřadnicové vyjádření (vzhledem k bázím α, β) zobrazení f a získáme ji jako i -tou souřadnici (v bází β) obrazu j -tého vektoru báze α , tj. $(f(v_j))^i$.

Definice 6.38.

K lineárnímu zobrazení $f: V \rightarrow W$ je definujeme **duální zobrazení**

$$f^*: W^* \rightarrow V^*$$

předpisem

$$f^*(u)(v) = u(f(v)) , \quad (6.39)$$

kde $v \in V$ a $u \in W^*$.

Definice 6.40.

Pro lineární zobrazení $f: V \rightarrow W$ definujeme **r -tou tenzorovou mocninou zobrazení**

$$\otimes^r f: \otimes^r V \rightarrow \otimes^r W$$

pomocí předpisu pro $A \in \otimes^r V$

$$(A: V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}) \longmapsto (A \circ (f^* \times \dots \times f^*): W^* \times \dots \times W^* \rightarrow \mathbb{R}) .$$

Věta 6.41.

Platí $(\otimes^r f)(S^r V) \subset S^r V$ a $(\otimes^r f)(\Lambda^r V) \subset \Lambda^r V$.

Poznámka. Uvědomme si, že $\Lambda^n \mathbb{R}^n$ je prostor dimenze 1, což lze jednoduše odvodit kombinatorickými úvahami ohledně báze tohoto prostoru. To zejména znamená, že libovolný prvek $A \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$ je definován svou jedinou souřadnicí $A^{1\dots n}$.

Věta 6.42.

Nechť $f = \begin{pmatrix} a_j^i \end{pmatrix}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $A \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$. Pak pro obraz $B = \otimes^n f(A)$ při indukovaném zobrazení $\otimes^r f: \Lambda^n \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^n \mathbb{R}^n$ platí

$$B^{1\dots n} = \det(a_j^i) A^{1\dots n} \quad (6.43)$$

Definice 6.44.

Tenzorovou mocninu typu (r, s) vektorového prostoru V nazýváme prostor všech multilineárních zobrazení

$$L \left(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r\text{-krát}}, \underbrace{V, \dots, V}_{s\text{-krát}}; \mathbb{R} \right)$$

a značíme jej $\otimes_s^r V$ nebo také $\otimes^r V \otimes \otimes^s V^*$. Prvky tohoto prostoru nazýváme **smíšené tenzory**.

Poznámka. Speciální případy předešlé definice jsou $r = 0$ a $s = 0$, které odpovídají $\otimes^r V$ a $\otimes^s V^*$. Prvkům těchto prostorů se pak říká **čisté tenzory**

Analogicky jako v předešlém zadefinujeme tenzorový součin dvou různých vektorových prostorů pomocí multilineárních zobrazení.

Definice 6.45.

Pro vektorové prostory V, W definujeme jejich tenzorový součin $V \otimes W$ předpisem

$$V \otimes W = L(V^*, W^*; \mathbb{R}) . \quad (6.46)$$

Poznámka. Speciálním případem předešlé definice pro volbu $W = V^*$ je prostor $\otimes_1^1 V$.

Lemma 6.47.

Existuje jediné lineární zobrazení

$$C: \otimes_1^1 V \rightarrow \mathbb{R}$$

takové, že pro každý prvek tvaru $v \otimes u$, $v \in V$, $u \in V^*$ platí

$$C(v \otimes u) = u(v) . \quad (6.48)$$

Pomocí zobrazení C z předešlého lemmatu můžeme definovat zobecnění pojmu stopy matice, tzv. kontrakci tenzoru.

Definice 6.49.

Pro $A = (A_j^i) \in \otimes_1^1 V$ definujeme **kontrakci tenzoru typu** $(1, 1)$ jako číslo

$$C(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i . \quad (6.50)$$

Poznámka. Chápeme-li A jako matici, pak $C(A)$ je její stopa.

K tomu, abychom kontrakci mohli používat na obecné tenzory typu (r, s) použijeme následující úvahu. V libovolném $A \in \otimes_1^1 V$ můžeme zafixovat jeden z argumentů tohoto bilineárního zobrazení a druhý nechat volný, což dá lineární zobrazení, tj.

$$\begin{array}{ccc}
 & & A(-, v) : V^* \rightarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow A(-, v) \in V \\
 & \swarrow & \\
 A : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R} & & \\
 & \searrow & \\
 & & A(u, -) : V \rightarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow A(u, -) \in V^*
 \end{array}$$

Pomocí libovolného $v \in V$ a $u \in V^*$ takto můžeme zúžit definiční obor tenzoru $A \mapsto A(-, v) \in \otimes_0^1 V$ respektive $A \mapsto A(u, -) \in \otimes_1^0 V$ a snížit jeho stupeň. Zcela analogicky můžeme pro tenzor $A \in \otimes_s^r V$ zafixovat všechny argumenty kromě pozic k, l kde $1 \leq k \leq r$ a $1 \leq l \leq s$ a získat tak tenzor \tilde{A} typu $(1, 1)$

$$\tilde{A}(-, -) = A(u_1, \dots, u_k, -, u_{k+1}, \dots, u_r, v_1, \dots, v_l, -, v_{l+1}, \dots, v_s) \in \otimes_1^1 V.$$

Na \tilde{A} pak můžeme použít kontrakci definovanou v 6.49 což vede k následující definici.

Definice 6.51.

Pro $A \in \otimes_s^r V$ definujeme **kontrakci $C_l^k(A)$ tenzoru A na k -tý dolní faktor a l -tý horní faktor** předpisem

$$C_l^k(A) = C(\tilde{A}). \tag{6.52}$$

Poznámka. Kontrakci na k -tý horní a l -tý dolní index lze podle předešlého chápat jako stopu zobrazení \tilde{A} . V souřadnicích pak pro $A = (A_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r})$ vypadá kontrakce následovně

$$C_l^k(A) = \sum_{h=1}^n A_{j_1 \dots h \dots j_r}^{i_1 \dots h \dots i_r}, \tag{6.53}$$

kde sčítací index h se vyskytuje na k -té pozici horního a l -tém místě spodního multiindexu. Operaci kontrakce můžeme v případě dostatečného rozsahu indexů ($r, s \geq 2$) iterovat.

Tenzorová pole

Nejprve si zdefinujeme kotečný bandl T^*M , který je pro nás nezbytný k definici obecných tenzorových polí, která žijí právě v tenzorovém součinu mocnin tečného a kotečného bandlu. S tečným bandlem TM jsme se setkali již ve čtvrté kapitole tohoto textu. Jako množina je dán sjednocením tečných vektorových prostorů, tj. $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. Strukturu hladké variety "dědí" z hladké struktury báze variety M . Analogicky pro T^*M . Jako množina je to sjednocení kotečných prostorů

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M, \tag{6.54}$$

vzhledem ke které disponujeme projekcí

$$\pi: T^*M \rightarrow M, T_x^*M \mapsto x. \quad (6.55)$$

Pro otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$ platí $T^*V = V \times (\mathbb{R}^n)^*$. Pro lokální mapu $\varphi: U \rightarrow V$ na M máme tečné zobrazení $T_x\varphi: T_xM \rightarrow T_{\varphi(x)}V = \{\varphi(x) \times \mathbb{R}^n\}$, $x \in U$ a k němu duální zobrazení $T_x^*\varphi: \{\varphi(x) \times (\mathbb{R}^n)^*\} \rightarrow T_x^*M$. Zobrazení $T_x\varphi$ je lineární izomorfismus, proto máme k jeho duálu inverzi $(T_x^*)^{-1}\varphi: T_x^*M \rightarrow \{\varphi(x) \times (\mathbb{R}^n)^*\}$. Uvážíme-li nyní sjednocení přes všechny body $x \in U$, získáme bijekci $(T_x^*)^{-1}\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times (\mathbb{R}^n)^*$, pomocí níž můžeme přenést otevřené podmnožiny z $V \times (\mathbb{R}^n)^*$ na $\pi^{-1}(U)$, které pak tvoří bázi topologie na T^*M . Tedy vidíme, jak zavést na T^*M strukturu topologického prostoru. Obdobně zavedeme hladkou strukturu pomocí přechodových zobrazení $\varphi_{12}: V_{12} \rightarrow V_{21}$ atlasu na M a to tak, že bod po bodu uvážíme duál tečného zobrazení inverze, tj. $T_x^*\varphi_{12}: V_{12} \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow V_{21} \times (\mathbb{R}^n)^*$. Přechodová zobrazení $T_x^*\varphi_{12}$ jsou třídy C^∞ , protože φ_{12} jsou také třídy C^∞ . Dohromady jsme na T^*M zavedli strukturu hladké variety.

Definice 6.56.

Varietu T^*M nazýváme **kotečný bandl** variety M .

Poznámka. Pro libovolné zobrazení $f: M \rightarrow N$ mezi varietami máme pojem tečného zobrazení v bodě $x \in M$, které v případě funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ vypadá následovně $T_x f: T_x M \rightarrow T_x \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Pak pomocí duálního zobrazení $(T_x f)^*$ definujeme přiřazení $x \mapsto (df)(x) := (T_x f)^*$, tj.

$$\begin{aligned} df: M &\rightarrow T^*M, \\ x &\mapsto (df)(x). \end{aligned}$$

Zobrazení df nazýváme **diferenciálem funkce** f . Jeho hodnota v bodě x je tedy duál k tečnému zobrazení f v bodě x .

Další krok k definici tenzorových polí je bandl daný tenzorovým součinem tenzorových mocnin TM a T^*M . Podobně jako v případě tečného a kotečného bandlu ukážeme, že na tento prostor můžeme hladkou strukturu přetáhnout z podkladové variety M .

V předešlé sekci této kapitoly jsme si ukázali, jak pro daný vektorový prostor V sestavit jeho libovolnou tenzorovou mocninu. Nechť tedy r, s jsou libovolné a $V = T_x M$, $x \in M$. Pak máme $\otimes_s^r T_x M = \otimes^r T_x M \otimes \otimes^s T_x^* M$ a definujeme množinu

$$\otimes_s^r TM = \bigcup_{x \in M} \otimes_s^r T_x M. \quad (6.57)$$

Automaticky máme k dispozici projekci $p: \otimes_s^r TM \rightarrow M$, jelikož každý objekt $A \in \otimes_s^r TM$ je definován nad jistou podmnožinou $S \subset M$, tj. $p(A) = S$. Dále pro otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$ máme

$$\otimes_s^r TV = V \times \otimes_s^r \mathbb{R}^n$$

a pro lokální mapu $\varphi: U \rightarrow V$ sestojíme bod po bodu indukované bijektivní zobrazení

$$(\otimes^r(T\varphi)) \otimes (\otimes^s(T^*\varphi)^{-1}): p^{-1} \rightarrow V \times \otimes_s^r \mathbb{R}^n, \quad (6.58)$$

keré chápeme jako souřadnice a pomocí něhož můžeme indukovat topologii na $\otimes_s^r TM$. Báze topologie je dána vzorem $p^{-1}(U)$ otevřených podmnožin $U \subset V \times \otimes_s^r \mathbb{R}^n$. Na závěr pomocí hladkého přechodového zobrazení φ_{12} mezi dvěma souřadnými popisy na M indukujeme hladké přechodové zobrazení $(\otimes^r (T\varphi)_{12}) \otimes (\otimes^s (T^*\varphi_{12})^{-1})$ mezi souřadnicemi 6.58. Takto jsme získali strukturu hladké variety.

Definice 6.59.

Varietu $\otimes_s^r TM$ nazýváme **tenzorový bundl typu (r, s)** variety M .

Nyní již jednoduše můžeme zavést pojem tenzorového pole jako hladkou *sekcí* tenzorového bundlu.

Definice 6.60.

Hladké zobrazení $A: M \rightarrow \otimes_s^r TM$ splňující $p \circ A = id_M$, kde p je projekce z obecného tenzorového bundlu na podkladovou varietu M , $p: \otimes_s^r TM \rightarrow M$, nazýváme **tenzorové pole typu (r, s)** na varietě M .

Poznámka. V lokálních souřadnicích (x^i) na M můžeme tenzorové pole A typu (r, s) vyjádřit pomocí hladkých funkcí $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x)$. Podíváme-li se na hodnotu tenzorového pole v libovolném bodě $x \in M$, získáme tenzor. Pole pak v sobě obsahuje informaci, jak se souřadnice tohoto tenzoru bod od bodu (hladce) mění.

Definice 6.61.

Buď $f: M \rightarrow N$ hladké zobrazení. Po bodech definujeme zobrazení mezi tenzorovými bundly

$$\otimes^r T f := \bigcup_{x \in M} \otimes^r T_x f: \otimes^r TM \rightarrow \otimes^r TN, \quad (6.62)$$

kde $\otimes^r T_x f: \otimes^r T_x M \rightarrow \otimes^r T_{f(x)} N$ je tenzorová mocnina tečného (lineárního) zobrazení $T_x f$ ve smyslu definice 6.40.

Chceme-li definovat indukované zobrazení v opačném směru, tj. mezi tenzorovými mocninami kotečných bundlů, musíme vzít v potaz, že tečná zobrazení nejsou obecně bijekce. Postupujme tedy následovně. Uvažujme surjektivní hladké zobrazení $f: M \rightarrow N$ a dále tenzorové pole A typu $(0, s)$ na N , tj. $A: N \rightarrow \otimes_s TN$. Ze surjektivnosti f máme pro každé $y \in N$ vzor $x \in M$, $f(x) = y$ a tečné zobrazení v bodě x , $T_x f: T_x M \rightarrow T_y N$. Dále v bodě y je pole A multilineární zobrazení $A(y): \underbrace{T_y N \times \dots \times T_y N}_{s\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}$ a můžeme jej složit

se zobrazením $(T_x f)^s$, definovaným standardně jako

$$(T_x f)^s := \left(\underbrace{T_x f \times \dots \times T_x f}_{s\text{-krát}} \right) : \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{s\text{-krát}} \longrightarrow \underbrace{T_y N \times \dots \times T_y N}_{s\text{-krát}}.$$

Dostáváme tak komutativní diagram

$$\begin{array}{ccc} T_x M \times \cdots \times T_x M & \xrightarrow{(T_x f)^s} & T_y N \times \cdots \times T_y N \\ & \searrow A(y) \circ (T_x f)^s & \swarrow A(y) \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

ve kterém vidíme, jak můžeme bod po bodu z pole A na N přes zobrazení f naindukovat pole na M . To vede na následující definici.

Definice 6.63.

Buď $A \in \otimes_s TN$ a uvažujme surjektivní hladké zobrazení $f: M \rightarrow N$. **Pullback pole A typu $(0, s)$ podél zobrazení f** definujeme bod po bodu následovně

$$f^* A(x) = A(f(x)) \circ (T_x f)^s . \quad (6.64)$$

Nově vzniklé pole stejného typu $(0, s)$ se značí $f^*(A)$ a v bodě $x \in M$ definuje tenzor $f^*(A)(x)$. Speciálně pro tenzorové pole typu $(0, 0)$, tj. funkci $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme $f^* g = g \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 6.65.

Buďte $g: Q \rightarrow M$ a $f: M \rightarrow N$ hladká zobrazení. Pak pro pullback tenzorového pole $A \in \otimes_s TN$ platí

$$(f \circ g)^* A = g^* (f^* A) . \quad (6.66)$$

Definice 6.67.

Diferenciální k -forma na M nebo také vnější k -forma je antisymetrické tenzorové pole typu $(0, k)$ na M , tj. tenzorové pole $A: M \rightarrow \Lambda^k T^* M$, které je v každém bodě M antisymetrický tenzor.

Definice 6.68.

Pro diferenciální k -formu $A: M \rightarrow \Lambda^k T^* M$ a l -formu $B: M \rightarrow \Lambda^l T^* M$ definujeme jejich **vnější součin $A \wedge B: M \rightarrow \Lambda^{k+l} T^* M$** bod po bodu

$$(A \wedge B)(x) := A(x) \wedge B(x) . \quad (6.69)$$

Poznámka. Speciálně, je-li f vnější 0-forma na M (tj. je to funkce), pak $f \wedge A = fA$. Jinak řečeno, vnější součin funkce s formou je pronásobení formy funkcí.

Věta 6.70.

Pro hladké zobrazení $f: M \rightarrow N$ a diferenciální formy A, B na N platí

$$f^*(A \wedge B) = (f^* A) \wedge (f^* B) . \quad (6.71)$$

Na závěr si označíme prostor všech diferenciálních k -forem na M symbolem $\Omega^k M$. Speciálně pro $k = 0$ je $\Omega^0 M = C^\infty(M, \mathbb{R})$ prostor všech hladkých funkcí na M .

Cvičení

Několik následujících cvičení bude pro mnohé čtenáře opakováním látky z kurzu lineární algebry, nicméně pojmy z této oblasti a manipulace s nimi jsou pro následující kapitolu stěžejní, budeme jim proto věnovat jistou pozornost.

Cvičení 6.72.

Dokažte tvrzení 6.6 a určete kanonický izomorfismus mezi vektorovým prostorem V a jeho druhým duálem V^{**} .

Řešení. Připomeňme pojem duálního prostoru V^* . Je to vektorový prostor sestávající z lineárních 1-forem na V , tj. lineárních zobrazení z V do příslušného tělesa skalárů. V našem případě (pracujeme nad reálnými čísly) $V^* = L(V; \mathbb{R}) = \{u: V \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ je lineární}\}$. Proces dualizace v případě konečně rozměrných prostorů zachovává dimenzi, což můžeme vidět například tak, že sestrojíme bázi. Zejména máme k dispozici duální bázi, definovanou vzhledem ke zvolené bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ na V vztahem $f^i(e_j) = \delta_j^i$ (Kroneckerovo delta). Duální $\{f^1, \dots, f^n\}$ má stejný počet prvků jako původní báze na V a tedy $n = \dim V = \dim V^*$. Použijeme-li dualizaci znovu, získáme prostor $V^{**} = \{\alpha: V^* \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ je lineární}\}$ mající opět dimenzi n . Víme tedy, že $V \cong V^{**}$ a zbývá popsat kanonický izomorfismus mezi těmito prostory, který je dán tzv. evaluací. Každý (pevně zvolený) vektor $v \in V$ můžeme chápat jako lineární 1-formu na V^* , totiž pro libovolné $u \in V^*$ máme přiřazení

$$\text{Ev}_v(u) = u(v), \quad (6.73)$$

které posílá $u: V \rightarrow \mathbb{R}$ na příslušnou hodnotu v v bodě v . Linearita zobrazení Ev_v plyne z linearitu 1-formy u , tedy $\text{Ev}_v \in V^{**}$. Vidíme, že každému $v \in V$ jsme schopni přiřadit prvek druhého duálu

$$\text{Ev}: V \rightarrow V^{**}, \quad (6.74)$$

$$v \mapsto \text{Ev}_v \quad (6.75)$$

a to navíc jednoznačně - injektivita plyne ihned z předpisu 6.73: $\text{Ev}_v \equiv 0 \Rightarrow u(v) = 0 \forall u \in V^* \Rightarrow v = 0$. Ev je tedy izomorfismus, jelikož je to injektivní lineární zobrazení mezi vektorovými prostory stejné dimenze. Nezávisí na volbě zvolené báze na prostorech V a V^{**} , proto je kanonický. \diamond

Poznámka. Operaci $(-)^*$ můžeme chápat jako zobrazení z množiny všech vektorových prostorů do sebe sama, které libovolnému vektorovému prostoru přiřadí jeho duál. Je dokonce více, tzv. *funktor*, konkrétně *endofunktor* kategorie Vect . Kanoničnost izomorfismu Ev lze pak v řeči teorie kategorií vyádřit podmínkou přirozeného izomorfismu funktoru druhého duálu, $(-)^{**}: \text{Vect} \rightarrow \text{Vect}$, s identickým funktorem na Vect .

Cvičení 6.76.

Pomocí tenzorové mocniny reálného vektorového prostoru V vyjádřete

1. Prostor skalárů \mathbb{R} .
2. Prostor vektorů V .
3. Prostor 1-forem V^* .
4. Prostor bilineárních forem na V .
5. Prostor skalárních součinů na V .

Řešení. 1. Prostor skalárů \mathbb{R} můžeme popsat jako nultou tenzorovou mocninu. Podle definice 6.7 máme

$$\bigotimes^0 V = L\left(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{0\text{-krát}}; \mathbb{R}\right).$$

Připomeňme nyní definici multilinearity. Ta říká, že vzhledem ke každému indexu indexové množiny součinu platí jisté podmínky (jinak řečeno: jisté podmínky platí v každé složce součinu). Naše indexová množina pro součin je prázdná a žádná podmínka tedy nebude porušena pro libovolné zobrazení. Můžeme proto říci, že každé zobrazení z prázdného součinu je lineární. Z teorie množin dále víme, že součin přes prázdnou množinu odpovídá jednoprvkové množině

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{0\text{-krát}} \cong \{\star\}$$

a všechna zobrazení z jednoprvkové množiny do \mathbb{R} je samotné \mathbb{R} . Dohromady máme

$$\bigotimes^0 V = \mathbb{R}.$$

2. Prostor vektorů V je první tenzorová mocnina. Díky ztotožnění $V \cong V^{**}$ z tvrzení 6.6 máme ihned z definice 6.7

$$\bigotimes^1 V = L(V^*; \mathbb{R}) = V^{**} \cong V.$$

3. Prostor 1-forem V^* můžeme popsat jako první tenzorovou mocninu nad duálním prostorem V^* . Postupujme argumentem pomocí dimenzí. Z předešlého víme, že $\bigotimes^1 V \cong V$, proto $\bigotimes^1 V$ má dimenzi stejnou jako V . Jelikož V je abstraktní vektorový prostor, můžeme na jeho místo v tenzorovém umocňování dosadit libovolný jiný vektorový prostor a vlastnost zachování dimenze nebude porušena. Aplikujeme-li tuto úvahu na duál V^* , musí platit $\dim(\bigotimes^1 V^*) = \dim(V^*)$. Jelikož víme, že konečněrozměrné vektorové prostory jsou až na izomorfismus určeny svou dimenzí, musí také platit

$$\bigotimes_1 V = \bigotimes^1 V^* \cong V^*$$

Při tomto způsobu řešení pravděpodobně v hlavě čtenáře vyvstala myšlenka postupovat analogicky jako v předešlé části příkladu přímo z definice 6.7, tj.

$$\bigotimes^1 V^* = L(V^{**}; \mathbb{R}) \cong L(V; \mathbb{R}) = V^*.$$

Chceme-li však být důslední, měli bychom prozkoumat vztah $L(V^{**}; \mathbb{R}) \cong L(V; \mathbb{R})$, jehož platnost nemusí být na první pohled zcela zřejmá i přesto, že je velmi očekávatelná. Ověření by se dalo provést například pomocí *univerzální vlastnosti*, která je součástí kategoriální definice tenzorového součinu.

4. Prostor bilineárních forem na V , tj. bilineárních zobrazení z V do \mathbb{R} , můžeme snadno vidět jako druhou tenzorovou mocninu, což plyne bez hlubších úvah přímo z definice 6.7.

$$\text{Bilin}(V; \mathbb{R}) = \{\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid \beta \text{ je bilinární}\} \cong \otimes_2 V.$$

5. Prostor skalárních součinů na V můžeme popsat jako faktorprostor druhé tenzorové mocniny podle vhodného podprostoru (vhodné relace). Skalární součin je totiž pozitivně definitní symetrická bilineární forma (mnohé definice nevyžadují pozitivní definitnost, což bychom nazvali *pseudo-skalárním součinem*). Nechť $N = \langle u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V^* \rangle$, $N \subset \otimes_2 V$ je lineární podprostor, pak prostor všech skalárních součinů lze popsat jako $(\otimes_2 V) / N$.

◇

Cvičení 6.77.

Dokažte vztah 6.11.

Řešení. Buď $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze ve V a $\{d_1, \dots, d_n\}$ duální báze ve V^* . Vzhledem k těmto bázím má $v \in V$ souřadné vyjádření $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ a $u \in V^*$ má vyjádření $\sum_{j=1}^n u_j d^j$. Z linearit 1-formů pak v souřadnicích platí

$$u(v) = \left(\sum_{j=1}^n u_j d^j \right) \left(\sum_{i=1}^n v^i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^n u_j v^i d^j(e_i) = \sum_{i,j=1}^n u_j v^i \delta_i^j = \sum_{i=1}^n u_i v^i.$$

což jsme chtěli ukázat.

◇

Cvičení 6.78.

Ukažte, že pro r -tenzor α tvaru $\alpha = v_1 \otimes \dots \otimes (av_i + b\tilde{v}_i) \otimes \dots \otimes v_r$, kde a, b jsou skaláry, platí

$$\alpha = a(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r) + b(v_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_i \otimes \dots \otimes v_r). \quad (6.79)$$

Řešení. Užitím definice 6.13, jednoduchý výpočet po dosazení libovolného argumentu (u_1, \dots, u_r) dává

$$\begin{aligned} \alpha(u_1, \dots, u_r) &= v_1(u_1) \dots (av_i + b\tilde{v}_i)(u_i) \dots v_r(u_r) \\ &= v_1(u_1) \dots (av_i(u_i) + b\tilde{v}_i(u_i)) \dots v_r(u_r) \\ &= av_1(u_1) \dots v_i(u_i) \dots v_r(u_r) + bv_1(u_1) \dots \tilde{v}_i(u_i) \dots v_r(u_r) \\ &= av_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r(u_1, \dots, u_r) + bv_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_i \otimes \dots \otimes v_r(u_1, \dots, u_r) \end{aligned}$$

Tento výsledek je platný pro libovolný argument (u_1, \dots, u_r) , proto 6.79 platí.

◇

Cvičení 6.80.

Určete souřadnicové vyjádření tenzorového součinu vektorů $v, w \in V$, kde $\dim V = 2$. Dále určete, do jakého prostoru náleží prvek daný součinem $A \otimes v$, kde A je matice 2×2 .

Řešení. 1. Nechť $\{e_1, e_2\}$ je báze ve V , vzhledem ke které píšeme souřadné vyjádření $v = v^1 e_1 + v^2 e_2$, $w = w^1 e_1 + w^2 e_2$. Součin $v \otimes w$ je prvkem $\otimes^2 V$. Ten můžeme popsat bází $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$. Pak s ohledem na 6.79 platí

$$\begin{aligned} v \otimes w &= (v^1 e_1 + v^2 e_2) \otimes (w^1 e_1 + w^2 e_2) \\ &= v^1 w^1 e_1 \otimes e_1 + v^1 w^2 e_1 \otimes e_2 + v^2 w^1 e_2 \otimes e_1 + v^2 w^2 e_2 \otimes e_2 \end{aligned}$$

V souřadnicích můžeme psát $v \otimes w = (v^1 w^1, v^1 w^2, v^2 w^1, v^2 w^2)$.

2. Matice 2×2 můžeme chápat jako tenzor typu $(1, 1)$, tj. $A \in \otimes_1^1 V$. Ve druhé části cvičení 6.76 jsme viděli, že prvek vektorového prostoru je zároveň prvkem první tenzorové mocniny, tj. $v \in \otimes^1 V$. Dohromady pak $A \otimes v \in \otimes_1^2 V$.

◇

Cvičení 6.81.

Pomocí báze $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve V zkonstruuje bázi na r -té tenzorové mocnině $\otimes^r V$ a určete dimenzi tohoto prostoru. Dále uvažte prvek ve tvaru $A = v_1 \otimes \dots \otimes v_r$, kde všechna v_i jsou z V a vyjádřete jeho souřadnice. Naleznete také souřadnicové vyjádření tenzorů $B \in \otimes^r V$ a $C \in \otimes_s V$.

Řešení. V příkladu 6.80 jsme viděli, jak vypadá báze prostoru $\otimes^2 V$. Analogicky můžeme postupovat v případě prostoru $\otimes^r V$. Báze bude mít tvar $\alpha = \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid e_{i_j} \in V, 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n\}$. Jak vidíme, sestává z tenzorového součinu r bázevých prvků prostoru V , přičemž na i -té pozici může být jakýkoliv prvek a prvky se mohou v součinu opakovat. Na r pozicích máme n možností, jak zvolit vektor e_i . Dimenze prostoru $\otimes^r V$, tj. počet prvků báze α , je r^n .

Dále vzhledem k ε vyjádříme vektory zadávající A . Pro libovolný vektor v_i platí $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$. Dosadíme-li toto vyjádření do součinu, získáme

$$\left(\sum_{j=1}^n v_1^j e_j \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{j=1}^n v_r^j e_j \right) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}, \quad (6.82)$$

odkud vidíme, že souřadnice tenzoru A vzhledem k α na pozici $i_1 \dots i_r$ je $v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r}$. Souřadnice obecného tenzoru B , který může být součtem jednoduchých tenzorů (například $B = (v_1 \otimes \dots \otimes v_r) + (\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_r)$ (viz 6.79) můžeme spočítat tak, že sečteme souřadnice jednoduchých tenzorů. B tedy má na pozici $i_1 \dots i_r$ souřadnici $B^{i_1 \dots i_r} = v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} + \tilde{v}_1^{i_1} \dots \tilde{v}_r^{i_r}$. Píšeme stručně, stejně jako v případě vektorů či matic, souřadnicové vyjádření tenzorů do závorek $B = (B^{i_1 \dots i_r})$, tj.

$$B = \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} B^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}. \quad (6.83)$$

Obdobně postupujeme pro $C \in \otimes_s V$, přitom bázi $\tilde{\alpha}$ na $\otimes_s V$ konstruujeme z duální báze $\{d^1, \dots, d^n\}$, $\tilde{\alpha} = \{d^{i_1} \otimes \dots \otimes d^{i_s} \mid d^{i_j} \in V^*, 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n\}$. Vzhledem k této bázi pak píšeme $C = (C_{i_1 \dots i_s})$, tj.

$$C = \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} C_{i_1 \dots i_s} d^{i_1} \otimes \dots \otimes d^{i_s}. \quad (6.84)$$

◇

Cvičení 6.85.

Pro libovolné $A \in \otimes^r V$ a $B \in \otimes^s V$ určete souřadnice $r + s$ tensoru $A \otimes B$.

Řešení. Vyjádříme-li A vzhledem k bázi $\alpha = \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n\}$, $A = (A^{i_1 \dots i_r})$, a B vzhledem k bázi $\beta = \{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} \mid 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_s \leq n\}$, $B = (B^{j_1 \dots j_s})$ pak souřadnice součinu jsou $A \otimes B = (A^{i_1 \dots i_r} B^{j_1 \dots j_s})$, což plyne přímo z 6.79 (jako speciální případ: vytknutí skaláru z tenzorového součinu). ◇

Cvičení 6.86.

Pro tenzor $A \in \otimes^r V$ určete hodnotu výrazu $A(u_1, \dots, u_r)$, tj. vyčíslete A v libovolném argumentu (u_1, \dots, u_r) , kde (nutně z definice A) $u_i \in V^*$ pro všechna i .

Řešení. Již víme, že na $\otimes^r V$ můžeme jako bázi volit $\alpha = \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n\}$ a vzhledem k ní psát $A = \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} A^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$. Na každý sčítanec této sumy můžeme použít definující rovnost 6.13 a získat tak

$$\begin{aligned} A(u_1, \dots, u_r) &= \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} A^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \right) (u_1, \dots, u_r) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} (A^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})(u_1, \dots, u_r) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} (A^{i_1 \dots i_r} e_{i_1}(u_1) \dots e_{i_r}(u_r)) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_r \leq n} (A^{i_1 \dots i_r} u_1^{i_1} \dots u_r^{i_r}) \end{aligned}$$

kde $u_k^{i_j}$ je souřadnice vektoru u_k na pozici i_j . ◇

Cvičení 6.87.

V souřadnicích vyjádřete libovolný antisymetrický tenzor $B \in \Lambda^r V$. Dokažte, že platí

$$B^{i_1 \dots i_r} = \text{sgn}(\sigma) B^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}, \quad (6.88)$$

kde σ je libovolná permutace r -prvkové množiny.

Řešení. V příkladu 6.81 jsme viděli, jak na r -té vnější mocnině V vypadá jedna možná báze, konkrétně $\alpha = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$. Libovolný tenzor $B \in \Lambda^r V$ má vzhledem k α souřadné vyjádření $B = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$. Uvažujme novou množinu generátorů $\beta = \{e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_r)} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$, pro pevně zvolenou permutaci $\sigma \in P_r$. Tato množina je opět bází v $\Lambda^r V$ a podle věty 6.32 se prvek $e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_r)}$ liší od $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ pouze znaménkem, přitom rozsah indexů je stejný. Tenzor B pak vzhledem k této bázi lze napsat jako $B = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_r)}$. Jelikož je každý tenzor geometrickým objektem, nezáleží na námi zvoleném způsobu popisu, a platí proto rovnost

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = B = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_r)} .$$

Pravou stranu rovnice můžeme upravit podle věty 6.32

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = B = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} B^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} .$$

Porovnáním koeficientů pak získáváme požadovaný výsledek $B^{i_1 \cdots i_r} = \operatorname{sgn}(\sigma) B^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)}$

◇

Cvičení 6.89.

Určete pullback následujících forem na \mathbb{R}^3 : $\omega = xyzdy$, $\theta = \omega \wedge (e^x dx + e^y dy)$ a $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$ podél zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u^2, 2uv, e^{uv})$.

Řešení. Na \mathbb{R}^3 uvažujeme souřadnice x, y, z a odpovídající souřadnice dx, dy, dz na kotečném bandlu $T^*\mathbb{R}^3$, vzhledem ke kterým máme vyjádřeny formy ω, θ, μ . Poznamenejme, že narozdíl od obecného případu variet jsou tyto souřadnice definované globálně a vyjádření forem je tedy platné na celé varietě \mathbb{R}^3 . K výpočtům uijeme vztah 6.70. Dále budeme potřebovat vztah $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$, platný pro libovolnou formu α , jež je uveden jako tvrzení v následující kapitole. Na závěr si uvědomíme, že f^* je lineární, což plyne přímo z definice 6.63. Začneme s výpočtem

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(xyzdy) \\ &= u^2 2uve^{uv} (d(2uv)) \\ &= 2u^3 ve^{uv} (2vdu + 2udv) \\ &= 4u^3 v^2 e^{uv} du + 4u^4 ve^{uv} dv . \end{aligned}$$

Dále pro $f^*\theta$ máme

$$f^*\theta = f^*(\omega \wedge (e^x dx + e^y dy)) = f^*\omega \wedge f^*(e^x dx + e^y dy) .$$

Jelikož $f^*\omega$ již známe, provedeme výpočet druhého součinitele zvlášť

$$\begin{aligned} f^*(e^x dx + e^y dy) &= e^{u^2} 2udu + e^{2uv} (2vdu + 2udv) \\ &= 2 \left(e^{u^2} u + e^{2uv} v \right) du + 2ue^{2uv} dv . \end{aligned}$$

Dosadíme do původního výpočtu pro $f^*\theta$ spolu s výsledkem pro $f^*\omega$

$$f^*\theta = (4u^3v^2e^{uv}du + 4u^4ve^{uv}dv) \wedge (2(e^{u^2}u + e^{2uv}v)du + 2ue^{2uv}dv) .$$

Roznásobíme, přičemž výrazy tvaru $d\alpha \wedge d\alpha$ se nulují a 1-formy spolu antikomutují, tj. $du \wedge dv = -dv \wedge du$. Dále tedy máme

$$\begin{aligned} f^*\theta &= 8u^4v^2e^{3uv}du \wedge dv + 8u^4ve^{uv}(e^{u^2}u + e^{2uv}v) \\ &= -8u^5ve^{u(u+v)}du \wedge dv . \end{aligned}$$

Než se pustíme do posledního výpočtu, zkusíme odhadnout výsledek. Forma $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$ je 3-forma na \mathbb{R}^3 . Jelikož každá $(n+1)$ -forma na n -rozměrné varietě je nutně nulová a pullback zachovává stupeň formy, bude $f^*\mu$ 3-forma na \mathbb{R}^2 , tj. měla by být nulová. Ověřme si tuto úvahu výpočtem.

$$\begin{aligned} f^*\mu &= f^*(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= d(u^2) \wedge d(2uv) \wedge dd(e^{uv}) \\ &= 2udu \wedge \underbrace{2(vdu + u dv)}_{\alpha} \wedge e^{uv} \underbrace{(vdu + u dv)}_{\alpha} \\ &= 4ue^{uv}du \wedge \underbrace{\alpha \wedge \alpha}_0 = 0 , \end{aligned}$$

čímž jsme hotovi. ◇

Integrovaní vnějších forem

Vnější diferenciál

V této části si zdefinujeme důležitou operaci na prostoru diferenciálních k -forem (dále jen k -forem). Připomínáme, že funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme chápat jako 0-formu, její diferenciál df je pak 1-formou. Pojem **\mathbb{R} -lineárního zobrazení** budeme využívat (jako jsme to dělali implicitně doposud) pro zobrazení, které je lineární vzhledem k reálným číslům.

Věta 7.1.

Existuje jediné \mathbb{R} -lineární zobrazení $d: \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1} M$, $k = 0, 1, \dots, n$, takové, že platí následující tři podmínky

1. pro každou funkci $f \in \Omega^0 M$ je df její diferenciál,
2. $d(\omega \wedge \varphi) = (d\omega \wedge \varphi) + (-1)^k (\omega \wedge d\varphi)$ pro $\omega \in \Omega^k M$, $\varphi \in \Omega^l M$,
3. pro každou funkci $f \in \Omega^0 M$ platí $d(df) = 0$.

Definice 7.2.

Zobrazení z věty 7.1 nazýváme **vnější diferenciál**.

Poznámka. Vnější diferenciál je operace, která každé k -formě přidělí $(k+1)$ -formu. Všimněme si také, že pro funkci f je $f \wedge \omega = f\omega$, čímž se druhá podmínka z věty 7.1 redukuje na $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$. Nejpodstatnější část této poznámky je fakt (odvoditelný pomocí technik matematické analýzy), že všechny tři vlastnosti výše uvedené věty platí i pro zúžení forem na libovolnou otevřenou množinu $U \subset M$. Toho se dá efektivně využít pro důkaz věty výpočtem v lokálních souřadnicích.

Věta 7.3.

Pro každou k -formu ω platí

$$d(d\omega) = 0. \quad (7.4)$$

Věta 7.5.

Pro každé hladké zobrazení $f: M \rightarrow N$ a každou l -formu ω na N platí

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega). \quad (7.6)$$

Definice 7.7.

k -formu ω na M nazveme uzavřenou, jestliže platí $d\omega = 0$. Nazveme ji exaktní, jestliže existuje $(k-1)$ -forma φ , pro kterou platí $d\varphi = \omega$.

Podle věty 7.3 můžeme ihned vidět, že každá exaktní forma je také uzavřená. O opačné implikaci hovoří následující věta, uváděná z historických důvodů jako lemma. Je důležitým výsledkem popisujícím souvislost mezi exaktními a uzavřenými formami.

Věta 7.8.

(Poincarého lemma). Jestliže $\omega \in \Omega^k \mathbb{R}^n$ splňuje $d\omega = 0$, pak existuje $\varphi \in \Omega^{k-1} \mathbb{R}^n$ taková, že $\omega = d\varphi$.

Poznámka. Předešlá věta říká: každá uzavřená k -forma na \mathbb{R}^n je exaktní. Pro orientaci uveďme, že Poincarého lemma je často formulováno v obecnějším tvaru zahrnujícím topologický pojem jednoduché souvislosti.

Věta 7.9.

Nechť je ω uzavřená 1-forma na \mathbb{R}^n taková, že pro f, g funkce na \mathbb{R}^n platí $df = \omega = dg$. Pak $g = f + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 7.10.

Nechť $Z^k M$ značí prostor všech uzavřených k -forem na M a $B^k M$ prostor všech exaktních k -forem na M . Pak platí

1. $Z^k M$ i $B^k M$ jsou vektorové prostory,
2. $B^k M$ je vektorový podprostor v $Z^k M$.

Definice 7.11.

Vektorový faktorprostor $H^k M = Z^k M / B^k M$ nazýváme **k -tý de-Rhamův prostor** (nebo také **k -tá de-Rhamova kohomologická grupa**) **variety M** . Pro $k = 0$ klademe $H^0 M = Z^0 M$. Prvek $H^k M$ značíme $[\omega]$.

Poznámka. Reprezentanti třídy $[\omega] \in H^k M$ jsou tvaru $\omega + d\varphi$, kde ω je uzavřená k -forma a φ je $(k-1)$ -forma.

Věta 7.12.

Nechť $f: M \rightarrow N$ je hladké zobrazení, $\omega \in Z^k M$. Pak předpis

$$f^\#[\omega] = [f^* \omega] \tag{7.13}$$

určuje lineární zobrazení $f^\#: H^k N \rightarrow H^k M$.

Věta 7.14.

Nechť $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow P$ jsou hladká zobrazení. Pak platí

$$(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\# . \quad (7.15)$$

Následující věta ukazuje, že de-Rhamovy kohomologie v sobě nesou podstatnou informaci o varietě a můžou být použity jako nástroj klasifikace.

Věta 7.16.

Je-li $f: M \rightarrow N$ difeomorfismus, pak $f^\#: H^k N \rightarrow H^k M$ je lineární izomorfismus.

Tím, že jsme v definici 7.11 s geometrickým objektem (varietou M) zasociovali algebraický objekt (vektorový prostor $H^k M$) jsme získali o varietě novou informaci. Následující lemma a věta s ní související ukazuje, že algebraickou strukturu nad M můžeme dále obohatit o jistý typ násobení, indukované z vnějšího součinu.

Lemma 7.17.

Nechť $\omega \in \Omega^k M$ a $\varphi \in \Omega^l M$.

1. Jsou-li ω i φ uzavřené, pak také $\omega \wedge \varphi$ je uzavřené.
2. Je-li ω exaktní a φ uzavřené, pak je $\omega \wedge \varphi$ exaktní.

Věta 7.18.

Nechť $\omega \in H^k M$, $\varphi \in H^l M$. Pravidlo $[\omega] \wedge [\varphi] = [\omega \wedge \varphi]$ určuje bilineární zobrazení $H^k M \times H^l M \rightarrow H^{k+l} M$.

Definice 7.19.

Nechť $\dim M = n$ a uvažujme $HM = H^0 M \otimes \cdots \otimes H^n M$, přímý součet vektorových prostorů. Dále uvažujme prvky $\omega, \varphi \in HM$, které můžeme zapsat ve tvaru formálního součtu $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n$, $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$, kde $\omega_i, \varphi_i \in H^i M$ pro všechna i . Pak vzhledem k součinu

$$\omega \wedge \varphi = (\omega_1 + \cdots + \omega_n) \wedge (\varphi_1 + \cdots + \varphi_n) , \quad (7.20)$$

který roznásobujeme po jednotlivých sčítancích, hovoříme o **de-Rhamově okruhu HM variety M** .

Poznámka. V součinu $(\omega_1 + \cdots + \omega_n) \wedge (\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)$ může nastat pro $\omega_{i_1} \wedge \varphi_{j_1}$ a $\omega_{i_2} \wedge \varphi_{j_2}$ rovnost $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$. V tomto případě oba prvky sečteme. Uvědomme si, že nastane-li pro $\omega_{i_1} + \varphi_{j_1}$ nerovnost $i + j > n$ pak je výsledek součinu nutně roven nule.

Věta 7.21.

Nechť X, Y jsou vektorová pole na M , $\omega \in \Omega^1 M$. Pak platí

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) . \quad (7.22)$$

Poznámka. Rozeberme si jednotlivé členy ve vzorci 7.22. Je-li ω 1-forma, můžeme ji aplikovat na vektorové pole a získat tak funkci, kterou poté můžeme derivovat ve směru vektorového pole, což je významem symbolu $X\omega(Y)$. Symbol $[X, Y]$ je hodnota Lieovy závorky na dvou vektorových polích, což je opět vektorové pole a můžeme jej také vyčíslit na formě, což je $\omega([X, Y])$. Na závěr si uvědomíme, že $d\omega$ je 2-forma a jako argumenty má dvě vektorová pole, to je význam pro $d\omega(X, Y)$.

Integrovaní vnějších forem

Integrovaní vnějších forem úzce souvisí s orientací variety. V případě vektorových prostorů se orientace definuje tak, že zvolíme bázi a prohlásíme ji za kladnou. Všechny ostatní báze, které se od původní liší maticí přechodu s kladným determinanem prohlásíme taktéž za kladné báze. Ostatní báze pak chápeme jako záporné. Pro variety zavedeme definici analogicky pomocí tečných prostorů.

Definice 7.23.

Orientací variety M rozumíme takový výběr orientací všech jejích tečných prostorů, že ke každému $a \in M$ existuje lokální mapa $\varphi: U \rightarrow V$, $a \in U$, taková, že $\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_x$ je kladná báze v $T_x M$ pro všechna $x \in U$.

Věta 7.24.

Na souvislé varietě M existují nejvýše dvě orientace.

Poznámka. Narozdíl od situace ve vektorových prostorech nemáme z definice 7.23 ani z věty 7.24 zaručeno, že globální výběr orientace vždy existuje. To vede k následující definici orientovatelnosti.

Definice 7.25.

Varietu M nazveme **orientovatelná**, jestliže existuje její orientace. V opačném případě hovoříme o neorientovatelné varietě. Orientovatelná varieta s vybranou orientací se nazývá **orientovaná**.

Definice 7.26.

Standardním n -rozměrným simplexem (krátce jen n -simplexem) $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme podmnožinu zadanou rovnicí $x^1 + \dots + x^n \leq 1$, $x^i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Podmnožinu $s_i \subset \Delta_i$ splňující rovnici $x^i = 0$ nazýváme **i -tá stěna** Δ_n a podmnožinu zadanou rovnicí $x^1 + \dots + x^n = 1$ nazýváme **0-tá stěna**.

Abychom simplexu mohli chápat geometricky jako objekty, které neleží nutně v prvním hyperoktantu (analogie kvadrantu pro $n > 3$) souřadného systému, zavádíme obecnější definici.

Definice 7.27.

Podmnožinu $D_k \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **k -rozměrný simplex**, $k \leq n$, jestliže v \mathbb{R}^n existuje taková afinní souřadná soustava y^1, \dots, y^n , v níž je D_k určena vztahy $y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0$, $y^1 + \dots + y^k \leq 1$, $y^i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k$.

Poznámka. D_k je standardní k -rozměrný simplex v afinním podprostoru zadaném rovnicemi $y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0$, který identifikujeme s \mathbb{R}^k pomocí souřadnic y^1, \dots, y^k z definice 7.27. Všimněme si také, že i -tá stěna simplexu Δ_n je $(n-1)$ -rozměrný simplex. Zcela analogicky pro D_k bude i -tá stěna $(k-1)$ -rozměrným simplexem. Postupujeme-li takto až na případ 1-stěny, získáváme **hrany simplexu**, 0-stěny jsou **vrcholy simplexu**. k -rozměrnou stěnou k -simplexu rozumíme simplex sám.

Definice 7.28.

Hranici n -simplexu nazýváme sjednocení všech jeho $(n-1)$ -rozměrných stěn a značíme ji $\partial\Delta_n$. Doplněk hranice nazýváme **vnitřek n -simplexu** a značíme ji $\Delta_n^0 = \Delta_n \setminus \partial\Delta_n$. **Orientací simplexu** rozumíme orientaci prostoru \mathbb{R}^n , ve kterém je simplex vnořený. **Orientaci $(n-1)$ -stěny orientovaného n -simplexu** definujeme pomocí principu vnější normály ($(n-1)$ -stěna sdílí orientaci afinního podprostoru, ve kterém leží; orientace tohoto podprostoru je taková, že doplníme-li bázi jeho zaměření o normálu vnější vzhledem k simplexu, získáme bázi okolního \mathbb{R}^n , jejíž orientace je shodná s původní orientací \mathbb{R}^n).

Nyní zobecníme definici simplexu na hladkou varietu, abychom pomocí těchto objektů poté mohli zavést pojem integrálu diferenciální formy.

Definice 7.29.

Nechť M je n -rozměrná varieta. Podmnožinu $\sigma_k \subset M$ nazveme **křivočarý k -simplex** (zkráceně jen k -simplex, bude-li z kontextu jasné, o čem je řeč), jestliže existuje takové její okolí U a taková lokální mapa $\varphi: U \rightarrow V$, že $\varphi(\sigma_k)$ je standardní k -simplex v podprostoru zadaném rovnicemi $x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$.

Poznámka. Pro standardní simplex máme pojmy stěn, hranice, vnitřku a orientace. Ty můžeme pomocí lokální mapy, kterou křivočarý simplex ztotožňujeme se standardním (viz. předchozí definice), přenést na varietu a získat tak stěny s_i , hranice $\partial\sigma_k$, vnitřek σ_k^0 i orientaci pro křivočarý simplex. Orientace n -rozměrné variety určuje orientaci každého n -simplexu σ_n . Dále si všimněme, že σ_k^0 je k -rozměrnou podvarietou v M .

K definici integrálu použijeme následující přípravnou úvahu. Nechť ω je n -forma na n -rozměrné varietě M , $\sigma_n \subset M$ orientovaný n -simplex. Nechť $\varphi: U \rightarrow V$ je lokální mapa, která převádí σ_n na Δ_n se zachováním orientace. Pak pullback zúžení formy ω při mapě φ je n -forma $\omega_\varphi := (\varphi^{-1})^*(\omega|_U)$ na $V \subset \mathbb{R}^n$. Jelikož $\omega_\varphi \in \Lambda^n T_x^* \mathbb{R}^n$ a $\dim(\Lambda^n T_x^* \mathbb{R}^n) = 1$ je tato forma tvaru $\omega_\varphi = a_\varphi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, kde $a_\varphi = a_\varphi(x^1, \dots, x^n)$ je funkce na V .

Definice 7.30.

Integrál n -formy ω na orientovaném n -simplexu $\sigma_n \subset M$ definujeme předpisem

$$\int_{\sigma_n} \omega = \int_{\Delta_n} \cdots \int_{\Delta_n} a_\varphi dx^1 \cdots dx^n, \quad (7.31)$$

kde pravá strana rovnice je klasický vícenásobný integrál v \mathbb{R}^n .

Věta 7.32.

Definice 7.30 nezávisí na volbě lokální mapy φ .

K důkazu předešlé věty připomeneme lemma popisující způsob transformace vícenásobných integrálů.

Lemma 7.33.

Nechť W, \bar{W} jsou dvě okolí Δ_n a $f: W \rightarrow \bar{W}$, $y^i = f^i(x)$ je difeomorfismus takový, že $f(\Delta_n) = \Delta_n$. Pak pro každou hladkou funkci $b(y) = b(y^1, \dots, y^n)$ na \bar{W} platí

$$\int_{\Delta_n} \cdots \int_{\Delta_n} b(y) dy^1 \cdots dy^n = \int_{\Delta_n} \cdots \int_{\Delta_n} b(f(x)) \left| \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \right| dx^1 \cdots dx^n. \quad (7.34)$$

Tvrzení 7.35.

Nechť $\omega, \varphi \in \Omega^n M$, $c, d \in \mathbb{R}$. Dále necht σ_n je křivocharý orientovaný simplex na M a označme $-\sigma_n$ simplex s opačnou orientací. Pak platí

$$\int_{\sigma_n} (c\omega + d\varphi) = c \int_{\sigma_n} \omega + d \int_{\sigma_n} \varphi \quad (7.36)$$

$$\int_{-\sigma_n} \omega = - \int_{\sigma_n} \omega. \quad (7.37)$$

Obdobně jako v případě integrování n -forem na varietě dimenze n budeme pro definici integrování k -forem, $k \leq n$ potřebovat přípravnou úvahu. Necht M je n -dimenzionální varieta, $\sigma_k \subset M$ je orientovaný k -simplex a $\varphi: U \rightarrow V$, $\sigma_k \subset U$ lokální mapa z definice 7.29, která ztotožňuje σ_k se standardním Δ_k . Pak $\varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}^k)$, kde $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ je podprostor o rovnicích $x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$, je k -rozměrná podvarieta v M a σ_k je orientovaný k -simplex na ní. Označme ji N . K následující definici potřebujeme pullback formy ω podél vložení podvariety $i_N: N \hookrightarrow M$, tj. k -formu $i_N^* \omega$ na N .

Definice 7.38.

Integrál k -formy ω na orientovaném k -simplexu $\sigma_k \subset N \subset M$ definujeme předpisem

$$\int_{\sigma_k} \omega = \int_{\sigma_k} i_N^* \omega. \quad (7.39)$$

Tvrzení 7.40.

Definice 7.38 nezávisí na podvarietě N .

Tvrzení 7.41.

Nechť $\omega, \varphi \in \Omega^k M$, $\sigma_k \subset M$ je orientovaný k -simplex, $-\sigma_k$ k němu opačně orientovaný simplex, kde $k \leq n = \dim(M)$ a c, d reálné konstanty. Pak platí

$$\int_{\sigma_k} (c\omega + d\varphi) = c \int_{\sigma_k} \omega + d \int_{\sigma_k} \varphi \quad (7.42)$$

$$\int_{-\sigma_k} \omega = - \int_{\sigma_k} \omega . \quad (7.43)$$

Definice 7.44.

k -rozměrným polyedrem P na varietě M rozumíme konečnou množinu $\{\sigma_k^1, \dots, \sigma_k^m\}$ k -simplexů na M takových, že průnikem libovolných dvou z nich je buď společná stěna dimenze menší než k nebo prázdná množina. Řekneme, že P je **orientovaný**, jsou-li všechny k -simplexy, které jej tvoří, orientované. Značíme pak $P = \sigma_k^1 + \dots + \sigma_k^m$.

Poznámka. Hranice $\partial\sigma_k$ orientovaného k -simplexu je součet jeho orientovaných $(k-1)$ -stěn s_i , tj. $\partial\sigma_k = s_0 + s_1 + \dots + s_n$. Analogicky hranici polyedru píšeme ve tvaru $\partial P = \partial\sigma_k^1 + \dots + \partial\sigma_k^m$.

Definice 7.45.

Integrál k -formy ω přes orientovaný k -polyedr P definujeme předpisem

$$\int_P \omega = \int_{\sigma_k^1} \omega + \dots + \int_{\sigma_k^m} \omega . \quad (7.46)$$

Věta 7.47.

(Obecná Stokesova věta). Nechť P je orientovaný k -rozměrný polyedr na varietě M , ∂P je jeho hranice orientovaná podle principu vnější normály a ω je $(k-1)$ -forma na M . Pak platí

$$\int_{\partial P} \omega = \int_P d\omega . \quad (7.48)$$

Cvičení 7.49.

Nechť ω je k -forma na varietě M dimenze n . Spočítejte souřadné vyjádření vnější derivace $d\omega$.

Řešení. Uvažujme vyjádření ω v lokálních souřadnicích (x^i) , tj.

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Rozebereme situaci zvlášť pro $k = 0$, $0 < k < n$ a $k = n$. První případ $k = 0$ znamená, že uvažovaná forma je hladká funkce na M , tj. $\omega = \omega(x^1, \dots, x^n)$. První podmínka z věty 7.1 říká, že vnější derivace je diferenciál, proto

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x^i} dx^i.$$

Případ $0 < k < n$ vyřešíme užitím všech tří podmínek z věty 7.1 i faktu, že vnější diferenciál je lineární. Díky linearitě máme

$$d\omega = d\left(\sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum d(\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

a situaci vyřešíme vzhledem ke každému sčítanci zvlášť. Přepíšeme-li násobení hladkou funkcí jako vnější součin s 0-formou, tj. $\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ můžeme použít podmínku 2 z věty 7.1

$$\begin{aligned} d(\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d(\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + (-1)^0 (\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}). \end{aligned}$$

Přítom $\omega_{i_1 \dots i_k}$ je hladká funkce, tj.

$$d\omega_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i$$

a člen $d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ můžeme rozderivovat na

$$d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \sum \left(d(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \dots + (-1)^{k-1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{i_k}) \right).$$

Odtud z podmínky 3 vidíme, že platí

$$d(\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Dohromady máme

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (7.50)$$

Případ $k = n$ znamená, že pracujeme s formou ve tvaru $\omega = \omega(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, kde $\omega(x^1, \dots, x^n)$ je hladká funkce na M . Rozderivováním jako v předešlé části dostáváme $d\omega = 0$. \diamond

Cvičení 7.51.

Uvažujme n -rozměrný euklidovský prostor E_n , na kterém máme standardní skalární součin $\langle -, - \rangle$. Každé vektorové pole X na E_n jednoznačně určuje 1-formu ω_X pomocí skalárního součinu dosazením X za první složku

$$\omega_X = \langle X, - \rangle. \quad (7.52)$$

Pro libovolné vektorové pole Y je $\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle$. Dále X definuje $(n-1)$ -formu ω^X předpisem

$$\omega^X(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = X \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{n-1}, \quad (7.53)$$

kde Y_i , $i = 1, \dots, n-1$ jsou vektorová pole na E_n . Nalezněte souřadné vyjádření ω_X i ω^X v dimenzi 3. Pro vektorové pole $X = (x, x+y, z^2)$ určete ω_X a ω^X a dále hodnotu ω_X na vektorovém poli $Y = (z^2, \sin x, y^2)$ v bodě $(\frac{\pi}{2}, 2, 3)$. V tomtéž bodě také určete hodnotu ω^X na polích Y a $Z = (x, y, z)$.

Poznámka. Než se pustíme do počítání poznamenejme, že formy ω_X i ω^X je možné definovat i na obecnějších prostorech než jsou euklidovské a to na tzv. Riemannovských varietách, což jsou variety vybaveny skalárním součinem. Budeme se jimi zabývat v pozdějších kapitolách.

Řešení. Uvažujme souřadnice (x^i) na E_n zadávající souřadnice $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ na T^*E_n takové, abychom v každém bodě x měli ortogonální bázi tečného prostoru $T_x E_n$. Disponujeme také duálními souřadnicemi (dx^i) na T^*E_n . Počítejme nejprve obecné vyjádření obou forem.

V souřadnicích pišme $X = \sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{j=1}^3 Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Počítejme

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^3 Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \quad (7.54)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 X^i Y^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \quad \text{bilinearita} \quad (7.55)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 X^i Y^j \delta_j^i \quad \text{ortogonalita} \quad (7.56)$$

$$= \sum_{i=1}^3 X^i Y^i \quad (7.57)$$

přítom

$$\omega_X = \langle X, - \rangle = \sum_{i=1}^3 X^i \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, - \rangle.$$

Porovnáním s výsledkem 7.57 vidíme, že $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, - \rangle$ musí být 1-forma, jejíž hodnota na Y je i -tá souřadnice Y^i . To odpovídá prvku duální báze dx^i , tudíž

$$\omega_X = \sum_{i=1}^3 X^i dx^i. \quad (7.58)$$

Nechť dále $Z = \sum_{k=1}^3 Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Pak $\omega^X(Y, Z)$ je funkce, která má v bodě x hodnotu odpovídající orientovanému objemu rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $X(x), Y(x), Z(x)$. Můžeme proto psát

$$\omega^X(Y, Z) = \det \begin{pmatrix} X^1 & Y^1 & Z^1 \\ X^2 & Y^2 & Z^2 \\ X^3 & Y^3 & Z^3 \end{pmatrix}.$$

Laplaceovým rozvojem podle prvního sloupce získáme

$$\omega^X(Y, Z) = X^1(Y^2Z^3 - Y^3Z^2) - X^2(Y^1Z^3 - Y^3Z^1) + X^3(Y^1Z^2 - Y^2Z^1). \quad (7.59)$$

Obecná 2-forma v dimenzi 3 je tvaru

$$f_1 dx^1 \wedge dx^2 + f_2 dx^2 \wedge dx^3 + f_3 dx^3 \wedge dx^1.$$

Dosadíme-li do ní pole Y a Z , získáme přímo z definice vnějšího součinu výraz

$$f_1(Y^1Z^2 - Y^2Z^1) + f_2(Y^2Z^3 - Y^3Z^2) + f_3(Y^3Z^1 - Y^1Z^3). \quad (7.60)$$

Porovnáním s výsledkem 7.59 ihned vidíme, že $f_1 = X^3$, $f_2 = X^1$, $f_3 = X^2$, proto lze ω^X psát ve tvaru

$$\omega^X = X^3 dx^1 \wedge dx^2 + X^1 dx^2 \wedge dx^3 + X^2 dx^3 \wedge dx^1. \quad (7.61)$$

Před dosazením konkrétních hodnot přejdeme ke klasické notaci ve třech dimenzích $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Pro pole $X = (x, x+y, z^2)$ je 1-forma ω_X ve tvaru

$$\omega_X = x dx + (x+y) dy + z^2 dz.$$

Pro pole $Y = (z^2, \sin x, y^2)$ dostáváme

$$\omega_X(Y) = \omega_X(z^2, \sin x, y^2) = xz^2 + (x+y) \sin x + z^2 y^2,$$

což v bodě $x = (\frac{\pi}{2}, 2, 3)$ dává hodnotu $\omega_X(Y)(x) = 5\pi + 38$. Konečně 2-forma ω^X má tvar

$$\omega^X = z^2 dx \wedge dy + x dy \wedge dz + (x+y) dz \wedge dx.$$

Dosadíme Y a $Z = (x, y, z)$ a upravíme

$$\begin{aligned} \omega^X(Y, Z) &= \omega^X((z^2, \sin x, y^2), (x, y, z)) \\ &= z^2(z^2 y - x \sin x) + x(z \sin x - y^3) + (x+y)(xy^2 - z^3). \end{aligned}$$

Hodnota v bodě x je $\omega^X(Y, Z)(x) = 9 \left(18 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(-5) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)(2\pi - 27) = \pi^2 - \frac{33\pi}{2} + 108$. \diamond

Poznámka 1. Formy z příkladu 7.51 mají zajímavou fyzikální interpretaci: ω_X lze použít k výpočtu práce podél křivky a ω^X lze užít k výpočtu toku pole přes orientovatelnou plochu. Konkrétní užití si ukážeme v následujícím příkladě.

Cvičení 7.62.

Určete tok pole $X = (x^2 + y^2, 1, z)$ přes množinu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z \in \langle 0, 2 \rangle\}$. Dále určete práci pole X podél křivky γ , jež je částí šroubovice, nacházející se v prvním oktantu standardních souřadnic, s osou otáčení danou souřadnou osou z .

Řešení. Rovnice $x^2 + y^2 = z$ zadává v \mathbb{R}^3 rotační paraboloid se symetrií kolem osy z a vrcholem v bodě $(0, 0, 0)$. Podmínka $z \in \langle 0, 2 \rangle$ pak říká, že je paraboloid shora omezen. Jedná se o orientovatelnou plochu, přes kterou můžeme integrovat v souladu s teorií této kapitoly. S ohledem na tvar pole X a ohraničenost M očekáváme výsledek ve formě konečného čísla. Podle 1 je tok X přes M roven integrálu z formy $\omega^X \in \Omega^2 \mathbb{R}^3$, jejíž obecný tvar v dimenzi 3 je dán rovnicí 7.61, do které dosadíme X ze zadání. Integrál pro výpočet toku pak má tvar

$$\int_M \omega^X = \int_M (x^2 + y^2) dx \wedge dy + dy \wedge dz + zdz \wedge dx .$$

Jak pole X , tak plocha M v sobě zahrnují rotační symetrie kružnice, ke zjednodušení výpočtu si proto zavedeme na M polární souřadnice $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$, ve kterých můžeme paraboloid parametrizovat následovně

$$\begin{aligned} x(r, \varphi) &= r \cos \varphi \\ y(r, \varphi) &= r \sin \varphi \\ z(r, \varphi) &= r^2 . \end{aligned} \tag{7.63}$$

kde $(r, \varphi) \in N = \langle 0, \sqrt{2} \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Původní integrál převádíme podle 7.38 na

$$\int_M \omega^X = \int_N p^* \omega^X ,$$

kde p^* je pullback podél složeného zobrazení $p: \mathbb{R}^2_{r, \varphi} \rightarrow \mathbb{R}^2_{x(r, \varphi), y(r, \varphi)} \rightarrow \mathbb{R}^3_{x, y, x^2 + y^2}$ (tj. provedeme transformaci souřadnic a poté parametrizujeme paraboloid). Ke spočtení $p^* \omega^X$ nejprve využijeme linearitu p^* a toho, že pullback 0-formy je dán prekompozicí

$$p^* \omega^X = p^* ((x^2 + y^2) dx \wedge dy + dy \wedge dz + zdz \wedge dx) \tag{7.64}$$

$$= r^2 p^*(dx \wedge dy) + p^*(dy \wedge dz) + r^2 p^*(dz \wedge dx) \tag{7.65}$$

K dalšímu výpočtu využijeme komutativity pullbacku s vnější derivací z věty 7.5 a kompatibility s vnějším součinem $p^*(d\alpha \wedge d\beta) = dp^* \alpha \wedge dp^* \beta$. Díky tomu můžeme nejprve spočítat diferenciály transformovaných souřadnic 7.63 a pullbacky bázových forem získat následným vnějším násobením. Pro diferenciály platí

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

$$dz = 2r dr .$$

Vnější součiny jsou díky vynulování členů tvaru $d\alpha \wedge d\alpha$ ve tvaru

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr = r dr \wedge d\varphi \\ dy \wedge dz &= -2r^2 \cos \varphi dr \wedge d\varphi \\ dz \wedge dx &= 2r^2 \sin \varphi dr \wedge d\varphi \end{aligned}$$

a dosadíme do 7.65

$$\begin{aligned} p^* \omega^X &= r^3 dr \wedge d\varphi - 2r^2 \cos \varphi dr \wedge d\varphi + 2r^4 \sin \varphi dr \wedge d\varphi \\ &= (r^3 - 2r^2 \cos \varphi + 2r^4 \sin \varphi) dr \wedge d\varphi . \end{aligned}$$

Nyní již můžeme použít definici integrování 7.30 k určení toku

$$\begin{aligned} \int_N p^* \omega^X &= \int_N (r^3 - 2r^2 \cos \varphi + 2r^4 \sin \varphi) dr \wedge d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (r^3 - 2r^2 \cos \varphi + 2r^4 \sin \varphi) dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = 2\pi . \end{aligned}$$

Tok pole X přes plochu M je 2π (vhodných jednotek). Přejdeme k výpočtu práce X podél šroubovice $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. Tuto křivku můžeme parametrizovat následovně

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a \cos \varphi \\ y(\varphi) &= a \sin \varphi \\ z(\varphi) &= R\varphi , \end{aligned} \tag{7.66}$$

kde a, R jsou nezáporné konstanty. Jelikož uvažujeme pouze tu část křivky, která se nachází v prvním oktantu, bereme úhel φ z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Práce pole X lze spočítat integrací 1-formy ω_X , jejíž obecný tvar v dimenzi 3 jsme si spočetli v příkladu 7.51. Dosadíme X do 7.58 a rozderivujeme

$$\begin{aligned} \omega_X &= X^1 dx + X^2 dy + X^3 dz \\ &= (x^2 + y^2) dx + dy + z dz \\ &= (a - a \sin \varphi + a \cos \varphi + R) d\varphi . \end{aligned}$$

Integrál pro výpočet práce je tvaru

$$\int_{\gamma} \omega_X = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sin \varphi + a \cos \varphi + R) d\varphi = \frac{\pi}{2} (a + R)$$

Tedy práce X podél γ je rovna $\frac{\pi}{2} (a + R)$ (vhodných jednotek). \diamond

Cvičení 7.67.

Integrujte formu $\omega \in \Omega^2 \mathbb{R}^4$, $\omega = dx^3 \wedge dx^4 + x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^4$ na množině $M \subset \mathbb{R}^4$ zadané rovnicemi $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$, $(x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$.

Řešení. Nejprve zvolíme k integrování vhodnější popis M . Všimneme si, že obě definující podmínky $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$, $(x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$ jsou rovnicemi kružnice. Jinak řečeno, projekce M na rovinu $x^1 x^2$ dá jednotkovou kružnici a pro každý bod této kružnice tvoří zbylé dvě souřadnice x^3, x^4 opět jednotkovou kružnici. Jedná se tedy o součin dvou kružnic $S^1 \times S^1$, což je dvoudimenzionální plocha, která se nazývá torus. Jelikož jej uvažujeme vložený v \mathbb{R}^4 můžeme použít jednoduchou parametrizaci $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pomocí polárních souřadnic na každou z kružnic.

$$\begin{aligned} x^1(\varphi, \theta) &= \cos \varphi & x^3(\varphi, \theta) &= \cos \theta \\ x^2(\varphi, \theta) &= \sin \varphi & x^4(\varphi, \theta) &= \sin \theta, \end{aligned}$$

kde $(\varphi, \theta) \in N = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Odpovídající diferenciály jsou pak

$$\begin{aligned} dx^1 &= -\sin \varphi d\varphi & dx^3 &= -\sin \theta d\theta \\ dx^2 &= \cos \varphi d\varphi & dx^4 &= \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Vnější součiny vypadají následovně

$$\begin{aligned} dx^3 \wedge dx^4 &= -\sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\theta = 0 \\ dx^2 \wedge dx^4 &= \cos \varphi \cos \theta d\varphi \wedge d\theta, \end{aligned}$$

proto je pullback formy ω podél parametrizace p ve tvaru

$$p^* \omega = \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta.$$

Užitím definic 7.38 a 7.30 nyní můžeme určit hodnotu $\int_M \omega$. Počítejme

$$\begin{aligned} \int_N p^* \omega &= \int_N \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\theta = \pi^2. \end{aligned}$$

Spočítali jsme $\int_M \omega = \pi^2$.

◇

Cvičení 7.68.

Určete $\int_M \omega$, kde $\omega = xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + 2yz dz \wedge dx$ a M je povrch standardního 3-simplexu v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Příklad lze jednoduše řešit aplikací Stokesovy věty 7.47. Jelikož je M povrchem 3-simplexu Δ_3 , můžeme psát

$$\int_M \omega = \int_{\Delta_3} d\omega.$$

Využijeme výsledků ze cvičení 7.49, kde jsme určili souřadný tvar $d\omega$ pro obecné ω . V našem případě tak podle 7.50 a s ohledem na podmínku 2 z věty 7.1 platí

$$d\omega = y dx \wedge dy \wedge dz + 2z dx \wedge dy \wedge dz + x dx \wedge dy \wedge dz = (x + y + 2z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Další výpočet pak z definice 7.30 postupuje klasickým způsobem počítání vícenásobných integrálů.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_3} d\omega &= \int_{\Delta_3} (x + y + 2z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + 2z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} [xz + yz + z^2]_0^{1-x-y} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x(1-x-y) + y(1-x-y) + (1-x-y)^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dx dy \\ &= \int_0^1 ((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2) dx \\ &= \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}) dx = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Dohromady tedy $\int_M \omega = -\frac{1}{6}$. ◇

Cvičení 7.69.

Uveďte příklady neorientovatelných variet.

Řešení. Klasickým příkladem neorientovatelné variety je Möbiova páska, mající parametrizaci

$$\begin{aligned}x(\varphi, r) &= \left(1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi \\y(\varphi, r) &= \left(1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi \\z(\varphi, r) &= \frac{r}{2} \sin \varphi ,\end{aligned}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r \in (-1, 1)$ (r určuje šířku pásku). Topologicky lze zkonstruovat tak, že čtverci ztotožníme dvě protilehlé strany v opačném směru (provedeme-li slepení ve stejném směru, získáme válec). Jiná neorientovatelná varieta je kupříkladu Kleinova láhev. Její parametrizace je poměrně komplikovaná a nebudeme ji zde uvádět, nicméně popíšeme si alespoň topologickou konstrukci. Ztotožníme-li protilehlé strany čtverce tak, že jednu dvojici ztotožníme ve stejném směru a druhou ve směru opačném, získáme Kleinovu láhev. Topologicky stejný objekt získáme, slepíme-li dvě Möbiovy pásy ve stejném směru podél jejich jediného okraje. Poznamenejme, že narozdíl od Möbiovy pásky nemůže být Kleinova láhev vnořená do \mathbb{R}^3 , ke vnoření je potřeba dimenze alespoň čtyři. \diamond

Podvariety v euklidovských prostorech

Definice 8.1.

Uvažme lokální parametrizaci n -dimenzionální podvariety M v m -dimenzionálním euklidovském prostoru E_m

$$x^p = f^p(u^1, \dots, u^n), \quad p = 1, \dots, m$$

První základní forma g_{ij} je indukovaná ze skalárního součinu $(-, -)$.

$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u^i}, \frac{\partial f(u)}{\partial u^j} \right) = g_{ji}(u)$$

Poznámka. **Skalární součin** tečných vektorů $A, B \in T_u M$ je dán jako

$$(A, B) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u) a^i b^j$$

Poznámka. **Délka křivky** C na M je dána jako

$$s = \int_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

Definice 8.2.

Difeomorfismus $f : M \rightarrow \bar{M}$ se nazývá **isometrie**, jestliže zachovává skalární součin pro všechna $x \in M$.

Definice 8.3.

Vnitřní geometrie podvariety M jsou vlastnosti M , které se nemění při isometriích. Tyto vlastnosti se dají odvodit z první základní formy.

Poznámka. Ostatní vlastnosti se nazývají **vnější**.

Definice 8.4.

Normálový prostor $N_x M$ podvariety $M \subset E_m$ v bodě x je množina všech vektorů kolmých na jeho tečný prostor $T_x M$.

Poznámka. Pro každý bod $x \in M$ máme $T_x E_m = T_x M + N_x M$.

Definice 8.5.

Řekneme, že vektory $v(t) \in T_{p(t)}M$ se **paralelně přenáší** podél dráhy $p(t)$ na M , jestliže $\frac{dv(t)}{dt} \in N_{p(t)}$ pro každé $t \in I$.

Definice 8.6.

V lokálních souřadnicích jsou Christoffelovy symboly dány jako

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

kde $\sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} g_{lm} = \delta_m^k$.

Věta 8.7.

Christoffelovy symboly Γ_{ij}^k patří do vnitřní geometrie plochy.

Věta 8.8.

Podmínka pro paralelní přenos je dána rovnicí

$$\frac{dv^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(p(t)) v^j \frac{dp^k}{dt} = 0$$

Cvičení 8.9.

Najděte všechny izometrie \mathbb{R}^n s euklidovskou metrikou.

Řešení. Hledáme transformaci

$$y^i = f^i(x)$$

Jakobián takové transformace je

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

Metrika je tenzor řádu $(0,2)$ a transformuje se následovně:

$$g'_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} g_{kl} = \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial f^l}{\partial x^j} g_{kl}$$

Jelikož chceme, aby se metrika nezměnila, tak dostaneme

$$g_{ij} = \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial f^l}{\partial x^j} g_{kl}$$

Teď využijeme faktu, že metrika g_{ij} je konstantní, a při derivaci obdržíme

$$0 = \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^m} \frac{\partial f^l}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} g_{kl}$$

Jelikož jsou i a j volné indexy, můžeme je v prvním členu vyměnit. Také využijeme symetrie g a vyměníme k s l . Dostaneme

$$0 = \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} g_{kl} + \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} g_{kl}$$

Nakonec obdržíme

$$0 = \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} + \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} \right) g_{kl}$$

a celkově máme

$$\frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^m} = 0$$

Hledáme globální afinní izomorfismy, které nechávají metriku invariantní. Afinní izomorfismy jsou obecně ve tvaru

$$y^i = A_j^i x^j + y_0^i$$

Jacobiho matice této transformace je

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = A_k^i \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = A_k^i \delta_j^k = A_j^i$$

kde δ_j^k je Kroneckerovo delta. Od teď budeme používat maticovou notaci místo indexové. V maticové notaci je tato transformace tvaru

$$\mathbf{g}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{g} \mathbf{A}$$

V případě izometrií euklidovského prostoru matice transformace musí splňovat

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^\top \mathbf{E} \mathbf{A}$$

kde \mathbf{E} je n -rozměrná jednotková matice. Jaké vlastnosti splňují tyto matice? Nejprve použijme determinant na tuto maticovou rovnici. Máme

$$\det \mathbf{E} = \det \mathbf{E} \det \mathbf{A}^2$$

a jelikož $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top$ Pak máme

$$\det \mathbf{A} = \pm 1$$

a všechny uvažované transformace jsou invertibilní. A co skládání afinních transformací? To nelze udělat pouze pomocí maticového násobení. Nejběžnější způsob, jak skládat afinní

transformace, je uvažovat tyto transformace jako lineární transformace \mathbb{R}^{n+1} s $x_{n+1} = 1$. Tj,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{y}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a akce takové transformace je

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{y}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operace je obyčejné maticové násobení. To nám dává asociativitu. Jednotkový prvek je jednotková matice. Abychom ukázali, že tyto matice tvoří grupu, už stačí ukázat pouze uzavřenost na skládání. To je však jednoduché

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{y}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{z}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{Az}_0 + \mathbf{y}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proto můžeme o našich izometriích \mathbb{R}^n mluvit jako o grupě, kterou značíme $ISO(n)$. Kolik parametrů popisuje $ISO(n)$? Nejprve zjistíme parametry \mathbf{A} . K tomu použijeme Taylorův rozvoj. Předpokládejme, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{X} + O(\varepsilon^2)$$

Rovnice do druhého řádu v ε je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{X}^T + \mathbf{X}) + O(\varepsilon^2)$$

Infinitesimální transformace X je antisymetrická, což nám dává $\frac{n(n-1)}{2}$ parametrů. To je ve skutečnosti pouze podgrupa grupy $ISO(n)$ značená jako $O(n)$. Tato podgrupa se skládá ze všech rotací a zrcadlení euklidovského prostoru. Když přidáme n parametrů z y_0 , máme

$$\dim ISO(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

což je stejné jak dimenze $O(n+1)$. Tohle není náhoda, je to dáno tím, že na euklidovský prostor \mathbb{R}^n můžeme pohlížet jako na limitní případ sféry v euklidovském prostoru o dimenzi výš. Podíváme-li se na sféru o poloměru R jdoucím k nekonečnu v okolí bodu $(0, \dots, R)$ zjistíme, že transformace grupy $O(n+1)$ odpovídají do prvního řádu transformacím grupy $ISO(n)$. Tahle konstrukce je případem obecnější konstrukce nazývané kontrakce grup. \diamond

Cvičení 8.10.

Ukažte, že druhá základní forma \mathbb{I} nepatří do vnitřní geometrie podvariety.

Řešení. Pro jednoduchost budeme zkoumat druhou základní formu plochy vložené do \mathbb{R}^3 . Nejprve předpokládejme, že plocha je parametrizovaná

$$z = z(x, y)$$

a že rovina $z = 0$ je tečná v počátku. Z Taylorova rozvoje máme

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{y^2}{2} + \text{vy ady}$$

Druhá základní forma je kvadratická forma

$$\mathbb{I} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Označme $L = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $M = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ a $N = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Obecně, povrch v \mathbb{R}^3 je parametrizován hladkou vektorovou funkcí $\mathbf{r}(u, v)$. Pro přehlednost, derivace podle r budeme značit dolními indexy. V tomto zápisu můžeme psát

$$\mathbb{I} = b_{ij} du^i du^j$$

Jelikož je parametrizace regulární, \mathbf{r}_u a \mathbf{r}_v jsou lineárně nezávislé na definičním oboru \mathbf{r} . To nám umožňuje spočítat jednoznačně dané normálové vektorové pole

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

Koeficienty b_{ij} jsou dány projekcí parciálních derivací na tečnou rovinu. To lze zapsat jako

$$b_{ij} = r_{ij}^k n_k$$

kde n_k jsou složky normálového kovektoru. Odtud vidíme, že složky druhé základní formy závisí, pomocí normálového vektorového pole, na předpisu vložení podvariety do euklidovského prostoru. Proto není druhá základní plocha částí vnitřní geometrie podvariety. \diamond

Cvičení 8.11.

Najděte normálový prostor následujících podvariety pro každé $p \in M$

1. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

2. $H^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

Řešení. Obě podvariety jsou kodimenze 1, proto jsou jejich normálové prostory jedno dimenzionální. Využijeme výsledků z minulého příkladu, konkrétně

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

1. Nejprve parametrizujeme sféru pomocí sférických souřadnic

$$x = \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = \cos \theta.$$

kde $\varphi \in (0, 2\pi)$ and $\theta \in (0, \pi)$. K spočítání normálového vektorového pole musíme spočítat derivace parametrizace vzhledem k souřadnicím

$$\mathbf{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Spočítáme jejich vektorový součin

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = -\sin \theta \mathbf{r}$$

Jednotkový normálový vektor proto je

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-\sin \theta \mathbf{r}}{\sin \theta |\mathbf{r}|} = -\hat{\mathbf{r}}$$

kde $\hat{\mathbf{r}}$ je jednotkový polohový vektor.

2. V tomto případě je parametrizace

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \cosh \theta, \\ y &= \sin \varphi \cosh \theta, \\ z &= \sinh \theta. \end{aligned}$$

kde $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\theta \in \mathbb{R}$. Opět spočítáme derivace parametrizace

$$\mathbf{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cosh \theta \\ \cos \varphi \cosh \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sinh \theta \\ \sin \varphi \sinh \theta \\ \cosh \theta \end{pmatrix}$$

Vektorový součin je

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \varphi \cosh \theta & \cos \varphi \cosh \theta & 0 \\ \cos \varphi \sinh \theta & \sin \varphi \sinh \theta & -\cosh \theta \end{vmatrix} = \cosh \theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \cosh \theta \tilde{\mathbf{r}}$$

kde $\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$. V tomto případě je normálový vektor

$$\mathbf{n} = \frac{\cosh \theta \tilde{\mathbf{r}}}{\cosh \theta |\tilde{\mathbf{r}}|} = \hat{\tilde{\mathbf{r}}}$$

◇

Riemannův prostor

Definice 9.1.

Riemannovou metrikou na varietě M rozumíme hladké zobrazení $g: M \rightarrow S_+^2 T^*M$ takové, že $p \circ g = \text{id}_M$, kde p je projekce v tensorovém bandlu $S_+^2 T^*M$, tj. $p: S_+^2 T^*M \rightarrow M$, a $S_+^2 T$ značí prostor všech pozitivně definitních kvadratických forem. Dvojice (M, g) se nazývá Riemannův prostor nebo Riemannova varieta.

Poznámka. V lokálních souřadnicích x^i na M má g souřadné vyjádření $g = (g_{ij}(x))$, $g_{ij} = g_{ji}$. Píšeme též

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

nebo

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

kde ds značí délkový element na M .

Definice 9.2.

Délkou křivky C , s parametrickým vyjádřením $f(t)$, $t \in [a, b]$, od bodu $f(a)$ do bodu $f(b)$ rozumíme číslo

$$s = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{df}{dt}, \frac{df}{dt}\right)} dt.$$

Má-li f souřadný tvar $x^i = x^i(t)$, pak platí

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (9.3)$$

Odtud je patrné, že délka křivky nezávisí na její parametrizaci.

Definice 9.4.

Nechť (M, g) a (\bar{M}, \bar{g}) jsou dva Riemmanovy prostory a nechť $f: M \rightarrow \bar{M}$ je hladké zobrazení. Pokud platí $g(v, w) = \bar{g}(T_x f(v), T_x f(w))$ pro všechna $x \in M$ a $v, w \in T_x M$, pak říkáme, že f je isometrické zobrazení.

Věta 9.5.

Je-li (M, g) Riemannův prostor a $f: N \rightarrow M$ je imerse, pak f^*g je Riemannova metrika na N . Jestliže f má souřadný tvar $x^i = f^i(y^p)$ a $k = \dim N$, pak

$$f^*g = \sum_{p,q} \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(f(y)) \frac{\partial f^i}{\partial y^p} \frac{\partial f^j}{\partial y^q} dy^p dy^q.$$

Věta 9.6.

Na každé varietě M existuje Riemannova metrika.

Věta 9.7.

Pro pozitivně definitní kvadratickou formu je $g: V \rightarrow V^*$ lineární izomorfismus.

Definice 9.8.

Nechť je (M, g) Riemannův prostor a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Vektorové pole $\tilde{g}(df) := \text{grad} f$, kde \tilde{g} je inverzní matice k matici metriky, nazýváme gradient funkce f . Gradient má souřadnicové vyjádření

$$(\text{grad} f)^i = \sum_{j=1}^n \tilde{g}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Definice 9.9.

Nechť je (M, g) orientovaný Riemannův prostor, tj. varieta M je orientovaná. Poté je každý tečný prostor $T_x M$ orientovaný vektorový prostor se skalárním součinem a pro každou n -tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in T_x M$ máme definovaný vnější součin

$$[v_1, \dots, v_n]_x \in \mathbb{R}.$$

Tento vnější součin zadává n -formu $\text{vol}(g): M \rightarrow \wedge^n T^*M$, kterou nazýváme objemová n -forma orientovaného Riemannova prostoru (M, g) .

Věta 9.10.

V souřadné soustavě (x^1, \dots, x^n) souhlasné s orientací (M, g) platí

$$\text{vol}(g) = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Věta 9.11.

Číslo $\text{Vol} \sigma_n = \int_{\sigma_n} \text{vol}(g)$ nazýváme objem simplexu $\sigma_n \subset (M, g)$ a platí

$$\text{Vol}(\sigma_n) = \int_{\Delta_n} \dots \int \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n.$$

Definice 9.12.

Množinu $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ s metrikou $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ budeme nazývat horní polorovinou.

Cvičení 9.13.

Nechť (M, g) je n -rozměrná riemannovská varieta, $x \in M$ je bod na varietě, $\{e_i\}_{i=1}^n$ je ortonormální báze $T_x M$ a $\{f^i\}_{i=1}^n$ je báze příslušného duálního prostoru taková, že platí $f^j(e_i) = \delta_i^j$. Pro $X \in T_x M$ a $\alpha \in T_x^* M$ definujme tzv. hudební izomorfismy

$$\begin{aligned} \flat: T_x M &\rightarrow T_x^* M, & X^\flat &= g(X, -), \\ \sharp: T_x^* M &\rightarrow T_x M, & \alpha^\sharp &= \tilde{g}(\alpha, -). \end{aligned}$$

Ukažte, že platí

$$g(X, \alpha^\sharp) = \alpha(X) = \tilde{g}(X^\flat, \alpha).$$

Řešení. Nejprve připomeňme, jak se formy vyčíslují na vektorech, tj.

$$\alpha(X) = \alpha_i f^i(X^j e_j) = \alpha_i X^j f^j(e_i) = \alpha_i X^j \delta_i^j = \alpha_i X^i.$$

Pro souřadné vyjádření hudebních izomorfismů platí

$$\begin{aligned} (X^\flat)_j &= (X^\flat)_i f^i(e_j) = X^\flat(e_j) = g(X, e_j) = X^i g(e_i, e_j) = X^i g_{ij}, \\ (\alpha^\sharp)^j &= (\alpha^\sharp)^i f^j(e_i) = f^j(\alpha^\sharp) = \tilde{g}(\alpha, f^j) = \alpha_i \tilde{g}(f^i, f^j) = \alpha_i \tilde{g}^{ij}. \end{aligned}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} g(X, \alpha^\sharp) &= X^i g_{ij} \tilde{g}^{jk} \alpha_k = X^i \delta_i^k \alpha_k = X^i \alpha_i = \alpha(X), \\ \tilde{g}(X^\flat, \alpha) &= \tilde{g}^{ij} g_{jk} X^k \alpha_j = \delta_k^j X^k \alpha_j = X^j \alpha_j = \alpha(X). \end{aligned}$$

◇

Cvičení 9.14.

Uvažme horní polorovinu \mathbb{H}^2 , avšak místo podmnožinu \mathbb{R}^2 ji chápeme jako podmnožinu \mathbb{C} s identifikací $z = x + iy$. Nechť $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je čtvercová matice splňující $ad - bc = 1$. Ukažte, že množina čtvercových matic řádu 2 splňující tuto podmínku tvoří grupu, tzn. speciální lineární grupu $SL(2, \mathbb{R})$. Dále nechť je dáno zobrazení

$$\begin{aligned} \psi: SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2, \\ (A, z) &\mapsto Az = \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Ukažte, že toto zobrazení je (levá) akce grupy $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ na množině \mathbb{H}^2 . Na závěr ukažte, že $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ je grupa isometrií \mathbb{H}^2 , tj. že každý prvek $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ zachovává tvar metriky

$$ds^2 = \frac{(d\Re z)^2 + (d\Im z)^2}{(\Im z)^2}.$$

Řešení. Operace v grupě $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ je maticové násobení, které je asociativní. Jednotkový prvek zřejmě jednotková matice. Podmínka $ad - bc = 1$ není nic jiného, než $\det A = 1$. Tudiž inverzní prvek bude inverzní matice, která kvůli podmínce $\det A = 1$ vždy existuje. Uzavřenost grupy vyplývá z toho, že determinant součinu matic je součin determinantů matic.

Ukažme, že zobrazení ψ má jako obor hodnot skutečně \mathbb{H}^2 . Počítejme imaginární část Az ,

$$\begin{aligned} \Im Az &= \Im \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \Im \left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} \right) = \Im \left(\frac{(ax+iaiy+b)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \right) = \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2} \Im ((x^2+y^2)ac + (ad+bc)x + i(ad-bc)y + bd) = \frac{y}{|cz+d|^2} > 0. \end{aligned}$$

Akce · grupy G na množině X splňuje

$$\begin{aligned} e \cdot x &= x, & \forall x \in X, \\ (gh) \cdot x &= g \cdot (h \cdot x), & \forall x \in X, g, h \in G, \end{aligned}$$

kde e je jednotkový prvek grupy. Pro jednotkovou matici platí E platí $Ez = \frac{z+0}{0+1} = z$. Dál necht $B = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, poté platí

$$B(Az) = B \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\tilde{a} \frac{az+b}{cz+d} + \tilde{b}}{\tilde{c} \frac{az+b}{cz+d} + \tilde{d}} = \frac{(\tilde{a}a + \tilde{b}c)z + \tilde{a}b + \tilde{b}d}{(\tilde{c}a + \tilde{d}c)z + \tilde{c}b + \tilde{d}d} = (BA)z,$$

tudiž ψ je skutečně akce grupy na množině.

Metriku můžeme pomocí známých vztahů přepsat do tvaru

$$ds^2 = \frac{(d\Re z)^2 + (d\Im z)^2}{(\Im z)^2} = \frac{dzd\bar{z}}{(\Im z)^2}$$

a označme $w = Az$. Z předchozího počítání víme, že

$$\Im w = \frac{\Im z}{|cz+d|^2}.$$

Dále snadno dostáváme

$$\begin{aligned} dw &= d \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{adz(cz+d) - cdz(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{dz}{(cz+d)^2}, \\ d\bar{w} &= d \left(\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) = \frac{ad\bar{z}(c\bar{z}+d) - cd\bar{z}(a\bar{z}+b)}{(c\bar{z}+d)^2} = \frac{d\bar{z}}{(c\bar{z}+d)^2}. \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\frac{dw d\bar{w}}{(\Im w)^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(cz+d)^2 (\bar{c}\bar{z}+d)^2} \frac{|cz+d|^4}{(\Im z)^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(\Im z)^2}.$$

◇

Cvičení 9.15.

Spočtěte metriku indukovanou z \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem na

1. sféru S^2 ,
2. anuloid T^2 .

Řešení. 1. Sféra je standardně parametrizovaná pomocí úhlů $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in [0, \pi]$, konkrétně jako

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi \sin \theta, \\y &= \sin \varphi \sin \theta, \\z &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Příslušné diferenciály jsou

$$\begin{aligned}dx &= -\sin \varphi \sin \theta d\varphi + \cos \varphi \cos \theta d\theta, \\dy &= \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\dz &= -\sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu pro délkový element v \mathbb{R}^3 , tj. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, získáme délkový element v indukované metrice

$$ds^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2.$$

2. Anuloid je standardně parametrizován pomocí úhlů $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in [0, 2\pi)$, konkrétně jako

$$\begin{aligned}x &= (R + r \cos \theta) \cos \varphi, \\y &= (R + r \cos \theta) \sin \varphi, \\z &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

kde $R > 0$ je vzdálenost středu trubice od počátku souřadnic a $r > 0$ je poloměr trubice. Příslušné diferenciály jsou

$$\begin{aligned}dx &= -(R + r \cos \theta) \sin \varphi d\varphi - r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\dy &= (R + r \cos \theta) \cos \varphi d\varphi - r \sin \theta \sin \varphi d\theta, \\dz &= r \cos \theta d\theta.\end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu pro délkový element v \mathbb{R}^3 získáme

$$ds^2 = (R + r \cos \theta)^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2.$$

◇

Cvičení 9.16.

Spočítejte metriku na sféře S^2 ve stereografické projekci.

Řešení. Stereografická projekce na rovinu s kartézskými souřadnicemi (u, v) je dána jako

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Příslušné diferenciály jsou

$$\begin{aligned} dx &= 2 \frac{(u^2 + v^2 + 1) - 2u^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du - \frac{4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2} dv, \\ dy &= -\frac{4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du + 2 \frac{(u^2 + v^2 + 1) - 2v^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} dv, \\ dz &= \frac{4u du + 4v dv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu pro délkový element v \mathbb{R}^3 získáme

$$ds^2 = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)} (du^2 + dv^2).$$

◇

Cvičení 9.17.

Spočítejte délku kružnice

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $r > 0$ v

1. v \mathbb{R}^2 s metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)} (dx^2 + dy^2).$$

2. v horní polorovině s omezující podmínkou $b > r$.

Řešení. V obou případech dostaneme podobný integrál, proto ho nejdříve obecně spočítáme. Pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ máme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \delta},$$

kde $\delta = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$. Dále

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}t + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\delta}}\right)^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}t + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\delta}} = s \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}dt = ds \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}}}. \end{aligned}$$

1. Kružnici si parametrizujeme pomocí úhlu $\varphi \in [0, 2\pi)$ jako

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi + a \\y &= r \sin \varphi + b.\end{aligned}$$

S využitím vzorce pro délku křivky dostáváme integrál

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{(1 + (r \cos \varphi + a)^2 + (r \sin \varphi + b)^2)^2}} d\varphi.$$

Integrál budeme řešit pomocí universální substituce $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, dostaneme

$$\begin{aligned}s &= 4r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + r^2 + a^2 + b^2) + 2r \left[a \left(\frac{1-t^2}{t^2+1} \right) + 2b \frac{t}{t^2+1} \right]} \frac{dt}{t^2+1} = \\&= 4r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + r^2 + a^2 + b^2 - 2ra) \cdot t^2 + 4rb \cdot t + (1 + r^2 + a^2 + b^2 + 2ra)},\end{aligned}$$

což je integrál I pro $\alpha = 1 + r^2 + a^2 + b^2 - 2ra$, $\beta = 4rb$ a $\gamma = 1 + r^2 + a^2 + b^2 + 2ra$, tudíž délka kružnice je

$$s = \frac{4r\pi}{\sqrt{(1 + r^2 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2r^2 - 4b^2r^2}}.$$

2. Použijeme stejnou parametrizaci jako v případě 1. Po dosazení do vzorce pro délku křivky dostaneme

$$s = r \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r \sin \varphi + b}.$$

Opět použijeme univerzální substituci a vzorec pro výpočet integrálu I ze začátku řešení, dostáváme

$$s = 2r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{bt^2 + 2rt + b} = \frac{2r\pi}{\sqrt{b^2 - r^2}}.$$

◇

Cvičení 9.18.

Spočítejte objem a povrch anuloidu.

Řešení. Vyjdeme z výsledku Příkladu 9.15. Objemová forma poté je

$$\text{vol}(g) = r(R + r \cos \theta) d\varphi \wedge d\theta.$$

Integrací přes $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in [0, 2\pi)$ obdržíme

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \theta) d\varphi d\theta = 4\pi^2 rR.$$

Objem můžeme zjistit dvěma způsoby, buď budeme v Příkladu 9.15 považovat poloměr r za souřadnici, $r' \in (0, r]$ a budeme opět indukovat metriku na plný anuloid z \mathbb{R}^3 , nebo vzorec pro povrch anuloidu zintegrujeme přes $r' \in (0, r]$. V obou případech na závěr dostaneme integrál

$$V = 4\pi^2 R \int_0^r r' dr' = 2\pi^2 r^2 R.$$

◇

Cvičení 9.19.

Ukažte, že \mathbb{R}^n pro $n \geq 2$ má v tzv. hypersférických souřadnicích, tj. souřadnice $(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$ dané jako

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \phi_1, \\ x_2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1}, \end{aligned}$$

kde $r > 0$, $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi)$ a $\phi_{n-1} \in [0, 2\pi)$, metriku tvaru

$$ds_n^2 = dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \phi_j \right) d\phi_i^2.$$

Řešení. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k dimenzi. Pro $n = 2$ máme obvyklé polární souřadnice s metrikou

$$ds_2^2 = dr^2 + r^2 d\phi_1^2.$$

Předpokládejme, že metrika v hypersférických souřadnicích $(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})$ na \mathbb{R}^{n-1} má tvar

$$ds_{n-1}^2 = dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \phi_j \right) d\phi_i^2,$$

a uvažme na \mathbb{R}^n souřadnice $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, které jsou dány jako

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1, \\ &\vdots \\ \tilde{x}_{n-2} &= x_{n-2}, \\ \tilde{x}_{n-1} &= x_{n-1} \cos \phi_{n-1}, \\ \tilde{x}_n &= x_{n-1} \sin \phi_{n-1}, \end{aligned}$$

kde (x_1, \dots, x_{n-1}) jsou kartézské souřadnice na \mathbb{R}^{n-1} a ϕ_{n-1} je přidaná hypersférická souřadnice. Délkový element v \mathbb{R}^n je

$$ds_n^2 = d\tilde{x}_1^2 + \dots + d\tilde{x}_n^2.$$

Dosaďme do něj příslušné diferenciály a počítejme

$$\begin{aligned}
 ds_n^2 &= dx_1^2 + \dots + dx_{n-2}^2 + dx_{n-1}^2 \cos^2 \phi_{n-1} + x_{n-1}^2 \sin^2 \phi_{n-1} d\phi_{n-1}^2 - \\
 &\quad - 2x_{n-1} \cos \phi_{n-1} \sin \phi_{n-1} dx_{n-1} d\phi_{n-1} + \sin^2 \phi_{n-1} dx_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 \cos^2 \phi_{n-1} d\phi_{n-1}^2 + \\
 &\quad + 2x_{n-1} \cos \phi_{n-1} \sin \phi_{n-1} dx_{n-1} d\phi_{n-1} = \\
 &= ds_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 d\phi_{n-1}^2 = dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \phi_j \right) d\phi_i^2 + r^2 \prod_{j=1}^{n-2} \sin^2 \phi_j d\phi_{n-1}^2 = \\
 &= dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \phi_j \right) d\phi_i^2.
 \end{aligned}$$

◇

Cvičení 9.20.

Uvažte Riemannův prostor (\mathbb{R}^3, g) , kde g je metrika z Příkladu 9.19. Ukažte, jak vypadá gradient funkce f v tomto prostoru.

Řešení. Označme $\phi_0 := r$. Jelikož je metrika diagonální, inverzní metriku získáme snadno,

$$\tilde{g}^{00} = 1, \quad \tilde{g}^{11} = \frac{1}{r^2}, \quad \tilde{g}^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi_1}.$$

Souřadnice gradientu potom jsou

$$(\text{grad} f)^0 = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\text{grad} f)^1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi^1}, \quad (\text{grad} f)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi_1} \frac{\partial f}{\partial \phi_2}.$$

◇

Cvičení 9.21.

Spočítejte „povrch“ a „objem“ n rozměrné koule o poloměru R .

Řešení. Nejprve budeme počítat „povrch“ n rozměrné koule o poloměru R , tj. budeme počítat objem $n-1$ rozměrné sféry o poloměru R . Využijeme výsledku Příkladu 9.19. Metrika indukovaná na sféru z \mathbb{R}^n je

$$ds_{S^{n-1}}^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \phi_j \right) d\phi_i^2.$$

Objem je poté dán jako integrál přes celý prostor parametrů z objemové formy, tj. z odmocniny determinantu metriky,

$$R^{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2} d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_{n-1} =: S_R(n-1).$$

Tento $n - 1$ rozměrný integrál nebudeme přímo integrovat, ale využijeme znalosti integrálu z Gaussovy funkce. Víme, že platí

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2}.$$

Pokud tento integrál místo v kartézských souřadnicích provedeme v hypersférických souřadnicích, obdržíme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi e^{-r^2} r^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2} d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_{n-1} dr = \\ &= S_1(n-1) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

Dále integrál přes r upravíme na

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \left| \begin{array}{l} r^2 = t \\ 2r dr = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

kde $\Gamma(n)$ je gama funkce. Kombinací obou výsledků integrálu I dostáváme, že objem jednotkové $n - 1$ rozměrné sféry je

$$S_1(n-1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Zřejmě S^{n-1} o poloměru R bude mít objem

$$S_R(n-1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1}.$$

Objem n rozměrné koule zjistíme již snadno, stačí si všimnout, že v metrika pro n rozměrnou kouli přibude pouze závislost na r . Proto zintegrujeme $S_R(n-1)$ přes poloměr, tj.

$$V_R(n) = \int_0^R S_r(n-1) dr = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n.$$

◇

Cvičení 9.22.

Uvažte sféru S^2 s metrikou indukovanou z \mathbb{R}^3 . Najděte křivky, které svírají se všemi poledníky, tj. křivkami tvaru

$$\begin{aligned} p : \varphi &= \varphi_0, & \varphi_0 &= \text{const} \in [0, 2\pi), \\ \theta &= t, & t &\in (0, \pi), \end{aligned}$$

stejný úhel.

Řešení. Označme hledanou křivku jako $l(t) = (\varphi(t), \theta(t))$. Tečný vektor k poledníkům má tvar $\dot{p} = (0, 1)$. Nechť $\beta = \text{const} \in (0, \pi)$ je úhel, který svírají křivky $l(t)$ a $p(t)$. Poté platí

$$\cos \beta = \frac{g(\dot{p}, \dot{l})}{\sqrt{g(\dot{p}, \dot{p}) \cdot g(\dot{l}, \dot{l})}},$$

kde g je metrika. Dosadíme do toho vzorce tečné vektory ke křivkách, dostaneme

$$\cos \beta = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}}. \quad (9.23)$$

Z jmenovatele dostáváme podmínku

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \neq 0. \quad (9.24)$$

Rovnici (9.23) upravíme na

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{\cos^2 \beta}, \quad (9.25)$$

za předpokladu $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ dostaneme z (9.23) $\theta = \text{const}$ a z podmínky (9.24) zjistíme, že $\varphi = At + B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Tyto křivky jsou rovnoběžky na sféře, které samozřejmě vždy svírají s poledníky pravý úhel. Pokračujme v úpravách rovnice (9.25)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 &= \frac{\dot{\theta}^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos^2 \beta}, \\ \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 &= \dot{\theta}^2 \tan^2 \beta, \\ \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\theta}^2} &= \frac{\tan^2 \beta}{\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Můžeme vyloučit parametr t a odmocnit, dostaneme diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \pm \frac{\tan \beta}{\sin \theta},$$

která má řešení

$$\pm \cotan \beta (\varphi + \alpha) = \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Křivkám, které svírají stále stejný úhel s poledníky, se říká loxodromy a měly velký význam pro námořní navigaci ve středověku. \diamond

Paralelní přenos vektorových polí

Definice 10.1.

Nechť (M, g) je n -dimenzionální Riemannovská varieta a $x^i, i = 1, \dots, n$ jsou lokální souřadnice na ní. Veličiny

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

kde \tilde{g} je matice inverzní k matici metriky g , budeme nazývat Christoffelovy symboly Riemannovy metriky g .

Definice 10.2.

Řekneme, že vektorové pole $v(t) = (v^i(t))$ podél dráhy $p(t) = (p^i(t))$ se paralelně přenáší, jestliže platí

$$\frac{dv^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(p(t)) v^j \frac{dp^k}{dt} = 0.$$

Definice 10.3.

Pro soustavu $v(t)$ tečných vektorů podél dráhy $p(t)$ na Riemannově varietě (M, g) definujeme její kovariantní derivaci $\frac{\nabla v(t)}{dt} = \left(\frac{\nabla v^i(t)}{dt} \right)$ souřadnicovým předpisem

$$\frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(p(t)) v^j \frac{dp^k}{dt}.$$

Definice 10.4.

Kovariantní derivaci vektorového pole Y vzhledem k vektorovému poli X na Riemannově varietě (M, g) rozumíme vektorové pole $\nabla_X Y$ se souřadným vyjádřením

$$(\nabla_X Y)^i = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial Y^j(x)}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i(x) Y^k(x) \right) X^j(x),$$

kde $x \in M$.

Věta 10.5.

Pro libovolné vektorová pole X, Y na M a funkci $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ platí

1. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$
2. $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$
3. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y,$
4. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y.$

Definice 10.6.

Zobrazení $\nabla: \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{X}M, (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, které splňuje 1. - 4. z Věty 10.5, nazýváme lineární konexe na varietě M ,

Definice 10.7.

Lineární konexi z Definice 10.4 nazýváme Levi-Civita konexe Riemannovy metriky g na varietě M .

Definice 10.8.

Tensorové pole ∇Y typu $(1,1)$ nazýváme kovariantní diferenciál vektorového pole Y . Souřadnicové vyjádření je

$$(\nabla Y)_j^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i Y^k.$$

Definice 10.9.

Nechť (M, g) je Riemannova varieta a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Zobrazení $f \mapsto \Delta f$ zadané v souřadnicích jako

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (\nabla \text{grad} f)_i^i$$

nazveme Laplaceův operátor .

Definice 10.10.

Dráhu $\gamma: I \rightarrow M$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$, nazýváme geodetická dráha lineární konexe ∇ , jestliže se její tečný vektor $\frac{d\gamma}{dt}$ paralelně přenáší podél γ , tj. platí

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Věta 10.11.

Geodetická dráha $\gamma(t) = (x^i(t))$ je určena soustavou diferenciálních rovnic 2. řádu

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Věta 10.12.

Je-li $\gamma(t)$ geodetická dráha na M , pak dráha $\gamma(at + b)$ je rovněž geodetická dráha pro každé $a, b \in \mathbb{R}$.

Definice 10.13.

Křivku $C \subset M$ nazýváme geodetická křivka lineární konexe ∇ (nebo geodetika), jestliže existuje taková její parametrizace $\gamma(t)$, která je geodetickou dráhou.

Cvičení 10.14.

Spočítejte Christoffelovy symboly pro

1. \mathbb{R}^3 ve sférických souřadnicích a sféru S^2 s indukovanou metrikou z \mathbb{R}^3 ,
2. anuloid T^2 s indukovanou metrikou z \mathbb{R}^3 ,
3. horní polorovinu, tj. $\mathbb{H}^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$, s metrikou $ds^2 = (x^2)^{-2} \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right)$.

Řešení. 1. Sférické souřadnice jsou dány jako

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Použijme označení $r := \varphi^0$, $\varphi^1 := \varphi$ a $\varphi^2 := \theta$. Nenulové komponenty metriky jsou $g_{00} = 1$, $g_{11} = r^2 \sin^2 \theta$ a $g_{22} = r^2$, tzn. nenulové komponenty inverzní matice metriky jsou $\tilde{g}^{00} = 1$, $\tilde{g}^{11} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ a $\tilde{g}^{22} = r^{-2}$. Christoffelovy symboly získáme přímo z definice,

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^0} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^0} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^0} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^0} \right) = -r \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^0} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{0i} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{00} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^0} \right) = -r,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} 2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{02}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} 2r^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^1} \right) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{01}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r = \\ &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r^2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy šest nenulových Christoffelových symbolů. Christoffelovy symboly na sféře S^2 získáme již snadno, když "zapomeneme" souřadnici r , tj.

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\sin \theta \cos \theta.$$

2. Opět použijeme označení $\varphi^1 := \varphi$, $\varphi^2 := \theta$. Nenulové komponenty metriky a inverzní metriky jsou $g_{11} = (R + r \cos \theta)^2$, $g_{22} = r^2$, $\tilde{g}^{11} = \frac{1}{(R + r \cos \theta)^2}$ a $g^{22} = \frac{1}{r^2}$. Jelikož stejně jako v minulém případě platí $g_{11} = g_{11}(\theta)$ a $g_{22} = \text{const}$, nenulové budou pouze dva Christoffelovy symboly,

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(R + r \cos \theta)(-r \sin \theta)}{(R + r \cos \theta)^2} = -\frac{r \sin \theta}{R + r \cos \theta}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2(R + r \cos \theta)(-r \sin \theta)}{r^2} = \frac{1}{r} (R + r \cos \theta) \sin \theta.\end{aligned}$$

3. Nenulové komponenty metriky a inverzní metriky jsou $g_{11} = g_{22} = (x^2)^{-2}$ a $\tilde{g}^{11} = \tilde{g}^{22} = (x^2)^2$. Christoffelovy symboly jsou

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^i} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (x^2)^2 \frac{-2}{(x^2)^3} = -\frac{1}{x^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{1i} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} \right) = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^i} \right) = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} (x^2)^2 \frac{-2}{(x^2)^3} = \frac{1}{x^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^i} \right) = 0, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{2i} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (x^2)^2 \frac{-2}{(x^2)^3} = -\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

◇

Cvičení 10.15.

Uvažte rovinu \mathbb{R}^2 v kartézských a v polárních souřadnicích. Najděte vektorové pole vyjádřené v těchto souřadnicových systémech, které vznikne paralelním přenosem tečného vektoru křivky $\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, v bodě $t = 0$, podél samotné křivky.

Řešení. Křivka je v polárních souřadnicích (r, φ) dána jako $\sigma_{\text{pol}}(t) = (1, t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Tečný vektor v nule je pro kartézské souřadnice $\dot{\sigma}(0) = (0, 1)$ a pro polární $\dot{\sigma}_{\text{pol}}(0) = (0, 1)$. Nechť X je hledané vektorové pole v kartézských souřadnicích, jelikož jsou všechny Christoffelovy symboly pro kartézské souřadnice nulové, rovnice pro paralelní přenos jsou jednoduché

$$\dot{X}^i = 0.$$

S uvážením počáteční podmínky dostáváme, že hledané vektorové pole je podél celé přímky konstantní a je rovno

$$X = \frac{\partial}{\partial y}.$$

V polárních souřadnicích nebude situace tak jednoduchá jelikož dva Christoffelovy symboly jsou nenulové, konkrétně $\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r$ a $\Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}$. Nechť X_{pol} je hledané vektorové pole, rovnice paralelního přenosu poté jsou

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{pol}}^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^r(\sigma(t)) \dot{\sigma}^\varphi(t) X_{\text{pol}}^\varphi &= 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_{\text{pol}}^r - X_{\text{pol}}^\varphi = 0, \\ \dot{X}_{\text{pol}}^\varphi + \Gamma_{r\varphi}^\varphi(\sigma(t)) \left(\dot{\sigma}^\varphi(t) X_{\text{pol}}^r + \dot{\sigma}^r(t) X_{\text{pol}}^\varphi \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_{\text{pol}}^\varphi + X_{\text{pol}}^r = 0. \end{aligned}$$

Tuto soustavu s počáteční podmínkou vyřešíme a obdržíme vektorové pole

$$X_{\text{pol}} = \sin t \frac{\partial}{\partial r} + \cos t \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Vidíme, že vektorové pole v polárních souřadnicích mění podél křivky svůj směr. Že jsou obdržené výsledky ve shodě můžeme snadno ověřit pomocí transformace souřadnic, tj.

$$\begin{aligned} X^x &= \frac{\partial x}{\partial r}(\sigma_{\text{pol}}(t)) X_{\text{pol}}^r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\sigma_{\text{pol}}(t)) X_{\text{pol}}^\varphi = \\ &= \cos \varphi(\sigma_{\text{pol}}(t)) \sin t + (-r \sin \varphi)(\sigma_{\text{pol}}(t)) \cos t = \cos t \sin t - \sin t \cos t = 0, \\ X^y &= \frac{\partial y}{\partial r}(\sigma_{\text{pol}}(t)) X_{\text{pol}}^r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\sigma_{\text{pol}}(t)) X_{\text{pol}}^\varphi = \\ &= \sin \varphi(\sigma_{\text{pol}}(t)) \sin t + (r \cos \varphi)(\sigma_{\text{pol}}(t)) \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \end{aligned}$$

◇

Cvičení 10.16.

Uvažte sféru S^2 s metrikou indukovanou z \mathbb{R}^3 . Řešte rovnice paralelního přenosu podél rovnoběžky

$$\begin{aligned} \gamma: \varphi &= t, \quad t \in [0, 2\pi], \\ \theta &= \theta_0, \quad \theta_0 = \text{const} \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Pro libovolný vektor $v(0) \in T_{\gamma(0)}S^2$ najděte matici A , pro kterou platí

$$v(2\pi) = Av(0),$$

kde $v(2\pi) \in T_{\gamma(2\pi)}S^2 = T_{\gamma(0)}S^2$ je obraz $v(0)$ po paralelním přenosu a určete úhel mezi nimi. Nakonec ukažte, že matice A zachovává skalární součin v $T_{\gamma(0)}S^2$.

Řešení. Christoffelovy symboly známe z Příkladu 10.14, rovnice pro paralelní přenos jsou

$$\begin{aligned}\frac{dv^\varphi}{dt} + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} v^\theta &= 0, \\ \frac{dv^\theta}{dt} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 v^\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Pokud první rovnici zderivujeme a dosadíme do ní \dot{v}^θ z druhé rovnice, získáme rovnici

$$\ddot{v}^\varphi + \cos^2 \theta_0 v^\varphi = 0,$$

kteřá má řešení

$$v^\varphi = A \sin(t \cos \theta_0) + B \cos(t \cos \theta_0),$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Dále snadno určíme i druhou souřadnici vektoru v

$$v^\theta = -A \sin \theta_0 \cos(t \cos \theta_0) + B \sin \theta_0 \sin(t \cos \theta_0).$$

Určíme integrační konstanty A, B . Nechť $v(0) = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned}a &= v^\varphi(0) = B, \\ b &= v^\theta(0) = -A \sin \theta_0,\end{aligned}$$

a celkově máme

$$\begin{aligned}v^\varphi &= -\frac{b}{\sin \theta_0} \sin(t \cos \theta_0) + a \cos(t \cos \theta_0), \\ v^\theta &= b \cos(t \cos \theta_0) + a \sin \theta_0 \sin(t \cos \theta_0).\end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice (pro $t = 2\pi$) můžeme snadno napsat v maticovém tvaru, čímž dostaneme hledanou matici A ,

$$v(2\pi) = \begin{pmatrix} v^\varphi(2\pi) \\ v^\theta(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi \cos \theta_0) & -\frac{\sin(2\pi \cos \theta_0)}{\sin \theta_0} \\ \sin \theta_0 \sin(2\pi \cos \theta_0) & \cos(2\pi \cos \theta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Av(0).$$

Jelikož je prostor $T_{\gamma(0)}S^2$ vektorový prostor se skalárním součinem daným maticí

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odchylku α vektoru od jeho obrazu po paralelním přenosu zjistíme podle známého vzorce

$$\cos \alpha = \frac{g(v(0), v(2\pi))}{\sqrt{g(v(0), v(0)) \cdot g(v(2\pi), v(2\pi))}}.$$

Po provedení maticového násobení zjistíme, že

$$\alpha = 2\pi \cos \theta_0,$$

což pro rovník znamená, že se bude vektor $v(0)$ shodovat se svým obrazem. To, že matice A zachovává skalární součin v $T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^2$ znamená, že pro libovolné dva vektory $u, w \in T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^2$ platí

$$g(Au, Aw) = g(u, w).$$

Maticově zapsáno,

$$(Au)^T g(Aw) = u^T gw.$$

Jelikož jsou vektory u, w libovolné, musí platit

$$A^T gA = g,$$

což se dá jednoduše ověřit provedením maticového násobení. \diamond

Cvičení 10.17.

Uvažte lineární konexi ∇ na \mathbb{R}^2 s nulovými Christoffelovy symboly, až na symbol $\Gamma_{21}^1 = 1$. Spočítejte paralelní přenos tečného vektoru $\dot{\sigma}(0)$ ke křivce

$$\sigma(t) = (-3e^{-t} + 8, t - 2)$$

podél této křivky. Je $\sigma(t)$ geodetika?

Řešení. Tečný vektor podél křivky $\sigma(t)$ je $\dot{\sigma}(t) = (3e^{-t}, 1)$, pro $t = 0$ pak konkrétně $\dot{\sigma}(0) = (3, 1)$. Nechť je $Y(t)$ hledané vektorové pole, rovnice pro paralelní přenos jsou pak tvaru

$$\dot{Y}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i Y^j \dot{\sigma}^k = 0.$$

Jak vidíme, Christoffelovy symboly nejsou symetrické ve spodních indexech, proto si musíme dát pozor na pořadí. Po dosazení do rovnic pro paralelní přenos dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{Y}^1 + 3Y^2 e^{-t} &= 0, \\ \dot{Y}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Druhou rovnici můžeme rovnou zintegrovat a po uvážení počáteční podmínky dostaneme $Y^2 = 1$. Toto dosadíme do první rovnice, opět přímo zintegrujeme a uvážíme počáteční podmínku. Celkově dostaneme, že vektorové pole, které se paralelně přenáší podél $\sigma(t)$ je tvaru

$$Y = (3e^{-t}, 1),$$

což je pole stejného tvaru jako pole tečných vektorů $\dot{\sigma}(t)$ ke křivce $\sigma(t)$, proto je $\sigma(t)$ geodetika. \diamond

Cvičení 10.18.

Nechť f je funkce na Riemannově varietě (\mathbb{R}^3, g) , kde g je metrika ve sférických souřadnicích. Určete Δf .

Řešení. Naším cílem je spočítat

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (\nabla \text{grad} f)_i^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (\text{grad} f)^i}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ki}^i (\text{grad} f)^k \right).$$

Gradient ve sférických souřadnicích jsme počítali v Příkladu 9.20, Christoffelovy symboly máme z Příkladu 10.14. Dále snadno

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial (\text{grad} f)^r}{\partial r} + \frac{\partial (\text{grad} f)^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma_{\varphi r}^\varphi (\text{grad} f)^r + \Gamma_{\varphi \theta}^\varphi (\text{grad} f)^\theta + \\ &\quad + \frac{\partial (\text{grad} f)^\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta r}^\theta (\text{grad} f)^r = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

◇

Cvičení 10.19.

Nalezněte geodetiky

1. na sféře S^2 ,
2. v horní polorovině, tj. $\mathbb{H}^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$, s metrikou $ds^2 = (x^2)^{-2} \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right)$.

Řešení. 1. Nenulové Christoffelovy symboly jsou $\Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cotan \theta$ a $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$. Geodetiku γ budeme hledat ve tvaru $\gamma(t) = (\varphi(t), \theta(t))$. Geodetické rovnice jsou

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + 2\Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0, \\ \ddot{\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \dot{\varphi}^2 = 0 &\quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme $\sin^2 \theta$, dostáváme

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin^2 \theta) &= 0, \\ \dot{\varphi} \sin^2 \theta &= C, \end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Z této rovnosti můžeme vyjádřit $\dot{\varphi}$ a dosadit do druhé geodetické rovnice,

$$\ddot{\theta} - C^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0.$$

Tuto rovnici vynásobíme $2\dot{\theta}$ a podobně jako předtím upravujeme

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}\dot{\theta} - 2C^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \dot{\theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2 + C^2 \cotan^2\theta) &= 0, \\ \dot{\theta}^2 + C^2 \cotan^2\theta &= K^2, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dále vyloučíme parametr t a geodetiku budeme hledat v implicitním tvaru, tj.

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{\sin^2\theta}{C} \sqrt{K^2 - C^2 \cotan^2\theta}. \quad (10.20)$$

Pro $C = 0$ dostáváme křivky $\gamma(t) = (\text{const}, Kt + \text{const}')$, což jsou poledníky na sféře. Vraťme se k rovnici (10.20), tuto rovnici zintegrujeme. Jeden integrál je triviální, druhý vyřešíme

$$\begin{aligned} \int \frac{Cd\theta}{\sin^2\theta \sqrt{K^2 - C^2 \cotan^2\theta}} &= \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{K^2 C^{-2} - \cotan^2\theta}} = \left| \begin{array}{l} \cotan\theta = x \\ -\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = dx \end{array} \right| = \\ &= - \int \frac{dx}{\sqrt{K^2 C^{-2} - x^2}} = - \arcsin \frac{x}{K^2 C^{-2}} + \text{const} = \\ &= - \arcsin \frac{\cotan\theta}{K^2 C^{-2}} + \text{const}, \end{aligned}$$

s tím, že integrační konstantu přidáme do integrační konstanty druhého integrálu. Dohromady dostáváme

$$- \arcsin \frac{\cotan\theta}{K^2 C^{-2}} = \varphi + B.$$

Po dalších jednoduchých úpravách dostaneme rovnici geodetiky ve tvaru

$$K^2 \cos B \sin\theta \sin\varphi + K^2 \sin B \sin\theta \cos\varphi + C^2 \cos\theta = 0. \quad (10.21)$$

Pro lepší představu, o jaké křivky se jedná, můžeme přejít nazpět do \mathbb{R}^3 , tam budou tyto křivky ležet na rovinách

$$\alpha x + \beta y + \delta z = 0,$$

kde α , β a δ jsou příslušné konstanty, tj. roviny procházející středem soustavy souřadnic. Geodetiky v \mathbb{R}^3 tedy leží na průniku sféry s rovinami procházejícím středem, tj. geodetiky na sféře jsou její hlavní kružnice. Vidíme, že v implicitní rovnici (10.21) je zahrnut i případ $C = 0$, který popisuje poledníky.

2. Nenulové Christoffelovy symboly jsou $\Gamma_{12}^1 = -(x^2)^{-1}$, $\Gamma_{11}^2 = (x^2)^{-1}$ a $\Gamma_{22}^2 = -(x^2)^{-1}$. Geodetiku γ budeme hledat ve tvaru $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$. Geodetické rovnice jsou

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^1 - 2 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} = 0, \\ \ddot{x}^2 + \Gamma_{11}^2 (\dot{x}^1)^2 + \Gamma_{22}^2 (\dot{x}^2)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^2 + \frac{(\dot{x}^1)^2}{x^2} + \frac{(\dot{x}^2)^2}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

První rovnici vydělíme $(x^2)^2$, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} - 2\frac{\dot{x}^1\dot{x}^2}{(x^2)^3} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} \right) &= 0, \\ \frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} &= C,\end{aligned}\tag{10.22}$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Z tohoto výsledku můžeme dosadit \dot{x}^1 do druhé rovnice, kterou vynásobíme $2\dot{x}^2(x^2)^{-2}$, dostáváme

$$\begin{aligned}2\frac{\dot{x}^2\dot{x}^2}{(x^2)^2} + 2C^2x^2\dot{x}^2 - 2\frac{(\dot{x}^2)^3}{(x^2)^3} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{(\dot{x}^2)^2}{(x^2)^2} + C^2(x^2)^2 \right) &= 0, \\ \frac{(\dot{x}^2)^2}{(x^2)^2} + C^2(x^2)^2 &= D^2,\end{aligned}\tag{10.23}$$

kde $D \in \mathbb{R}$. Kombinací (10.22) a (10.23) můžeme vyloučit parametr t a hledat geodetiky v implicitním tvaru. Po vyloučení parametru dostaneme rovnici

$$\left(\frac{dx^2}{dx^1} \right)^2 = \left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1} \right)^2 = \frac{D^2}{C^2(x^2)^2} - 1\tag{10.24}$$

Pro $C=0$ dostáváme geodetiky $\gamma(t) = (\text{const}, Ee^{Dt})$, kde $E > 0$, což jsou polopřímky v horní polorovině kolmé na osu x . Vraťme se k rovnici (10.24). Po zintegrování této rovnice dostaneme

$$-\sqrt{\frac{D^2}{C^2} - (x^2)^2} = x^1 - S,$$

kde $S \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Tuto rovnici už jen přepíšeme do tvaru

$$(x^1 - S)^2 + (x^2)^2 = \left(\frac{D}{C} \right)^2.$$

Vidíme, že geodetiky jsou kružnice se středem v bodě $[S, 0]$ a s poloměrem DC^{-1} . \diamond

Cvičení 10.25.

Uvažte \mathbb{R}^2 s lineární konexí ∇ a křivku $\sigma(t) = (\text{const}, y(t))$, kde $y(t): I \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce. Najděte podmínky na konexi ∇ , aby každá křivka tvaru $\sigma(t)$ byla geodetika.

Řešení. Musíme zaručit, aby rovnice geodetik, tj.

$$\ddot{\sigma}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{\sigma}^j \dot{\sigma}^k = 0,$$

byly splněny pro všechny funkce $y(t)$. Derivace křivky $\sigma(t)$ jsou $\dot{\sigma}(t) = (0, \dot{y}(t))$ a $\ddot{\sigma}(t) = (0, \ddot{y}(t))$. Po dosazení do rovnic geodetiky dostaneme

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 \dot{y}^2 &= 0, \\ \ddot{y} + \Gamma_{22}^2 \dot{y} &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že podmínka na konexi ∇ je $\Gamma_{22}^1 = 0$. ◇

Cvičení 10.26.

Jelikož geodetiky jsou křivky na Riemannově varietě dimenze n , které mají mezi dvěma body nejkratší vzdálenost, dají se dostat i minimalizací délky křivky, tj. minimalizací integrálu (9.3). Jelikož délka křivky $x(t)$ je dána integrálem, nutná podmínka pro extrém integrálu je, že integrand $L(x(t), \dot{x}(t), t)$ splňuje tzv. Eulerovy-Lagrangeho rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ukažte, že pro křivku $x(t)$ a integrál (9.3) jsou Eulerovy-Lagrangeho rovnice právě rovnice geodetiky.

Řešení. Jelikož je odmocnina na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí funkce, nemusíme ji při minimalizaci uvažovat, tudíž máme

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{i,j=1}^n \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) g_{ij}(x(t)).$$

Začněme s počítáním derivace $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}$. Tato derivace nebude nulová, pouze pokud se indexy i nebo j budou rovnat k , to lze zapsat například pomocí Kroneckerova δ , tudíž

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \sum_{i,j=1}^n \left(\dot{x}^i g_{ij} \delta_k^j + \dot{x}^j g_{ij} \delta_k^i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i g_{ik} + \sum_{j=1}^n \dot{x}^j g_{kj}.$$

Derivace tohoto výrazu podle t je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \sum_{i=1}^n \ddot{x}^i g_{ik} + \sum_{j=1}^n \dot{x}^j g_{kj} + \sum_{i,j=1}^n \left(\dot{x}^i \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^j + \dot{x}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \right).$$

Díky symetrii metriky můžeme první dvě sumy v tomto výrazu zapsat do jedné. Pravá strana Eulerových-Lagrangeho rovnic je jednoduchá

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Porovnáním obou stran dostaneme

$$2 \sum_{i=1}^n \ddot{x}^i g_{ik} + \sum_{i,j=1}^n \left(\dot{x}^i \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^j + \dot{x}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Celou tuto rovnost můžeme vynásobit $\sum_{k=1}^n \tilde{g}^{lk}$ a převést pravou stranu na levou, dostaneme

$$\ddot{x}^l + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{g}^{lk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

Vidíme, že jsme opravdu dostali rovnici geodetik. ◇

Torze a křivost lineární konexe

Definice 11.1.

Zobrazení $T: \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{X}M$ definované vztahem

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}M$$

nazýváme torze lineární konexe ∇ na M . Souřadnicové vyjádření vektorového pole $T(X, Y)$ v lokálních souřadnicích je

$$(T(X, Y))^i = \sum_{j,k=1}^n (\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i) X^j Y^k.$$

Tudíž T je tensorové pole typu $(1, 2)$, které má souřadný tvar

$$\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i.$$

Definice 11.2.

Jestliže $T = 0$, pak říkáme, že je ∇ lineární konexe bez torse.

Poznámka. Levi-Civitova konexe Riemannova prostoru je bez torse.

Definice 11.3.

Zobrazení $R: \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{X}M$ dané předpisem

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}M$$

se nazývá křivost lineární konexe ∇ na M . Křivost lineární konexe je tensorové pole typu $(1, 3)$ se souřadným tvarem

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{hj}^i \Gamma_{lk}^h - \Gamma_{hk}^i \Gamma_{lj}^h).$$

Věta 11.4.

Je-li ∇ lineární konexe bez torse, pak její křivost R splňuje pro každé $X, Y, Z \in \mathcal{X}M$ vztah, tzv. první Bianchiho identita

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Souřadný tvar této identity je

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0.$$

Definice 11.5.

Nechť (M, g) je Riemannova varieta a ∇ Levi-Civitova konexe. Definujme kovariantní formu tensoru křivosti $R(X, Y, Z, U)$, kde $X, Y, Z, U \in \mathcal{X}M$, jako

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)Z, U).$$

$R(X, Y, Z, U)$ je tensor typu $(0, 4)$ se souřadnicovým tvarem

$$R_{klhi} = \sum_{j=1}^n g_{ij} R_{klh}^j.$$

Poznámka. Podle Příkladu 12.6 platí pro kovariantní formu tensoru křivosti vztah $R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z)$. Pro souřadnice tensoru to znamená

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}.$$

Definice 11.6.

Nechť je (M, g) Riemannova varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ . Ricciho křivostní tensor Ric definujeme jako kontrakci křivosti, tj.

$$\text{Ric}_{ij} = - \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k.$$

Ricciho skalár (nebo skalární křivost) Scal definujeme jako

$$\text{Scal} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{g}^{ij} \text{Ric}_{ij},$$

kde \tilde{g} je inverzní matice metriky g .

Cvičení 11.7.

Nechť jsou na hladké varietě M dány dvě lineární konexe ∇ a $\tilde{\nabla}$, jejichž Christoffelovy symboly jsou svázány podmínkou

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \theta_k,$$

kde $\theta \in \Omega^1(M)$ je diferenciální 1-forma. Spočítejte rozdíl jejich křivostí, tj. tensor $\tilde{R}_{jkl}^i - R_{jkl}^i$.

Řešení. Celý výpočet je přímočarý a provedeme ho v lokálních souřadnicích. Počítejme

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^i_{jkl} &= \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{lj}}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{hj} \tilde{\Gamma}^h_{lk} - \tilde{\Gamma}^i_{hk} \tilde{\Gamma}^h_{lj} = \\
&= \frac{\partial \Gamma^i_{lk}}{\partial x^j} + \delta^i_l \frac{\partial \theta_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \delta^i_l \frac{\partial \theta_j}{\partial x^k} + (\Gamma^i_{hj} + \delta^i_h \theta_j) (\Gamma^h_{lk} + \delta^h_l \theta_k) - \\
&\quad - (\Gamma^i_{hk} + \delta^i_h \theta_k) (\Gamma^h_{lj} + \delta^h_l \theta_j) = \\
&= R^i_{jkl} + \delta^i_l \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x^k} \right) + \Gamma^i_{hj} \delta^h_l \theta_k + \delta^i_h \theta_j \Gamma^h_{lk} + \delta^i_h \theta_j \delta^h_l \theta_k - \Gamma^i_{hk} \delta^h_l \theta_j - \\
&\quad - \delta^i_h \theta_k \Gamma^h_{lj} - \delta^i_h \theta_k \delta^h_l \theta_j = \\
&= R^i_{jkl} + \delta^i_l \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x^k} \right) + \Gamma^i_{lj} \theta_k + \Gamma^i_{lk} \theta_j + \delta^i_l \theta_j \theta_k - \Gamma^i_{lk} \theta_j - \Gamma^i_{lj} \theta_k - \delta^i_l \theta_k \theta_j = \\
&= R^i_{jkl} + \delta^i_l \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x^k} \right).
\end{aligned}$$

◇

Cvičení 11.8.

Nechť M a M' jsou dvě hladké variety s lineárními konexí ∇, ∇' respektive. Řekneme, že difeomorfismus $\varphi: M \rightarrow M'$ zachovává konexi, jestliže pro všechna $x \in M$ platí

$$T_x \varphi(\nabla_X Y) = (\nabla'_{X'} Y')(\varphi(x)),$$

kde $X \in \mathcal{X}(M)$ a $X' \in \mathcal{X}(M')$ jsou φ -relovaná vektorová pole, respektive $Y \in \mathcal{X}(M)$ a $Y' \in \mathcal{X}(M')$ jsou φ -relovaná. Ukažte, že platí

$$T\varphi(\mathcal{T}(X, Y)) = \mathcal{T}'(T\varphi X, T\varphi Y),$$

kde $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ jsou torzní tensor na M , respektive M' .

Řešení. Připomeňme, že pole X a X' jsou φ -relovaná, pokud platí pro všechna $x \in M$

$$T_x \varphi X = X'(\varphi(x)).$$

Dále připomeňme, že platí, pokud jsou pole X, Y φ -relovaná s X', Y' , pak i Lieova závorka $[X, Y]$ je φ -relovaná se závorkou $[X', Y']$. Pro všechna $x \in M$ platí

$$\begin{aligned}
T_x \varphi(\mathcal{T}(X, Y)) &= T_x \varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = (\nabla'_{X'} Y')(\varphi(x)) - (\nabla'_{Y'} X')(\varphi(x)) - \\
&\quad - [X', Y'](\varphi(x)) = \\
&= \mathcal{T}'(X', Y')(\varphi(x)) = \mathcal{T}'(T_x \varphi X, T_x \varphi Y).
\end{aligned}$$

◇

Cvičení 11.9.

Ukažte, že pro kovariantní formu tensoru křivosti $R(X, Y, Z, U)$ platí identita

$$R_{jkli} = R_{lijk}.$$

Řešení. Uvažme dvě instance první Bianchiho identity se spuštěným horním indexem, tj.

$$\begin{aligned} R_{jkl} + R_{klj} + R_{ljk} &= 0, \\ R_{jki} + R_{kij} + R_{ijk} &= 0. \end{aligned}$$

Tyto identity od sebe odečteme a využijeme antisymetrie v druhé dvojici indexů v členu R_{jki} , dostáváme

$$2R_{jkl} + R_{klj} + R_{ljk} - R_{kij} - R_{ijk} = 0. \quad (11.10)$$

Proveďme toto znovu, jen zaměňme indexy ($i \leftrightarrow k$) a ($l \leftrightarrow j$), dostaneme

$$2R_{lij} + R_{ijl} + R_{jli} - R_{ikl} - R_{klij} = 0.$$

Využijme antisymetrie v první i v druhé dvojici indexů

$$2R_{lij} - R_{ijk} + R_{ljk} - R_{kij} + R_{klj} = 0,$$

a odečteme od rovnice (11.10), dostaneme

$$R_{jkl} = R_{lij}.$$

◇

Cvičení 11.11.

Ukažte, že Ricciho křivostní tensor Ric je symetrický, tj. $\text{Ric}_{ij} = \text{Ric}_{ji}$.

Řešení. Vyjdeme z první Bianchiho identity

$$R_{ilj}^k + R_{lji}^k + R_{jil}^k = 0,$$

ve které provedeme kontrakci indexů k a l , tj.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(R_{ikj}^k + R_{kji}^k + R_{jik}^k \right) &= 0, \\ -\text{Ric}_{ij} + \text{Ric}_{ji} + \sum_{k=1}^n R_{jik}^k &= 0, \end{aligned}$$

kde jsme využili antisymetrie křivosti v prvních dvou indexech. Ukážeme, že $\sum_{k=1}^n R_{jik}^k = 0$. Nejprve pomocí matice inverzní metriky snížíme index k a poté využijeme symetrie metriky a antisymetrii křivosti v druhých dvou indexech, tj.

$$\sum_{k=1}^n R_{jik}^k = \sum_{k,l=1}^n g^{lk} R_{jikl} = - \sum_{k,l=1}^n g^{kl} R_{jilk} = - \sum_{l=1}^n R_{jil}^l \Rightarrow \sum_{k=1}^n R_{jik}^k = 0.$$

◇

Cvičení 11.12.

Spočítejte komponenty tensoru křivosti, Ricciho tensor a Ricciho skalár pro následující případy:

1. sféru S^2 s indukovanou metrikou z \mathbb{R}^3 ,
2. anuloid T^2 s indukovanou metrikou z \mathbb{R}^3 ,
3. horní polovinu, tj. $\mathbb{H}^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$, s metrikou $ds^2 = (x^2)^{-2} \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right)$.

Řešení. Christoffelovy symboly pro dané Riemannovy variety jsou spočítané v Příkladu 10.14.

1. Z definice spočítáme pouze jednu komponentu tensoru křivosti, další komponenty dostaneme ze symetrií, které jsou v této kapitole odvozené. Opět použijeme označení $\varphi^1 = \varphi$ a $\varphi^2 = \theta$. Počítejme

$$\begin{aligned} R_{211}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \varphi^1} + \sum_{i=1}^2 (\Gamma_{2i}^2 \Gamma_{11}^i - \Gamma_{1i}^2 \Gamma_{21}^i) = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \varphi^2} - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 = \\ &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - (-\sin \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Zřejmě poté bude $R_{121}^2 = -\sin^2 \theta$. Z těchto komponent spočítáme kovariantní komponentu tensoru křivosti R_{1212} pomocí snížení indexu,

$$R_{1212} = \sum_{i=1}^2 R_{121i}^i g_{i2} = R_{1212}^2 g_{22} = -\sin^2 \theta,$$

kde jsme využili toho, že metrika je diagonální. Dále využijme antisymetrie v druhých dvou indexech, tj. $R_{1221} = \sin^2 \theta$, a opět zvedněme poslední index

$$R_{122}^1 = \sum_{i=1}^2 \tilde{g}^{1i} R_{122i} = \tilde{g}^{11} R_{1221} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1,$$

kde jsme využili toho, že komponenta R_{1222} je díky antisymetrii nulová. Tudiž poslední nenulová komponenta tensoru křivosti je $R_{212}^1 = -1$. Komponenty Ricciho tensoru získáme jednoduše jako

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{11} &= -\sum_{i=1}^2 R_{1i1}^i = -R_{121}^2 = \sin^2 \theta, \\ \text{Ric}_{22} &= -\sum_{i=1}^2 R_{2i2}^i = -R_{212}^1 = 1, \\ \text{Ric}_{12} &= -\sum_{i=1}^2 R_{1i2}^i = 0. \end{aligned}$$

Ricciho skalár poté je

$$\text{Scal} = \sum_{i,j=1}^2 \tilde{g}^{ij} \text{Ric}_{ij} = \tilde{g}^{11} \text{Ric}_{11} + \tilde{g}^{22} \text{Ric}_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta + 1 \cdot 1 = 2.$$

2. Budeme postupovat stejně jako u sféry. Nejprve spočítáme jednu komponentu

$$\begin{aligned} R_{211}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \varphi^1} + \sum_{i=1}^2 (\Gamma_{2i}^2 \Gamma_{11}^i - \Gamma_{1i}^2 \Gamma_{21}^i) = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \varphi^2} - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 = \\ &= \frac{\cos \theta}{r} (R + r \cos \theta) - \sin^2 \theta - \frac{1}{r} (R + r \cos \theta) \sin \theta \left(-\frac{r \sin \theta}{R + r \cos \theta} \right) = \\ &= \frac{\cos \theta (R + r \cos \theta)}{r}. \end{aligned}$$

Snížíme horní index

$$R_{2112} = \sum_{i=1}^2 g_{i2} R_{211}^i = r \cos \theta (R + r \cos \theta).$$

Využijeme antisymetrie a poslední index zvýšíme

$$R_{212}^1 = \sum_{i=1}^2 \tilde{g}^{i1} R_{212i} = -\frac{r \cos \theta}{R + r \cos \theta}.$$

Další dvě nenulové komponenty dostaneme z antisymetrie v prvních dvou indexech. Ricciho tensor je opět jednoduše

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{11} &= -R_{121}^2 = \frac{\cos \theta (R + r \cos \theta)}{r}, \\ \text{Ric}_{22} &= -R_{212}^1 = \frac{r \cos \theta}{R + r \cos \theta}, \\ \text{Ric}_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Ricciho skalár poté je

$$\text{Scal} = \sum_{i,j=1}^2 \tilde{g}^{ij} \text{Ric}_{ij} = \tilde{g}^{11} \text{Ric}_{11} + \tilde{g}^{22} \text{Ric}_{22} = \frac{2 \cos \theta}{r(R + r \cos \theta)}.$$

3. Opět postupujeme úplně stejně jako v předchozích dvou případech, spočítáme jednu komponentu tensoru křivosti

$$\begin{aligned} R_{122}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^2 (\Gamma_{1i}^1 \Gamma_{22}^i - \Gamma_{2i}^1 \Gamma_{12}^i) = -\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 = \\ &= -\frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^2)^2} - \frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{(x^2)^2}. \end{aligned}$$

Snížením indexu dostaneme $R_{1221} = -(x^2)^{-4}$. S využitím antisymetrie a zvednutím posledního indexu máme $R_{121}^2 = (x^2)^{-2}$. Ricciho tensor je opět jednoduše

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{11} &= -R_{121}^2 = -\frac{1}{(x^2)^2}, \\ \text{Ric}_{22} &= -R_{212}^1 = -\frac{1}{(x^2)^2}, \\ \text{Ric}_{12} &= 0, \end{aligned}$$

a Ricciho skalár je

$$\text{Scal} = \sum_{i,j=1}^2 \tilde{g}^{ij} \text{Ric}_{ij} = \tilde{g}^{11} \text{Ric}_{11} + \tilde{g}^{22} \text{Ric}_{22} = -2.$$

◇

Kovariantní derivování tensorových polí

Definice 12.1.

Nechť M je hladká varieta s lineární konexí ∇ . Kovariantní derivací 1-formy ω vzhledem k $X \in \mathcal{X}M$ nazýváme 1-formu $\nabla_X \omega: M \rightarrow T^*M$, která pro každé vektorové pole $Y \in \mathcal{X}M$ splňuje

$$X\langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$$

Souřadnicový tvar kovariantní derivace 1-formy je

$$(\nabla_X \omega)_i = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k \right) X^j.$$

Definice 12.2.

Nechť M je hladká varieta s lineární konexí ∇ , A je tensor typu (r, s) , $X, Y_1, \dots, Y_s \in \mathcal{X}M$ jsou vektorová pole a $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega(M)$ jsou 1-formy. Poté je

$$A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r): M \rightarrow \mathbb{R}$$

funkce na varietě M . Kovariantní derivaci tensoru A podle vektorového pole X , tj. $\nabla_X A$ definujeme jako

$$\begin{aligned} X(A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r)) &= (\nabla_X A)(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) + \\ &+ A(\nabla_X Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) + \dots + A(Y_1, \dots, \nabla_X Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) + \\ &+ A(Y_1, \dots, Y_s, \nabla_X \omega_1, \dots, \omega_r) + \dots + A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \nabla_X \omega_r). \end{aligned}$$

Souřadnicový tvar kovariantní derivace tensoru typu (r, s) je

$$\frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{lk}^{i_1} A_{j_1 \dots j_s}^{li_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{lk}^{i_r} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} l} - \Gamma_{j_1 k}^l A_{lj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - \Gamma_{j_s k}^l A_{j_1 \dots j_{s-1} l}^{i_1 \dots i_r} \right).$$

Poznámka. Kovariantní derivace tensorového pole g typu $(0, 2)$ na M podle $X \in \mathcal{X}M$ je

$$Xg(Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Věta 12.3.

Levi-Civitova konexe Riemannova prostoru (M, g) je jediná lineární konexe bez torse ∇ na M taková, že platí $\nabla g = 0$.

Věta 12.4.

Nechť (M, g) je Riemannova varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ . Pro všechna vektorová pole $X, Y, Z \in \mathcal{X}M$ pak platí

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Cvičení 12.5.

Nechť (M, g) je riemannovská varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ . Ukažte, že pro všechna $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ platí tzv. Koszulův vzorec

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - \\ - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y).$$

Řešení. Připomeňme, že pro Levi-Civitovu konexi platí

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Počítejme

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + \\ + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y).$$

S využitím symetrie a linearitu skalárního součinu

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Z, \nabla_Y X) + \\ + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X).$$

Do posledních třech skalárních součinů dosadíme podmínku nulové torze pro Levi-Civitovu konexi a opět využijeme linearitu skalárního součinu

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) + \\ + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X).$$

S využitím symetrie skalárního součinu a antisymetrie Lieových závorek, dostáváme požadovanou rovnost. \diamond

Cvičení 12.6.

Nechť (M, g) je riemannovská varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ . Ukažte, že pro všechna vektorová pole $X, Y, U, Z \in \mathcal{X}M$ platí

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z),$$

kde R je křivost riemannovské variety.

Řešení. Z Věty 12.4 máme

$$[X, Y]g(U, Z) = g(\nabla_{[X, Y]}U, Z) + g(U, \nabla_{[X, Y]}Z).$$

Dále dvojnásobnou aplikací této věty dostaneme

$$\begin{aligned} XYg(U, Z) &= X(g(\nabla_Y U, Z) + g(U, \nabla_Y Z)) = \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y U, Z) + g(\nabla_Y U, \nabla_X Z) + g(\nabla_X U, \nabla_Y Z) + g(U, \nabla_X \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Uvažme výraz $(XY - YX - [X, Y])g(U, Z)$. Jelikož $XY - YX$ není nic jiného než Lieova závorka platí

$$(XY - YX - [X, Y])g(U, Z) = 0.$$

Ale pokud zapůsobíme vektorovými poli na skalár $g(U, Z)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X \nabla_Y U, Z) + g(\nabla_Y U, \nabla_X Z) + g(\nabla_X U, \nabla_Y Z) + g(U, \nabla_X \nabla_Y Z) - \\ &\quad - g(\nabla_Y \nabla_X U, Z) - g(\nabla_X U, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Y U, \nabla_X Z) - g(U, \nabla_Y \nabla_X Z) - \\ &\quad - g(\nabla_{[X, Y]}U, Z) - g(U, \nabla_{[X, Y]}Z) = \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]}U, Z) + g(U, \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z) = \\ &= g(R(X, Y)U, Z) + g(U, R(X, Y)Z), \end{aligned}$$

což nám s využitím symetrie metriky dá požadovanou identitu. \diamond

Cvičení 12.7.

Nechť je (M, g) Riemannova varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ . Ukažte, že pro všechna $X, Y, Z, U \in \mathcal{X}M$ platí tzv. druhá Bianchiho identita

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U) + (\nabla_Y R)(Z, X, U) + (\nabla_Z R)(X, Y, U) = 0.$$

Řešení. Nejprve se zabývejme působením vektorového pole X na skaláru $\langle R(Y, Z)U, \omega \rangle$, kde $\omega \in \Omega(M)$. $\langle R(Y, Z)U, \omega \rangle$ můžeme chápat jako vyčíslení vektorového pole $R(Y, Z)U$ na 1-formě ω , potom

$$X\langle R(Y, Z)U, \omega \rangle = \langle \nabla_X(R(Y, Z)U), \omega \rangle + \langle R(Y, Z)U, \nabla_X \omega \rangle.$$

Nebo $\langle R(Y, Z)U, \omega \rangle$ můžeme chápat jako vyčíslení křivosti, tj. tensoru typu $(1, 3)$ na třech vektorových polích a jedné 1-formě. Poté platí

$$\begin{aligned} X\langle R(Y, Z)U, \omega \rangle &= X(R(Y, Z, U, \omega)) = (\nabla_X R)(Y, Z, U, \omega) + R(\nabla_X Y, Z, U, \omega) + \\ &\quad + R(Y, \nabla_X Z, U, \omega) + R(Y, Z, \nabla_X U, \omega) + R(Y, Z, U, \nabla_X \omega) = \\ &= \langle (\nabla_X R)(Y, Z, U), \omega \rangle + \langle R(\nabla_X Y, Z)U, \omega \rangle + \langle R(Y, \nabla_X Z)U, \omega \rangle + \\ &\quad + \langle R(Y, Z)\nabla_X U, \omega \rangle + \langle R(Y, Z)U, \nabla_X \omega \rangle. \end{aligned}$$

Z těchto dvou vyjádření vidíme, že

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U) = \nabla_X(R(Y, Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y, Z)\nabla_X U.$$

Tudíž našim cílem je ukázat, že tento výraz

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X R)(Y, Z, U) + (\nabla_Y R)(Z, X, U) + (\nabla_Z R)(X, Y, U) &= \quad (12.8) \\
 &= \nabla_X (R(Y, Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y, Z)\nabla_X U + \\
 &+ \nabla_Y (R(Z, X)U) - R(\nabla_Y Z, X)U - R(Z, \nabla_Y X)U - R(Z, X)\nabla_Y U + \\
 &+ \nabla_Z (R(X, Y)U) - R(\nabla_Z X, Y)U - R(X, \nabla_Z Y)U - R(X, Y)\nabla_Z U
 \end{aligned}$$

je roven nule. Nejprve s využitím antisymetrie křivosti v prvních dvou vstupech a podmínky nulové torze Levi-Civitovi konexe přepíšeme členy v (12.8) s kovariantní derivací v prvních dvou vstupech

$$\begin{aligned}
 &-R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(\nabla_Y Z, X)U - R(Z, \nabla_Y X)U - \\
 &-R(\nabla_Z X, Y)U - R(X, \nabla_Z Y)U = \\
 &= R(Z, [X, Y])U + R(X, [Y, Z])U + R(Y, [Z, X])U.
 \end{aligned}$$

Toto dále zkombinujeme se členy z (12.8), které obsahují kovariantní derivaci U . Podle definice křivosti dostaneme

$$\begin{aligned}
 &R(Z, [X, Y])U + R(X, [Y, Z])U + R(Y, [Z, X])U - R(Y, Z)\nabla_X U - \\
 &-R(Z, X)\nabla_Y U - R(X, Y)\nabla_Z U = \\
 &= \nabla_Z \nabla_{[X, Y]} U - \nabla_{[X, Y]} \nabla_Z U - \nabla_{[Z, [X, Y]]} U + \\
 &+ \nabla_X \nabla_{[Y, Z]} U - \nabla_{[Y, Z]} \nabla_X U - \nabla_{[X, [Y, Z]]} U + \\
 &+ \nabla_Y \nabla_{[Z, X]} U - \nabla_{[Z, X]} \nabla_Y U - \nabla_{[Y, [Z, X]]} U - \\
 &- \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X U + \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X U + \nabla_{[Y, Z]} \nabla_X U - \\
 &- \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y U + \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y U + \nabla_{[Z, X]} \nabla_Y U - \\
 &- \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z U + \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z U + \nabla_{[X, Y]} \nabla_Z U = \\
 &= \nabla_X (\nabla_{[Y, Z]} U + \nabla_Z \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_Z U) + \\
 &+ \nabla_Y (\nabla_{[Z, X]} U + \nabla_X \nabla_Z U - \nabla_Z \nabla_X U) + \\
 &+ \nabla_Z (\nabla_{[X, Y]} U + \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_X \nabla_Y U) - \nabla_{[Z, [X, Y]] + [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]]} U = \\
 &= -\nabla_X (R(Y, Z)U) - \nabla_Y (R(Z, X)U) - \nabla_Z (R(X, Y)U),
 \end{aligned}$$

kde jsme použili Jacobiho identitu pro vektorová pole. Vidíme, že výsledné členy se přesně vyruší se zbývajícími členy v (12.8). \diamond

Cvičení 12.9.

Najděte souřadnicový tvar druhé Bianchiho identity.

Řešení. Souřadnice tensoru křivosti jsou R^i_{jkl} . Pokud tento tensor kovariantně zderivujeme podle vektorového pole $X = \sum_{h=1}^n X^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ dostaneme

$$\nabla_X R^i_{jkl} = \sum_{h=1}^n X^h \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^h}} R^i_{jkl}.$$

Označme kovariantní derivaci podle vektorového pole $\frac{\partial}{\partial x^h}$ jako ∇_h . Druhá Bianchiho identita má v souřadnicích tedy tvar

$$0 = \sum_{h,j,k,l=1}^n \left((X^h \nabla_h R^i_{jkl}) Y^j Z^k U^l + (Y^h \nabla_h R^i_{jkl}) Z^j X^k U^l + (Z^h \nabla_h R^i_{jkl}) X^j Y^k U^l \right)$$

Přejmenujeme sčítací indexy v druhém členu ($h \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow h$) a ve třetím členu ($h \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow h$) dostaneme

$$0 = \sum_{h,j,k,l=1}^n \left(\nabla_h R^i_{jkl} + \nabla_j R^i_{khl} + \nabla_k R^i_{hjl} \right) X^h Y^j Z^k U^l,$$

proto je souřadnicový tvar 2. Bianchiho identity

$$\nabla_h R^i_{jkl} + \nabla_j R^i_{khl} + \nabla_k R^i_{hjl} = 0.$$

◇

Cvičení 12.10.

Ukažte, že platí

$$\sum_{h,k=1}^n \tilde{g}^{hk} \nabla_h \text{Ric}_{kj} = \frac{1}{2} \nabla_j \text{Scal},$$

kde využíváme značení z předchozího příkladu.

Řešení. Důkaz provedeme v souřadnicích. Nejprve uvažme kontrakci druhé Bianchiho identity a využijme antisymetrie v prvních dvou indexech tensoru křivosti

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\nabla_h R^k_{jkl} + \nabla_j R^k_{khl} + \nabla_k R^k_{hjl} \right) &= 0, \\ -\nabla_h \text{Ric}_{jl} + \nabla_j \text{Ric}_{hl} + \sum_{k=1}^n \nabla_k R^k_{hjl} &= 0. \end{aligned}$$

Výslednou rovnost vynásobíme $\sum_{h,l=1}^n \tilde{g}^{hl}$ a využijme, že metrika je kovariantně konstantní (tj. $\nabla g = 0$),

$$\begin{aligned} \sum_{h,l=1}^n \tilde{g}^{hl} \left(-\nabla_h \text{Ric}_{jl} + \nabla_j \text{Ric}_{hl} + \sum_{k=1}^n \nabla_k R^k_{hjl} \right) &= 0, \\ -\sum_{h,l=1}^n \tilde{g}^{hl} \nabla_h \text{Ric}_{jl} + \nabla_j \text{Scal} + \sum_{k,h,l=1}^n \tilde{g}^{hl} \nabla_k R^k_{hjl} &= 0. \end{aligned}$$

Poslední člen v této rovnosti upravíme pomocí symetrií křivosti

$$\begin{aligned} \sum_{k,h,l=1}^n \tilde{g}^{hl} \nabla_k R^k_{hjl} &= \sum_{k,h,l,m=1}^n \tilde{g}^{hl} \nabla_k \tilde{g}^{mk} R_{hjlm} = \sum_{k,h,l,m=1}^n \tilde{g}^{hl} \nabla_k \tilde{g}^{mk} R_{jhml} = \\ &= \sum_{k,h,m=1}^n \nabla_k \tilde{g}^{mk} R^h_{jhm} = - \sum_{k,m=1}^n \tilde{g}^{mk} \nabla_k \text{Ric}_{jm}. \end{aligned}$$

Což po přejmenování indexů ($k \rightarrow h$) a ($m \rightarrow l$) a dosazení do poslední rovnosti dává požadovanou identitu. ◇

Cvičení 12.11.

Nechť je (M, g) n -dimenzionální souvislá Riemannova varieta s Levi-Civitovou konexí ∇ a nechť pro Ricciho tensor platí

$$R_{ij} = \mu(x^k)g_{ij},$$

kde $\mu(x^k)$ je funkce souřadnic. Ukažte, že pro $n > 2$ musí být $\mu(x^k)$ konstantní funkce.

Řešení. Vyřešme nejprve případ $n = 1$. Pro jednu dimenzi je křivost triviálně nulová, proto i Ricciho tensor i Ricciho skalár jsou triviálně nulové a $\mu(x^k)$ je volná funkce. Pro $n > 1$ nejprve spočítáme Ricciho skalár. Pro počítání si uvědomme, že výraz $\sum_{i=1}^n \delta_i^i$ není nic jiného, než stopa jednotkové matice řádu n , tudíž se rovná n . Proto Ricciho skalár je

$$R = \sum_{i,j=1}^n \tilde{g}^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{g}^{ij} \mu g_{ij} = \mu \sum_{i=1}^n \delta_i^i = n\mu.$$

Dále použijme výraz pro kovariantní derivaci Ricciho tensoru z minulého příkladu, tj.

$$\begin{aligned} \sum_{h,k=1}^n \tilde{g}^{hk} \nabla_h \text{Ric}_{kj} &= \frac{1}{2} \nabla_j \text{Scal}, \\ \sum_{h,k=1}^n \tilde{g}^{hk} \nabla_h (\mu g_{kj}) &= \frac{1}{2} \nabla_j (n\mu). \end{aligned}$$

μ je skalární funkce, tudíž kovariantní derivace se změní pouze na obyčejnou derivaci. Dále jelikož metrika je kovariantně konstantní dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{h,k=1}^n \tilde{g}^{hk} g_{kj} \frac{\partial \mu}{\partial x^h} &= \frac{n}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x^j}, \\ \sum_{h=1}^n \delta_j^h \frac{\partial \mu}{\partial x^h} &= \frac{n}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x^j}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial x^j} &= \frac{n}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

což je podmínka, která je splněna pouze pro $n = 2$. Pro $n > 3$ musí být

$$\frac{\partial \mu}{\partial x^j} = 0,$$

tudíž μ musí být konstanta. ◇

Cvičení 12.12.

Nechť je ∇ lineární konexe bez torse na hladké varietě M . Ukažte, že pro vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}M$, je vnější derivace 1-formy $\omega \in \Omega(M)$ rovna

$$d\omega(X, Y) = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle - \langle \nabla_Y \omega, X \rangle.$$

Řešení. Připomeňme, jak se vyčísľuje vnější derivace 1-formy na vektorových polích, tj. vzorec

$$d\omega(X, Y) = X\langle\omega, Y\rangle - Y\langle\omega, X\rangle - \langle\omega, [X, Y]\rangle.$$

V prvních dvou členech využijeme definici kovariantní derivace, v posledním členu zase podmínku nulové torse. Dostaneme

$$d\omega(X, Y) = \langle\nabla_X\omega, Y\rangle + \langle\omega, \nabla_X Y\rangle - \langle\nabla_Y\omega, X\rangle - \langle\omega, \nabla_Y X\rangle - \langle\omega, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle.$$

S využitím linearitv v posledním výrazu dostaneme požadovanou identitu. \diamond

Veškeré definice, věty, tvrzení, lemmata a poznámky jsme převzali ze skript profesora I. Koláře, které jsou hlavním učebním materiálem k předmětu. Ačkoliv jsme v některých případech provedli drobné změny vzhledem k originální formulaci, vždy jsme se snažili zachovat původní autorovu myšlenku. Inspiraci k příkladům jsme čerpali z různých zdrojů, mezi něž patří také sbírka docenta Antona Galaeva, Dr. rer. nat., obsahující výsledky.

Literatura

- [1] I. Kolář. *Úvod do globální analýzy*, Brno: Masarykova univerzita, (2003), iv, 118 s. ISBN 80-210-3205-7.
- [2] P. M. Gadea, J. M. Masqué: *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds: A Workbook for Students and Teachers*: Springer, 2001, xv., 438 s. ISBN 978-90-481-3563-9.
- [3] O'Neill, Barrett. *Elementary Differential Geometry*, New York: Academic, (1966). Print.
- [4] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, Interscience, (1969). Print.
- [5] S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*, New York: Springer-Verlag, (1999). Print.
- [6] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, (2000). Print.

