V Brně 8. dubna 2001

Diplomová práce

# Diferenční rovnice ve středoškolské matematice

Aleš Kobza

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně podle pokynů vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené literatury.

Děkuji vedoucímu diplomové práce, Doc. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc. za cenné rady a připomínky k tématu diplomové práce.

# Obsah

# 1 Úvod

V případě, že definiční obor funkce jsou ekvidistantní body, jak je tomu např. u posloupností, používá se k jejich vyšetřování *diferencí* (místo derivací) a *sumací* (místo integrálů). *Diferenční rovnice* jsou tedy obdobou diferenciálních rovnic pro funkce s diskrétním definičním oborem. Najdeme je v ekonomii, v počtu pravděpodobnosti, matematické statistice, fyzice, chemii a všude tam, kde je povaha problému taková, že vyžaduje řešení metodami diskrétního charakteru.

I ve středoškolské matematice se setkáme s některými problémy, které je výhodné řešit pomocí diferenčních rovnic, a to především v kombinatorice a v učivu o posloupnostech. Některé diferenční rovnice totiž představují rekurentní vzorce pro posloupnosti $u(n)$ nebo součty jejích členů $s(n)$. Řešit tyto rovnice znamená najít vzorce pro $u(n)$ (resp. $s(n)$) jako funkce $n$.

Tuto práci je možné využít jako výukový text tématu „Diferenční rovnice" na gymnáziích s rozšířenou výukou matematiky. Vyložíme zde základy diferenčního a sumačního počtu nutné k tomu, abychom v dalším dokázali řešit jisté typy lineárních diferenčních rovnic, na něž se především zaměříme. K mechanickému řešení lineárních diferenčních rovnic přitom stačí středoškolské znalosti. Teoretický výklad je vždy doplněn řešenými příklady, navíc v závěru skoro každé kapitoly je větší počet úloh na procvičení včetně výsledků a případně i návodů k jejich řešení.

Poznamenejme, že podobně jako pro diferenciální rovnice, tak i pro diferenční rovnice neexistuje obecná metoda řešení. Pro některé funkce platí jisté analogie mezi spojitým a diskrétním případem. Na některé z nich upozorníme i v této práci. Tyto poznámky však nejsou nutné pro pochopení ostatního textu, proto jsou psány menším písmem. Čtenář s hlubším zájmem o probíranou problematiku má v textu možnost najít odkazy na další literaturu.

Dříve, než přistoupíme k samotnému výkladu, uveďme několik motivačních příkladů, které naznačí, jaké typy úloh zvládneme po prostudování této práce řešit.

**Příklad 1.1:** Určete největší možný počet $u(n)$ oblastí, na které lze rovinu rozdělit pomocí $n$ přímek, které v ní leží.

*Řešení:* Mějme v rovině $n$ přímek $p_1, p_2, ..., p_n$ v obecné poloze, tj. $n$ přímek takových, že žádné tři se neprotnou v jednom bodě (v termínech geometrie to znamená, že žádné tři přímky nepatří do tzv. svazku přímek 1.druhu - viz skripta [7]) a žádné dvě nejsou rovnoběžné (tedy žádné dvě z těchto přímek neurčují svazek přímek 2.druhu). Těmito přímkami je rovina rozdělena právě na $u(n)$ oblastí. Přidejme přímku $p_{n+1}$ tak, aby všech $n+1$ přímek opět bylo v obecné poloze, tzn. přímka $p_{n+1}$ je rozdělena průsečíky s přímkami $p_1, p_2, ..., p_n$ na $n+1$ částí. Každá z těchto částí dělí jednu z původních oblastí roviny na dvě „nové". Přidáním přímky $p_{n+1}$ tedy počet částí roviny vzrostl o $n+1$. Je zřejmé, že počet oblastí, na které je rovina rozdělena přímkami $p_1, p_2, ..., p_{n+1}$ je $u(n+1)$. Tímto jsme odvodili vztah

$$u(n+1) = u(n) + n + 1.$$

Označíme-li $u(n+1) - u(n) = \Delta u(n)$, pak

$$\Delta u(n) = n + 1. \tag{1.1}$$

Z kapitoly 3 vyplyne, že $u(n)$ lze předpokládat ve tvaru:

$$u(n) = an^2 + bn + c,$$

kde $a, b, c$ jsou konstanty, které musíme určit. Tedy

$$\Delta u(n) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c),$$

což po úpravě dá
$$\Delta u(n) = 2an + a + b. \tag{1.2}$$
Pravé strany rovnic (1.1) a (1.2) se musí identicky rovnat
$$n + 1 = 2an + a + b$$
a konstanty $a, b$ proto můžeme určit porovnáním koeficientů u stejných mocnin:
$$\begin{aligned} n^1: \quad 2a = 1 \quad &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \\ n^0: \quad a + b = 1 \quad &\Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Zbývá určit konstantu $c$. Zřejmě platí $u(1) = 2$, tedy
$$u(1) = a + b + c \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$
Pro hledaný počet $u(n)$ oblastí jsme odvodili vztah
$$u(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2). \tag{1.3}$$

**Příklad 1.2:** Určete hodnotu součtu
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$$
pro libovolné $n \in \mathbf{N}$.

*Řešení:* Máme najít vzorec pro součet prvních $n$ členů posloupnosti
$$s(n) = u(1) + u(2) + \dots + u(n),$$
kde $u(n) = n(n+1)(n+2)$. V podkapitole 3.3 se dozvíme, že platí
$$s(n) = \sum u(n+1).$$
Naším úkolem je určit tzv. sumaci $u(n+1)$. Seznámíme se rovněž s pojmem zobecněná mocnina (viz Definice 2.18), pomocí níž tento výpočet snadno provedeme. Platí totiž
$$\begin{aligned} s(n) &= \sum (n+1)(n+2)(n+3) = \sum (n+3)^{(3)} = \frac{1}{4}(n+3)^{(4)} + c = \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + c. \end{aligned}$$
Konstantu $c$ určíme z faktu, že $s(1) = u(1)$, tj.
$$\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$
Vypočetli jsme
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3). \tag{1.4}$$

Právě vyřešený příklad lze nalézt např. ve sbírce [10], která je určena pro gymnázia, ovšem v zadání se mluví o důkazu vzorce (1.4). To lze samozřejmě provést matematickou indukcí, zvídavý student si však jistě položí otázku, jak lze vzorce podobné (1.4) odvodit. Odpověď na ni podává i tato práce.

Rovněž Příklad 1.1 lze najít ve středoškolské sbírce [9]. I ten je formulován jako důkaz vzorce (1.3) matematickou indukcí. Ve stejné knize je ale popsána metoda, jak lze u posloupnosti dané rekurentně najít vzorec pro $n-$tý člen (funkční vzorec). Postup je následující. Po vypsání několika prvních členů vyslovíme hypotézu, jejíž platnost potvrdíme matematickou indukcí. Tímto způsobem lze „uhodnout" funkční vzorce, které nejsou příliš komplikované a Příklad 1.1 bychom takto možná vyřešili. Již v následujícím příkladu by byl tento postup těžko proveditelný a oceníme v něm výhody diferenčního počtu.

**Příklad 1.3:** Kolika způsoby můžete vyběhnout $n$ schodů, děláte-li kroky o jeden nebo o dva schody ($n \in \mathbf{N}$)?

*Řešení:* Označme $v(n)$ počet způsobů pro $n$ schodů. Uvažujme o vyběhnutí $n+2$ schodů. Uděláme-li první krok o jeden schod, pak nám zbývá $v(n+1)$ způsobů pro další schody. Ve druhém případě, tj. uděláme-li první krok o dva schody, zbývá vyběhnout $n$ schodů, což lze udělat $v(n)$ způsoby. Tímto jsme odvodili rekurentní vztah

$$v(n+2) = v(n+1) + v(n), \tag{1.5}$$

přičemž zřejmě platí $v(1) = 1$, $v(2) = 2$. Podle terminologie zaváděné ve 4. a 5. kapitole je vlastně (1.5) homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a danými počátečními podmínkami.

Rovnici (1.5) nyní vyřešíme způsobem podrobně vyloženým v 6. kapitole. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Obecné řešení je proto tvaru

$$v(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstanty $C_1, C_2$ určíme z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Rozřešíme-li tuto soustavu, dostaneme $C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Vypočetli jsme

$$v(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.6}$$

Posloupnost, se kterou jsme pracovali v Příkladu 1.3 se nazývá *Fibonacciho posloupnost* (Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský (1170 - 1240), italský matematik). Všimněme si, že kdybychom postupně počítali její jednotlivé členy z rekurentního vzorce (1.5) při podmínkách $v(1) = 1$, $v(2) = 2$, dostali bychom přirozená čísla

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Proto i hodnotami vypočtenými ze vzorce (1.6) musí být pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ přirozená čísla, i když tvar (1.6) obsahuje zlomky a iracionální čísla.

Poslední příklad, který v této kapitole uvedeme, je z oblasti počtu pravděpodobnosti.

**Příklad 1.4:** *(Hráčův problém)*
Hráč se účastní hry, v jejímž každém kole sází vždy stejnou částku (1\$). S pravděpodobností $p$ ($0 < p < 1$) přitom vyhraje dvojnásobek vsazené částky, v opačném případě sázku ztrácí. Hru končí, jestliže dosáhne stanovené výhry $N$\$, nebo

prohraje-li výchozí částku $M\$$ $(0 \le M \le N)$. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že hráč prohraje výchozí částku $M\$$.

*Řešení:* Označme $P(n)$ pravděpodobnost, že hráč prohraje částku $n\$$. Pak zřejmě platí $P(0) = 1$ a $P(N) = 0$. Nechť $0 < n+1 < N$. Ze stavu, kdy má hráč $(n+1)\$$ se může dostat buď do stavu, kdy má $(n+2)\$$, a to s pravděpodobností $p$ a nebo se s pravděpodobností $1-p$ dostane do stavu, kdy má $n\$$. Tuto skutečnost vyjadřuje vzorec

$$P(n+1) = pP(n+2) + (1-p)P(n),$$

což je lineární diferenční rovnice 2. řádu, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$P(n+2) - \frac{1}{p}P(n+1) + \frac{1-p}{p}P(n) = 0. \tag{1.7}$$

Tuto rovnici nyní vyřešíme způsobem podrobně vyloženým v 6. kapitole. Nejprve najděme kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{1-p}{p} = 0$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{p} \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{4(1-p)}{p}}}{2} = \frac{1}{2p} \pm \frac{1}{2p}\sqrt{4p^2 - 4p + 1} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Tedy

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{1-p}{p}.$$

Nyní musíme rozlišit dva případy. Charakteristická rovnice totiž má buď dvojnásobný kořen a nebo dva reálné různé kořeny.

1. Případ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ nastane právě když $p = \frac{1}{2}$. Obecné řešení rovnice (1.7) je v tomto případě

   $$P(n) = C_1 + C_2 n.$$

   Konstanty $C_1, C_2$ určíme z podmínek

   $$\begin{aligned} P(0) &= C_1 = 1, \\ P(N) &= C_1 + C_2 N = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{N}. \end{aligned}$$

   Pro $p = \frac{1}{2}$ jsme vypočetli

   $$P(n) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N}. \tag{1.8}$$

2. V případě, kdy $\lambda_1 \neq \lambda_2$, což nastane právě když $p \neq \frac{1}{2}$, je obecné řešení rovnice (1.7) tvaru

   $$P(n) = C_1 + C_2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

   Podobným způsobem jako výše vypočteme konstanty $C_1, C_2$.

   $$\begin{aligned} P(0) &= C_1 + C_2 = 1, \\ P(N) &= C_1 + C_2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^N = 0. \end{aligned}$$

   Vyřešením této soustavy dostaneme $C_1 = \frac{(1-p)^N}{(1-p)^N - p^N}$ a $C_2 = \frac{p^N}{p^N - (1-p)^N}$. Tedy

   $$P(n) = \frac{(1-p)^N}{(1-p)^N - p^N} + \frac{p^N}{p^N - (1-p)^N} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

   Po úpravě pro $p \neq \frac{1}{2}$ máme:

   $$P(n) = \frac{(1-p)^n[(1-p)^{N-n} - p^{N-n}]}{(1-p)^N - p^N}. \tag{1.9}$$

Pro konkrétnější představu vypočtěme hodnotu $P(n)$ pro dva případy:

1. Je-li $M = 20\$,\ N = 40\$$ a $p = \frac{1}{2}$, pak podle (1.8) vypočteme: $P(20) = 0,5$.
2. Je-li $M = 20\$,\ N = 40\$$ a $p = \frac{18}{37}$ (což zachycuje reálnou situaci, sází-li hráč v ruletě s jednou nulou na červenou resp. černou barvu), pak podle (1.9) vypočteme: $P(20) \doteq 0,75$.

# 2 Základy diferenčního počtu

Než se budeme moci zabývat diferenčními rovnicemi, musíme se seznámit s pojmem „*diference*“, což v překladu znamená „rozdíl“. V následující podkapitole uvedeme definici diference funkce a ukážeme si její základní vlastnosti.

## 2.1 Pojem a vlastnosti diference funkce

**Definice 2.1:** Nechť je dán bod $x_0$ a číslo $h > 0$. Nechť funkce $y = f(x)$ je definována v bodech $x_0$ a $x_0 + h$. Číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazveme *diference funkce* $f(x)$ v bodě $x_0$. Píšeme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

a čteme „delta $f(x_0)$“. Číslu $h$ říkáme *diferenční krok*, bodu $x_0$ *počáteční bod diference.*

Pokud by nebylo jasné, jaký diferenční krok právě uvažujeme, případně pokud chceme zdůraznit jeho délku, pak diferenci označíme: $\Delta_h f(x_0)$.

Nechť $h$ je pevně zvolený diferenční krok. Je-li $f(x)$ definována v bodech $x_0$ a $x_0 + h$, můžeme v bodě $x_0$ vypočítat diferenci $\Delta f(x_0)$. Abychom však mohli určit diferenci v bodě $x_0 + h$, musí být funkce $f(x)$ definována i v bodě $x_0 + 2h$. Toto podobně platí i pro každý další bod $x_0 + nh$, $n \in \mathbf{N}$ definičního oboru. K tomu, abychom mohli určit diferenci funkce $f(x)$ v bodech $x_0, x_0 + h, ..., x_0 + nh$, $n \in \mathbf{N}$, musí definiční obor $\mathcal{M}$ funkce $f(x)$ obsahovat množinu $\{x_0, x_0 + h, ..., x_0 + nh, x_0 + (n + 1)h\}$.

**Definice 2.2:** Nechť funkce $f(x)$ je definována ve všech bodech neprázdné množiny $\mathcal{M}$. Funkci, která každému bodu $x \in \mathcal{M}$ s vlastností $(x + h) \in \mathcal{M}$ přiřazuje hodnotu $\Delta f(x)$ nazýváme *diferencí funkce* $f(x)$ a značíme

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \ x \in \mathcal{M}.$$

**Příklad 2.3:** Vypočítejte

1. $\Delta f(x)$ pro obecný diferenční krok $h$,
2. $\Delta f(1)$ pro $h = 2$,

je-li $f(x) = x^3$.

*Řešení:*

1. $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = (x + h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3$,
2. $\Delta f(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2^3 = 26$.

Všimněme si, že diferenci je možno použít i k definici pojmu derivace. Je totiž

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{\Delta_h f(x)}{h}.$$

**Příklad 2.4:** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^3$.

*Řešení:* Z Příkladu 2.3 víme, že $\Delta x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3$.

$$(x^3)' = \lim_{h \to 0+} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = \lim_{h \to 0+} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2.$$

**Poznámka 2.5:** V úlohách na diference a diferenční rovnice bývá obvykle definiční obor diference neprázdná množina $\mathcal{M}$ - tzv. *diskrétní množina ekvidistantních bodů* $\{x_0 + nh\}$, kde $n = 0, 1, 2, ...$, počáteční bod diference $x_0$ a diferenční krok $h$ jsou předem daná čísla. Označme:

$$\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, ...\}.$$

**Poznámka 2.6:** Nechť je dáno $h > 0$ a nechť $f(x)$ je libovolná funkce definovaná na množině $\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, ...\}$. Proveďme lineární substituci

$$x = x_0 + h(t-1),$$

kde $t$ je nová proměnná. Označme $g(t) = f(x) = f(x_0 + h(t-1))$, potom

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x) = f(x_0 + h(t-1) + h) - f(x_0 + h(t-1)) = \\ &= f(x_0 + ht) - f(x_0 + h(t-1)) = g(t+1) - g(t) \;=\; \Delta_1 g(t). \end{aligned}$$

Touto substitucí jsme dostali diferenční krok 1. Substituce $t = \frac{x-(x_0-h)}{h}$ navíc nemění typ vyšetřované funkce (tj. např. polynom stupně $k$ zůstane i po substituci polynomem stupně $k$). Pro $x = x_0$ bude $t = 1$, pro $x = x_0 + nh$ bude $t = 1 + n$. Množina $\mathcal{M}$ se touto substitucí změní v množinu všech přirozených čísel $\mathbf{N}$.

Popsanou substitucí lze vždy docílit toho, že $x_0 = 1$ a $h = 1$, tzn. $\mathcal{M} = \mathbf{N}$.

**Definice 2.7:** Funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbf{N}$, se nazývá *posloupnost.*

Je-li $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, bývá obvyklé místo $u(n)$ psát $u_n$. Aby však v dalším nemohlo dojít k nedorozumění, kdy jde o index a kdy máme na mysli proměnnou, zůstaneme u označení $u(n)$, jak je tomu např. i v knihách [2] a [3].

**Příklad 2.8:** Najděte posloupnost, která má stejnou diferenci jako funkce $f(x) = 36x^2 + 120x + 100$ definovaná na množině $\mathcal{M} = \{-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, ...\}$.

*Řešení:* Hledáme posloupnost $g(n)$ takovou, aby platilo $\Delta_1 g(n) = \Delta_h f(x)$. Podle Poznámky 2.6 víme, že požadovanou posloupnost nalezneme pomocí substituce $x = x_0 + h(n-1)$, tedy $x = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} - \frac{11}{6}$. Protože $g(n) = f(x) = f(\frac{n}{2} - \frac{11}{6})$, dostáváme

$$g(n) = 36\left(\frac{n}{2} - \frac{11}{6}\right)^2 + 120\left(\frac{n}{2} - \frac{11}{6}\right) + 100 = 9n^2 - 6n + 1.$$

Hledaná posloupnost je tedy

$$g(n) = 9n^2 - 6n + 1.$$

Poznamenejme, že v některé literatuře (např. v knize [1]) jsou diferenční rovnice uvažovány na obecné množině $\mathcal{M}$ (viz Poznámka 2.5). Výklad další problematiky se však zpřehlední i zjednoduší, učiníme-li následující úmluvu.

**Úmluva 2.9:** Nebude-li řečeno jinak, v dalším se vždy budeme zabývat posloupnostmi, tzn. budeme předpokládat, že $x_0 = 1$ a $h = 1$, tedy $\mathcal{M} = \mathbf{N}$, což lze podle Poznámky 2.6 předpokládat bez újmy na obecnosti.

Obdobným způsobem, jakým jsme přešli od funkce k poslopnosti, můžeme přejít od posloupnosti k funkci s libovolným definičním oborem $\mathcal{M}$ ve smyslu Poznámky 2.5. Proto všechny věty, které uvedeme v dalším pro posloupnosti, platí rovněž pro zmíněné funkce s definičním oborem $\mathcal{M}$.

**Věta 2.10:** Pro všechna $n$, pro něž jsou současně definovány posloupnosti $\Delta u(n), \Delta v(n)$ platí:

1. $\Delta[u(n) \pm v(n)] = \Delta u(n) \pm \Delta v(n)$
2. $\Delta[c \cdot u(n)] = c\Delta u(n)$, kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta
3. $\Delta[u(n)v(n)] = v(n)\Delta u(n) + u(n+1)\Delta v(n) = u(n)\Delta v(n) + v(n+1)\Delta u(n)$

4. $\Delta[\frac{u(n)}{v(n)}] = \frac{v(n)\Delta u(n) - u(n)\Delta v(n)}{v(n)v(n+1)}$, je-li $v(n)v(n+1) \neq 0$

**Důkaz:**

1. $\Delta\,[u(n) \pm v(n)] = [u(n+1) \pm v(n+1)] - [u(n) \pm v(n)] = [u(n+1) - u(n)] \pm [v(n+1) - v(n)] = \Delta u(n) \pm \Delta v(n)$

2. $\Delta[c \cdot u(n)] = cu(n+1) - cu(n) = c[u(n+1) - u(n)] = c\Delta u(n)$

3. $\Delta[u(n)v(n)] = u(n+1)v(n+1) - u(n)v(n) = u(n+1)v(n+1) - u(n+1)v(n) + v(n)u(n+1) - u(n)v(n) = v(n)[u(n+1) - u(n)] + u(n+1)[v(n+1) - v(n)] = v(n)\Delta u(n) + u(n+1)\Delta v(n)$
   Podobně bychom dokázali druhou rovnost.

4. Nechť $v(n)v(n+1) \neq 0$
   $\Delta[\frac{u(n)}{v(n)}] = \frac{u(n+1)}{v(n+1)} - \frac{u(n)}{v(n)} = \frac{v(n)u(n+1) - u(n)v(n+1)}{v(n)v(n+1)} =$
   $= \frac{v(n)u(n+1) - v(n)u(n) - u(n)v(n+1) + u(n)v(n)}{v(n)v(n+1)} =$
   $= \frac{v(n)[u(n+1) - u(n)] - u(n)[v(n+1) - v(n)]}{v(n)v(n+1)} = \frac{v(n)\Delta u(n) - u(n)\Delta v(n)}{v(n)v(n+1)}$

Obdobné vlastnosti, které jsme uvedli ve Větě 2.10 platí i pro počítání s derivacemi. Za povšimnutí stojí tzv. *posuny* (viz vlastnost 3. a 4.), které se ve spojitém případě neobjevují. Tyto posuny rovněž způsobují jisté odlišnosti mezi diskrétním a spojitým případem. Ale pozor: v diferenciálním počtu platí vzorec pro derivaci složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

v diferenčním počtu však žádná analogie k tomuto vzorci neexistuje!

V dalším textu vyslovíme věty, které jsou opět diskrétními analogiemi známých vět z diferenciálního počtu. Pro tuto práci však zmíněné věty nejsou stěžejními, proto je zde nebudeme dokazovat. Zájemce o hlubší proniknutí do nastíněné problematiky odkážeme např. na knihu [2]. Čtenář seznámený s diferenciálním počtem se případně může pokusit o samostatný důkaz těchto tvrzení.

Nejprve stručně vysvětlíme některé pojmy, které budou použity:

- Budeme používat následující označení: $\mathbf{N}(a) = \{a, a+1, ...\}$; $\mathbf{N}(a,b) = \{a, a+1, ..., b\}$, kde $a < b < \infty$ a $a, b \in \mathbf{N}$.

- Nechť posloupnost $u(n)$ je definována na $\mathbf{N}(a,b)$. Pak $n$ se nazývá *uzel posloupnosti* $u(n)$, jestliže je splněna aspoň jedna z podmínek:
  $\star$ pro $n = a$ platí $u(n) = 0$
  $\star$ pro $a < n \leq b$ platí $u(n) = 0$ nebo $u(n-1)u(n) < 0$.

**Věta 2.11:** *(Diskrétní Rolleova věta)*
Nechť posloupnost $u(n)$ definovaná na $\mathbf{N}(1,m)$ má $P_m$ uzlů a posloupnost $\Delta u(n)$ na $\mathbf{N}(1, m-1)$ má $Q_m$ uzlů. Pak $Q_m \geq P_m - 1$.

**Věta 2.12:** *(Diskrétní Lagrangeova věta)*
Nechť posloupnost $u(n)$ je definována na $\mathbf{N}(a,b)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbf{N}(a+1, b-1)$ takové, že

$$\Delta u(n_0) \leq \frac{u(b) - u(a)}{b - a} \leq \nabla u(n_0) \;\text{ nebo }\; \Delta u(n_0) \geq \frac{u(b) - u(a)}{b - a} \geq \nabla u(n_0),$$

kde $\nabla u(n_0) := u(n_0) - u(n_0 - 1)$.

**Věta 2.13:** *(Diskrétní l'Hospitalovo pravidlo)*
Nechť $u(n), v(n)$ jsou definovány na $\mathbf{N}(a)$. Dále nechť $v(n) > 0, \Delta v(n) < 0$ a $\lim_{n\to\infty} u(n) = \lim_{n\to\infty} v(n) = 0$ (resp. $v(n) > 0, \Delta v(n) > 0$ a $\lim_{n\to\infty} v(n) = \infty$). Potom platí: jestliže existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta u(n)}{\Delta v(n)}$, pak existuje i limita $\lim_{n\to\infty} \frac{u(n)}{v(n)}$ a obě limity jsou si rovny.

**Příklad 2.14:** Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n}$

*Řešení:* Nejprve bude vhodné provést úpravu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny předpoklady Věty 2.13 a k výpočtu tedy lze použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-2n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0.$$

Čtenář si jistě všiml, že podmínky Věty 2.13 byly splněny již u zadané limity. Kdybychom ovšem použili l'Hospitalovo pravidlo už na tomto místě, dostali bychom však opět výraz typu „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Pro výpočet této limity je rovněž možno použít l'Hospitalovo pravidlo známé z diferenciálního počtu (což po formální stránce znamená nahradit diference derivacemi). Čtenáři obeznámenému s touto problematikou doporučujeme provést příslušný výpočet, čímž si ověří, že výsledek vyjde v obou případech stejně.

## 2.2 Diference některých elementárních posloupností

Nyní si odvodíme vzorce pro diference nejběžnějších posloupností, které se nám budou hodit pro praktické počítání.

Dohodněme se ještě, že polynom stupně $k$ nad přirozenými čísly budeme značit

$$P_k(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k = \sum_{j=0}^{k} a_j n^j,$$

kde $a_k \neq 0$. Nenulovou konstantu přitom budeme chápat jako polynom nultého stupně ($P_0(n) = a_0, a_0 \neq 0$).

**Věta 2.15:** Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí:

1. $\Delta c = 0$, kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta
2. $\Delta n^k = P_{k-1}(n)$, kde $k \in \mathbf{N}$ a $P_{k-1}(n)$ je jistý polynom stupně $k-1$
3. $\Delta q^n = q^n(q-1)$, kde $q \in \mathbf{R}$
4. $\Delta \sin \alpha n = (\cos\alpha - 1)\sin\alpha n + \sin\alpha\cos\alpha n$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta
5. $\Delta \cos \alpha n = (\cos\alpha - 1)\cos\alpha n - \sin\alpha\sin\alpha n$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta

**Důkaz:**

1. $\Delta c = c - c = 0$
2. $\Delta n^k = (n+1)^k - n^k = n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + ... + \binom{k}{k-1}n + 1 - n^k =$ $= kn^{k-1} + \frac{1}{2}k(k-1)n^{k-2} + ... + kn + 1 = P_{k-1}(n)$
3. $\Delta q^n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$
4. $\Delta \sin\alpha n = \sin(\alpha n + \alpha) - \sin\alpha n = \sin\alpha n\cos\alpha + \cos\alpha n\sin\alpha - \sin\alpha n =$ $(\cos\alpha - 1)\sin\alpha n + \sin\alpha\cos\alpha n$
5. $\Delta \cos\alpha n = \cos(\alpha n + \alpha) - \cos\alpha n = \cos\alpha n\cos\alpha - \sin\alpha n\sin\alpha - \cos\alpha n =$ $(\cos\alpha - 1)\cos\alpha n - \sin\alpha\sin\alpha n$

**Důsledek 2.16:** Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí:

1. $\Delta P_k(n) = Q_{k-1}(n)$, kde $Q_{k-1}(n)$ je jistý polynom stupně $k-1$
2. pro $q \in \mathbf{R} - \{1\}$ je $\Delta[P_k(n)q^n] = Q_k(n)q^n$, kde $Q_k(n)$ je jistý polynom stupně $k$

**Důkaz:**

1. $\Delta P_k(n) = \Delta \sum_{j=0}^{k} a_j n^j$. Podle Vět 2.10.1 a 2.10.2 platí: $\Delta \sum_{j=0}^{k} a_j n^j = \sum_{j=0}^{k} a_j \Delta n^j = \sum_{j=0}^{k} a_j R_{j-1}(n)$ (viz Věta 2.15.2). Protože výsledný koeficient u mocniny $n^{k-1}$ je nenulový, platí:$\sum_{j=0}^{k} a_j R_{j-1}(n) = Q_{k-1}(n)$.

2. Podle Věty 2.10.3 platí: $\Delta[P_k(n)q^n] = q^n \Delta P_k(n) + P_k(n+1)\Delta q^n = q^n R_{k-1}(n) + \sum_{j=0}^{k} a_j (n+1)^j q^n (q-1)$ (viz Důsledek 2.16.1 a Věta 2.15.3). Tedy $\Delta[P_k(n)q^n] = q^n[R_{k-1}(n) + (q-1)\sum_{j=0}^{k} a_j (n+1)^j]$. Koeficient u nejvyšší mocniny $n$, tj. $n^k$, je $a_k(q-1)$ a ten je nenulový, neboť podle předpokladu $q \neq 1$. Výraz v závorce je tudíž jistý polynom stupně $n$ a důkaz je tím hotov.

Podobných vzorců jako v Důsledku 2.16 bychom mohli uvést více, ale nebylo by to účelné. Vypočtěme raději příklad, který nás přesvědčí, že patřičné výpočty můžeme provádět i bez znalosti zmíněných vzorců.

**Příklad 2.17:** Vypočtěte diferenci posloupnosti $u(n) = 2(n^2+1)\cos\frac{\pi}{3}n$.

*Řešení:* Nejprve využijeme vztahu pro diferenci součinu, dále pak vlastností uvedených ve Větě 2.15.

$$\begin{aligned}
\Delta u(n) &= \Delta\left[2(n^2+1)\cos\frac{\pi}{3}n\right] = 2\cdot\Delta\left(n^2+1\right)\cos\frac{\pi}{3}n + \\
&+ 2\left[(n+1)^2+1\right]\Delta\cos\frac{\pi}{3}n = 2\left[(n+1)^2+1-(n^2+1)\right]\cos\frac{\pi}{3}n + \\
&+ 2\left[n^2+2n+2\right]\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}-1\right)\cos\frac{\pi}{3}n - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}n\right] = \\
&= 2\,(2n+1)\cos\frac{\pi}{3}n + 2\left(n^2+2n+2\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}n\right) = \\
&= \left[4n+2-\left(n^2+2n+2\right)\right]\cos\frac{\pi}{3}n - \sqrt{3}\left(n^2+2n+2\right)\sin\frac{\pi}{3}n = \\
&= -\left(n^2-2n\right)\cos\frac{\pi}{3}n - \sqrt{3}\left(n^2+2n+2\right)\sin\frac{\pi}{3}n.
\end{aligned}$$

V diferenčním počtu je někdy vhodné pracovat s tzv. *zobecněnými mocninami*, se kterými se nyní seznámíme.

**Definice 2.18:** Nechť $n,\, k \in \mathbf{N}$. *Zobecněnou mocninu* značíme $n^{(k)}$ a definujeme vzorcem

$$n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1).$$

Pokud čtenář zná základy diferenciálního počtu, ví, že pro derivaci mocniny platí $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$. Vidíme, že tento vzorec a vzorec pro diferenci mocniny $n^k$ uvedený ve Větě 2.15.2 se sobě příliš nepodobají. Ukážeme, že právě diference zobecněné mocniny je analogií k derivaci mocniny.

**Věta 2.19:** Nechť $n,\, k \in \mathbf{N}$. Pak pro diferenci zobecněné mocniny platí:

$$\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)}.$$

**Důkaz:** $\Delta n^{(k)} = (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = (n+1)n(n-1)...(n-k+2) -$
$-n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1) = [(n+1)-(n-k+1)]n(n-1)...(n-k+2) =$
$= kn^{(k-1)}$.

Výhodu zobecněných mocnin doceníme hned v následující podkapitole, kdy uvedeme příklad, ve kterém nám jejich znalost výrazně usnadní výpočet.

## 2.3 Diference vyšších řádů

Nechť $u(n)$ a $v(n)$ jsou posloupnosti, pro něž platí $\Delta u(n) = v(n)$. Počítejme

$$\Delta v(n) = \Delta[\Delta u(n)] = \Delta[u(n+1) - u(n)] = \Delta u(n+1) - \Delta u(n) =$$

$$= u(n+2) - u(n+1) - [u(n+1) - u(n)] = u(n+2) - 2u(n+1) + u(n).$$

Posloupnost $\Delta v(n) = \Delta[\Delta u(n)]$ nazveme *druhou diferencí posloupnosti* $u(n)$ a označíme $\Delta^2 u(n)$. Ihned vidíme, že k tomu, abychom mohli určit hodnotu druhé diference posloupnosti $u(n)$ v bodě $n_0 \in \mathbf{N}$, musíme znát její hodnoty v bodech $n_0, n_0+1, n_0+2$.

Podobně můžeme uvažovat dále, což nás vede k vyslovení rekurentní definice $k-$té diference.

**Definice 2.20:** Nechť $n$, $k \in \mathbf{N}$ a $u(n)$ je posloupnost. Položme

$$\begin{aligned} \Delta^0 u(n) &= u(n), \\ \Delta^1 u(n) &= \Delta u(n). \end{aligned}$$

Potom *k-tou diferenci posloupnosti* $u(n)$ značíme $\Delta^k u(n)$ a definujeme ji rekurentně vzorcem

$$\Delta^k u(n) = \Delta[\Delta^{k-1} u(n)].$$

Pro $k = 1$ místo první diference říkáme jen diference. Pro $k > 1$ kromě termínu $k-$tá diference říkáme též *diference $k-$tého řádu* nebo souhrnně hovoříme o *diferencích vyšších řádů.*

Nechť $u(n)$ je posloupnost. Její $k-$tá diference je opět posloupností. Jestliže do této posloupnosti dosadíme za $n$ dané přirozené číslo $n_0$, dostaneme „$k-$tou diferenci posloupnosti $u(n)$ v bodě $n_0$“, což je určitá hodnota této posloupnosti (určité číslo). V tomto případě budeme psát $\Delta^k u(n_0)$.

**Věta 2.21:** Nechť $n$, $k \in \mathbf{N}$ a $u(n)$ je posloupnost. Pak

$$\begin{aligned} \Delta^k u(n) &= u(n+k) - \binom{k}{1} u(n+k-1) + \binom{k}{2} u(n+k-2) - \\ &- \cdots + (-1)^k u(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} u(n+j). \end{aligned}$$

**Důkaz:** Provedeme úplnou matematickou indukcí:

1. $k = 1: \Delta^1 u(n) = u(n+1) + (-1)^1 u(n) = u(n+1) - u(n) = \Delta u(n)$, tedy pro $k = 1$ vzorec platí.

2. Předpokládejme, že vzorec platí pro jisté $k$ a dokažme jeho platnost i pro $k+1$:
$\Delta^{k+1} u(n) = \Delta[\Delta^k u(n)] = [u(n+k+1) - \binom{k}{1} u(n+k) + \binom{k}{2} u(n+k-1) - ... +$
$+ (-1)^j \binom{k}{j} u(n+k+1-j) + ... + (-1)^k u(n+1)] - [u(n+k) -$
$- \binom{k}{1} u(n+k-1) + ... + (-1)^j \binom{k}{j} u(n+k-j) + ... + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} u(n+1) +$
$+ (-1)^k u(n)] = u(n+k+1) - [\binom{k}{1} + 1] u(n+k) + [\binom{k}{2} + \binom{k}{1}] u(n+k-1) -$
$- ... + (-1)^j [\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}] u(n+k+1-j) + ... + (-1)^k [1 + \binom{k}{k-1}] u(n+1) +$
$+ (-1)^{k+1} u(n)$.
Použitím identit $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k}{k}$ a $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dostaneme
$\Delta^{k+1} u(n) = u(n+k+1) - \binom{k+1}{1} u(n+k) + \binom{k+1}{2} u(n+k-1) + ... +$
$+ (-1)^j \binom{k+1}{j} u(n+k+1-j) + ... + (-1)^k \binom{k+1}{k} u(n+1) + (-1)^{k+1} u(n)$,
což jsme měli dokázat.

**Příklad 2.22:** Nalezněte čtvrtou diferenci posloupnosti $u(n) = e^n$ a čtvrtou diferenci této posloupnosti v bodě $n_0 = 2$.

*Řešení:* Využijeme Větu 2.21:

$$\begin{aligned}\Delta^4 u(n) &= \Delta^4 e^n = e^{n+4} - \binom{4}{1} e^{n+3} + \binom{4}{2} e^{n+2} - \binom{4}{3} e^{n+1} + e^n = \\ &= e^n (e^4 - 4e^3 + 6e^2 - 4e + 1).\end{aligned}$$

Dosazením $n_0 = 2$ dostáváme:

$$\Delta^4 u(n_0) = e^2 (e^4 - 4e^3 + 6e^2 - 4e + 1).$$

**Příklad 2.23:** Vypočítejte třetí diferenci polynomu $u(n) = n^5 - 6n^4 + 11n^3 - 4n^2 - 3$.

*Řešení:* I v tomto případě lze použít Větu 2.21:

$$\begin{aligned}\Delta^3 u(n) &= \Delta^3 \left(n^5 - 6n^4 + 11n^3 - 4n^2 - 3\right) = \\ &= (n+3)^5 - 6\,(n+3)^4 + 11\,(n+3)^3 - 4\,(n+3)^2 - 3 - \\ &- \binom{3}{1} \left[(n+2)^5 - 6(n+2)^4 + 11(n+2)^3 - 4(n+2)^2 - 3\right] + \\ &+ \binom{3}{2} \left[(n+1)^5 - 6(n+1)^4 + 11(n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 3\right] - \\ &- (n^5 - 6n^4 + 11n^3 - 4n^2 - 3) = \cdots\end{aligned}$$

Vidíme, že pokračování ve výpočtu elementárními algebraickými úpravami by bylo relativně pracné. Postupujme proto rekurentně přímo podle Definice 2.20. Zapišme zadaný polynom pomocí zobecněných mocnin. To provedeme postupným dělením $n, (n-1), ..., (n-4)$, což pomocí Hornerova schematu zapisujeme následujícím způsobem:

| | 1 | -6 | 11 | -4 | 0 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -5 | 6 | 2 | 2 | |
| 2 | 1 | -3 | 0 | 2 | | |
| 3 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 4 | 1 | 4 | | | | |

Tedy:

$$u(n) = n^5 - 6n^4 + 11n^3 - 4n^2 - 3 = n^{(5)} + 4n^{(4)} + 2n^{(2)} + 2n - 3.$$

Podle Vět 2.10.1, 2.10.2 a 2.19 platí:

$$\begin{aligned}\Delta u(n) &= \Delta \left(n^{(5)} + 4n^{(4)} + 2n^{(2)} + 2n - 3\right) = 5n^{(4)} + 16n^{(3)} + 4n + 2, \\ \Delta^2 u(n) &= \Delta\left[\Delta u(n)\right] = \Delta \left(5n^{(4)} + 16n^{(3)} + 4n + 2\right) = 20n^{(3)} + 48n^{(2)} + 4, \\ \Delta^3 u(n) &= \Delta\left[\Delta^2 u(n)\right] = \Delta \left(20n^{(3)} + 48n^{(2)} + 4\right) = 60n^{(2)} + 96n = \\ &= 60n(n-1) + 96n = 60n^2 + 36n.\end{aligned}$$

Vypočetli jsme:

$$\Delta^3 (n^5 - 6n^4 + 11n^3 - 4n^2 - 3) = 60n^2 + 36n.$$

**Věta 2.24:** Pro $j = 1, 2, ..., k$ je

$$\Delta^j P_k(n) = Q_{k-j}(n),$$

kde $Q_{k-j}(n)$ je jistý polynom stupně $k-j$.
Speciálně:

$$\Delta^k P_k(n) = c \neq 0,$$

kde $c$ je jistá konstanta a tudíž

$$\Delta^{k+1} P_k(n) = 0.$$

**Důkaz:** Zřejmé, plyne z Důsledku 2.16.1.

## 2.4 Úlohy na procvičení

**Úloha 2.25:** Vypočtěte $\Delta u(n)$ a $\Delta u(n_0)$, je-li:

1. $u(n) = \frac{1}{n^2}, \;\; n_0 = 2$

$$\left[\Delta u(n) = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}, \; \Delta u(2) = -\frac{5}{36}\right]$$

2. $u(n) = \sin\frac{\pi}{3}n, \;\; n_0 = 5$

$$\left[\Delta u(n) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}n, \; \Delta u(5) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

**Úloha 2.26:** Spočtěte $\Delta u(n)$, je-li:

1. $u(n) = \frac{2^n}{n^2-1}$

$$\left[\frac{2^n(n^2-2n-2)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\right]$$

2. $u(n) = 3^n \cos\frac{\pi}{3}n$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot 3^n(\cos\frac{\pi}{3}n - 3\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}n)\right]$$

3. $u(n) = (3n^2 - 2n - 4)2^n$

$$[(3n^2 + 10n - 2)2^n]$$

4. $u(n) = \binom{n}{k}$, kde $k \in \mathbf{N}$

$$\left[\binom{n}{k-1}\right]$$

**Úloha 2.27:** Vypočtěte $\Delta^k u(n)$, je-li:

1. $u(n) = n^2 \cdot 3^n, \;\; k = 3$

$$[8(n^2 + 9n + 18)3^n]$$

2. $u(n) = n^5 - 4n^4 + 2n^3 - n^2 + 3n + 1, \;\; k = 4$

$$[120n + 144]$$

**Úloha 2.28:** Najděte posloupnost, která má stejnou diferenci jako funkce $f(x)$ definovaná na množině $\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, ...\}$, je-li:

1. $f(x) = 36x^2 + 15x + 1, \;\; x_0 = \frac{1}{4}, \;\; h = \frac{1}{3}$

$$[g(n) = 4n^2 + 3n]$$

2. $f(x) = 64x^3 + 144x^2 + 108x + 30, \;\; x_0 = -\frac{1}{2}, \;\; h = \frac{1}{4}$

$$[g(n) = n^3 + 3]$$

**Úloha 2.29:** Určete přímo z definice derivace $f'(x)$, je-li:

1. $f(x) = x^2$

$$[2x]$$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$[-\frac{1}{x^2}]$$

# 3 Základy sumačního počtu

Doposud jsme znali posloupnost a počítali jsme její diferenci, nyní stojíme před úlohou opačnou. Budeme znát diferenci a budeme hledat posloupnost, kterou jsme diferencovali. Hledanou posloupnost nazveme *sumací* dané posloupnosti a budeme se zabývat jejími vlastnostmi.

Tak jako v předešlé kapitole jsme si všímali některých analogií mezi diferenčním a diferenciálním počtem, rovněž v této kapitole poukážeme na podobu mezi sumačním a integrálním počtem.

## 3.1 Pojem a vlastnosti sumace

**Definice 3.1:** Nechť $u(n)$ a $U(n)$ jsou posloupnosti takové, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $\Delta U(n) = u(n)$. Posloupnost $U(n)$ nazýváme *sumací posloupnosti* $u(n)$ a značíme

$$U(n) = \sum u(n).$$

**Věta 3.2:** Nechť $u(n)$ je posloupnost. Pak platí:

$$\Delta u(n) = 0 \;\Leftrightarrow\; u(n) = c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

**Důkaz:**
„$\Leftarrow$“ Platí podle Věty 2.15.1.
„$\Rightarrow$“ $\Delta u(n) = 0 \Rightarrow u(n+1) - u(n) = 0 \Rightarrow$ pro $\forall n \in \mathbf{N}$ platí $u(n) = u(n+1)$. Tuto vlastnost má libovolná konstanta.

**Věta 3.3:** Nechť $u(n)$ a $v(n)$ jsou posloupnosti. Potom

$$\Delta u(n) = \Delta v(n) \text{ pro } \forall n \in \mathbf{N} \;\Leftrightarrow\; u(n) = v(n) + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta. Neboli, $u(n)$ a $v(n)$ jsou sumacemi téže posloupnosti právě tehdy, když se liší o aditivní konstantu.

**Důkaz:**
„$\Leftarrow$“ $u(n) = v(n) + c \Rightarrow \Delta u(n) = \Delta[v(n) + c] = \Delta v(n) + \Delta c = \Delta v(n)$.
„$\Rightarrow$“ $\Delta u(n) = \Delta v(n) \Rightarrow \Delta u(n) - \Delta v(n) = 0 \Rightarrow \Delta[u(n) - v(n)] = 0$, což podle Věty 3.2 znamená, že $u(n) - v(n) = c$, tedy $u(n) = v(n) + c$.

**Poznámka 3.4:** Z Věty 3.3 vyplývá, že je-li $U(n)$ sumací $u(n)$, pak existuje nekonečně mnoho posloupností $y(n)$, které jsou sumacemi $u(n)$ a každou z nich lze vyjádřit ve tvaru

$$y(n) = \sum u(n) = U(n) + c,$$

kde $c$ je vhodná konstanta. Je-li navíc dána dvojice $\{n_0, y(n_0)\}$ (tzv.počáteční podmínka), pak je konstanta $c$ (a tím i sumace $y(n)$) určena jednoznačně.

Podobně jako pojem sumace se v integrálním počtu definuje tzv. *primitivní funkce*, která má rovněž vlastnosti podobné těm, které byly popsány ve Větě 3.3.

**Příklad 3.5:** Rozhodněte, zda posloupnosti $U(n) = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n$ a $V(n) = \sin^2\frac{\pi}{6}n$ jsou sumacemi téže posloupnosti.

*Řešení:*
<u>1. způsob:</u> Postupujme podle Definice 3.1, tzn. hledejme posloupnosti $u(n)$ a $v(n)$, jejichž sumacemi jsou $U(n)$ a $V(n)$ :

$$\begin{aligned}
u(n) &= \Delta U(n) = \Delta\left[-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n\right] = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}n\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}-1\right)\cos\frac{\pi}{3}n-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}n\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}n\right) = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}n+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\pi}{3}n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(n) &= \Delta V(n) = \Delta\sin^2\frac{\pi}{6}n = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\frac{\pi}{6}n = \\
&= \left(\sin\frac{\pi}{6}n\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}n\sin\frac{\pi}{6}\right)^2-\sin^2\frac{\pi}{6}n = \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{6}n+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}n\right)^2-\sin^2\frac{\pi}{6}n = \\
&= \frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}n+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{6}n\cos\frac{\pi}{6}n+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{6}n-\sin^2\frac{\pi}{6}n = \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{6}n-\sin^2\frac{\pi}{6}n\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{6}n\cos\frac{\pi}{6}n = \\
&= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}n+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\pi}{3}n.
\end{aligned}$$

Vypočetli jsme, že posloupnosti $U(n)$ a $V(n)$ jsou sumacemi téže posloupnosti a to:

$$u(n) = v(n) = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}n+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\pi}{3}n.$$

<u>2. způsob:</u> Využijme Větu 3.3, tzn. počítejme rozdíl $U(n)-V(n)$ :

$$\begin{aligned}
U(n)-V(n) &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n-\sin^2\frac{\pi}{6}n = -\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{6}n-\sin^2\frac{\pi}{6}n\right)-\sin^2\frac{\pi}{6}n = \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{6}n\right)-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}n = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že posloupnosti $U(n)$ a $V(n)$ se liší o konstantu, což znamená, že jsou sumacemi téže posloupnosti. Tento výpočet je sice kratší, nenalezli jsme však posloupnost, jejimiž sumacemi jsou $U(n)$ a $V(n)$.

**Věta 3.6:** Nechť $u(n), v(n)$ jsou posloupnosti. Pak platí:

1. $\sum[u(n)\pm v(n)] = \sum u(n) \pm \sum v(n)$
2. $\sum[cu(n)] = c\sum u(n)$, kde $c\in\mathbf{R}$ je libovolná konstanta
3. $\sum[u(n)\Delta v(n)] = u(n)v(n) - \sum[v(n+1)\Delta u(n)]$ /tzv. sumace per partes/

**Důkaz:** Označme

$$\begin{aligned}
\sum u(n) &= U(n) \quad \text{tj.} \quad u(n) = \Delta U(n), \\
\sum v(n) &= V(n) \quad \text{tj.} \quad v(n) = \Delta V(n).
\end{aligned}$$

1. Potřebujeme dokázat, že $\sum[u(n)\pm v(n)] = U(n)\pm V(n)$, tj., že $u(n)\pm v(n) = \Delta[U(n)\pm V(n)]$. To ovšem platí podle Věty 2.10.1.
2. Potřebujeme dokázat, že $\sum[cu(n)] = cU(n)$, tj., že $cu(n) = \Delta[cU(n)]$. To však platí podle Věty 2.10.2.

3. Podle Věty 2.10.3 platí: $\Delta[u(n)v(n)] = u(n)\Delta v(n) + v(n+1)\Delta u(n)$. Proveďme sumaci a s využitím části 1 této Věty upravme:

$$\begin{aligned} \sum \Delta[u(n)v(n)] &= \sum [u(n)\Delta v(n) + v(n+1)\Delta u(n)] \\ u(n)v(n) &= \sum [u(n)\Delta v(n)] + \sum [v(n+1)\Delta u(n)] \\ \sum [u(n)\Delta v(n)] &= u(n)v(n) - \sum [v(n+1)\Delta u(n)] \end{aligned}$$

## 3.2 Sumace některých elementárních posloupností

**Věta 3.7:** Nechť je dán polynom $P_k(n) = \sum_{j=0}^{k} a_j n^j$. Potom existuje polynom $Q_{k+1}(n)$ takový, že

$$\Delta Q_{k+1}(n) = P_k(n),$$

tj.

$$\sum P_k(n) = Q_{k+1}(n).$$

**Důkaz:** Hledejme koeficienty $b_j$ polynomu $Q_{k+1}(n) = \sum_{j=0}^{k+1} b_j n^j$, kde má být $b_{k+1} \neq 0$ :

$$\Delta Q_{k+1}(n) = \sum_{j=0}^{k+1} b_j (n+1)^j - \sum_{j=0}^{k+1} b_j n^j = \sum_{j=0}^{k+1} b_j [(n+1)^j - n^j].$$

Podle binomické věty platí:

$$\Delta Q_{k+1}(n) = \sum_{j=0}^{k+1} b_j \left[ \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} n^i - n^j \right].$$

Vidíme, že se „zruší“ mocniny $n^j$ a také „vypadne“ $b_0$, tedy:

$$\Delta Q_{k+1}(n) = \sum_{j=1}^{k+1} b_j \left[ \binom{j}{1} n^{j-1} + \binom{j}{2} n^{j-2} + \cdots + \binom{j}{j} n^0 \right].$$

Polynom $\Delta Q_{k+1}(n)$ se má identicky rovnat danému polynomu $P_k(n)$. Hledané hodnoty $b_j$ určíme porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin $n^j$, kde $j = 0, 1, ..., k$ :

$n^k$ : $\binom{k+1}{1} b_{k+1} = a_k$, odtud vypočteme $b_{k+1}$.

$n^{k-1}$ : $\binom{k+1}{2} b_{k+1} + \binom{k}{1} b_k = a_{k-1}$, odtud vypočteme $b_k$, atd.

$\vdots$

$n^0$ : $b_{k+1} + b_k + ... + b_1 = a_0$, odtud vypočteme $b_1$

Snadno nahlédneme, že hodnoty $b_{k+1}, b_k, ..., b_1$ jsou určeny jednoznačně. Navíc $b_{k+1} \neq 0$, neboť $a_k \neq 0$ ($P_k(n)$ je polynom $k-$tého stupně), což jsme měli dokázat. Polynom $Q_{k+1}(n)$ je tedy skutečně $(k+1)-$tého stupně. Číslo $b_0$ je však libovolné, protože se nevyskytuje v žádné rovnici. To nás ale nepřekvapuje, protože podle Poznámky 3.4 víme, že hledaných polynomů $Q_{k+1}(n) = \sum P_k(n)$ existuje nekonečně mnoho a vzájemně se liší o aditivní konstantu, tj. o absolutní člen $b_0$. Tímto je věta dokázána.

Dodejme ještě, že právě dokončený důkaz je konstruktivní, tzn. při řešení konkrétních úloh postupujeme popsaným způsobem - tzv. *metodou neurčitých koeficientů.*

Čtenář už jistě tuší, že nyní se jako o analogii integrálu mocniny zmíníme o sumaci zobecněné mocniny.

**Věta 3.8:** Nechť $n,\ k \in \mathbf{N}$. Pak pro sumaci zobecněné mocniny platí:

$$\sum n^{(k)} = \frac{1}{k+1} n^{(k+1)} + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

**Důkaz:** $\Delta[\frac{1}{k+1} n^{(k+1)} + c] = \frac{1}{k+1} \Delta n^{(k+1)} + \Delta c = \frac{1}{k+1}(k+1) n^{(k)} = n^{(k)}$.

Analogicky ke vzorcům pro diference platí vzorce pro sumace.

**Věta 3.9:** Nechť $c,\ c^* \in \mathbf{R}$ jsou libovolné konstanty. Pak pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí:

1. $\sum c = cn + c^*$
2. $\sum q^n = \frac{1}{q-1} q^n + c$, kde $q \in \mathbf{R} - \{1\}$

**Důkaz:**

1. $\Delta(cn + c^*) = c\Delta n + \Delta c^* = c(n+1-n) = c$
2. $\Delta(\frac{1}{q-1} q^n + c) = \frac{1}{q-1} \Delta q^n + \Delta c = \frac{1}{q-1} q^n (q-1) = q^n$

**Poznámka 3.10:** Pro sumace goniometrických funkcí platí:

$$\begin{aligned} \sum \sin \alpha n &= a \sin \alpha n + b \cos \alpha n + c, \\ \sum \cos \alpha n &= a^* \sin \alpha n + b^* \cos \alpha n + c, \end{aligned}$$

kde $a, b$ (resp.$a^*, b^*$) jsou jisté konstanty. O platnosti těchto vzorců se můžeme přesvědčit výpočtem diference pravých stran. Následným porovnáním koeficientů bychom nalezli i konkrétní vyjádření zmíněných konstant. Toto vyjádření je však příliš komplikované na to, aby mělo význam pro praktické počítání, a proto je neuvádíme.

Poznamenejme rovněž, že uvedené vzorce lze odvodit pomocí sumace

$$\sum e^{in\alpha} = \sum (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

s využitím vlastností komplexních čísel (Moivreova věta). Tento postup lze nalézt např. ve skriptech [5].

**Příklad 3.11:** Určete největší možný počet $v(n)$ oblastí, na které lze prostor rozdělit pomocí $n$ rovin.

*Řešení:* Tento příklad je zobecněním Příkladu 1.1, kterým jsme se zabývali v úvodní kapitole. Podobnými úvahami odvodíme rekurentní závislost, pomocí které provedeme vlastní výpočet.

Mějme $n$ rovin $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ v obecné poloze, tj. žádné tři nejsou rovnoběžné s touž přímkou a žádné čtyři nemají společný bod. V termínech lineární algebry a geometrie to znamená, že normálové vektory libovolné trojice různých rovin jsou lineárně nezávislé, a že žádné tři z těchto rovin nepatří do téhož *svazku* a žádné čtyři z těchto rovin nepatří do téhož *trsu* (viz skripta [7] a [8]). Těmito rovinami je prostor rozdělen právě na $v(n)$ oblastí. Přidejme rovinu $\alpha_{n+1}$ tak, aby všech $n+1$ rovin bylo opět v obecné poloze, tzn., že průsečnice roviny $\alpha_{n+1}$ s rovinami $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tvoří v rovině $\alpha_{n+1}$ systém právě $n$ přímek v obecné poloze. Podle Příkladu 1.1 víme, že rovina $\alpha_{n+1}$ je zmíněnými průsečnicemi rozdělena na $u(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ oblastí. Každá z těchto oblastí dělí jednu z původních částí prostoru na dvě „nové“. Právě o $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ tedy vzrostl počet částí prostoru přidáním roviny $\alpha_{n+1}$. Ovšem prostor je rovinami $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ rozdělen na $v(n+1)$ oblastí. Tímto jsme odvodili vztah:

$$v(n+1) = v(n) + \frac{1}{2}(n^2 + n + 2),$$

tj.

$$\Delta v(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2),$$

přičemž je zřejmě $v(1) = 2$. Hledáme tedy sumaci posloupnosti $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ s počáteční podmínkou $v(1) = 2$.

1. způsob: Budeme postupovat podle Věty 3.7 - metodou neurčitých koeficientů (tímto způsobem jsme řešili i Příklad 1.1):

$$v(n) = b_1 n^3 + b_2 n^2 + b_3 n + b_4,$$

kde $b_1, ..., b_4$ jsou konstanty, které musíme určit.

$$\Delta v(n) = b_1(n+1)^3 + b_2(n+1)^2 + b_3(n+1) + b_4 - (b_1 n^3 + b_2 n^2 + b_3 n + b_4),$$

po úpravě:

$$\Delta v(n) = 3b_1 n^2 + (3b_1 + 2b_2)n + b_1 + b_2 + b_3.$$

Identicky má platit:

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = 3b_1 n^2 + (3b_1 + 2b_2)n + b_1 + b_2 + b_3.$$

Porovnáním koeficientů:

$$\begin{array}{lll} n^2: & 3b_1 = \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{6} \\ n^1: & 3b_1 + 2b_2 = \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad b_2 = 0 \\ n^0: & b_1 + b_2 + b_3 = 1 & \Rightarrow \quad b_3 = \frac{5}{6} \end{array}$$

Poslední konstantu získáme pomocí počáteční podmínky:

$$v(1) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad b_4 = 1.$$

Vypočetli jsme:

$$v(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

2.způsob: Budeme postupovat podle Věty 3.8 - s využitím zobecněných mocnin. Postupným dělením $n$ a $n-1$ přepíšeme sumovaný polynom pomocí zobecněných mocnin, což dle Hornerova schematu zapíšeme:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | |

Tedy:

$$\Delta v(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = \frac{1}{2}n^{(2)} + n + 1.$$

Počítejme:

$$\begin{aligned} v(n) &= \sum \left(\frac{1}{2}n^{(2)} + n + 1\right) = \frac{1}{2}\sum n^{(2)} + \sum n + \sum 1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{1}{2}n^{(2)} + n + c = \frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-2) + \frac{1}{2}n\,(n-1) + n + c = \\ &= \frac{1}{6}\left(n^3 - 3n^2 + 2n\right) + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) + n + c = \frac{1}{6}\left(n^3 + 5n\right) + c. \end{aligned}$$

Konstantu $c$ určíme z počáteční podmínky:

$$v(1) = \frac{1}{6}(1+5) + c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Vypočetli jsme:

$$v(n) = \frac{1}{6}\left(n^3 + 5n + 6\right).$$

Závěr: Prostor může být pomocí $n$ rovin rozdělen nejvýše na $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ oblastí.

Poznamenejme, že pokud se chceme přesvědčit o správnosti výpočtu, ve kterém jsme hledali sumaci nějaké posloupnosti, snadno můžeme provést zkoušku, aplikujeme-li na obdržený výsledek vzorce pro diference uvedené v předchozí kapitole. To však již ponecháme na čtenáři.

**Věta 3.12:** Nechť je dána posloupnost $P_k(n)q^n$, kde $q \neq 1$. Potom existuje právě jeden polynom $Q_k(n)$ takový, že platí:

$$\Delta[Q_k(n)q^n] = P_k(n)q^n,$$

tj.

$$\sum[P_k(n)q^n] = Q_k(n)q^n + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

**Důkaz:** Je zcela analogický jako důkaz Věty 3.7, proto naznačíme jen jeho postup a nebudeme jej detailně provádět.

Hledejme koeficienty $b_j$ polynomu $Q_k(n) = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j$, kde musíme ukázat, že $b_k \neq 0$.

$$\Delta[Q_k(n)q^n] = \Delta[q^n \textstyle\sum_{j=0}^{k} b_j n^j] = q^{n+1} \sum_{j=0}^{k} b_j(n+1)^j - q^n \sum_{j=0}^{k} b_j n^j =$$
$$= q^n \textstyle\sum_{j=0}^{k}[q b_j(n+1)^j - b_j n^j].$$

Hodnoty $b_j$ určíme porovnáním koeficientů z identity:

$$q^n \textstyle\sum_{j=0}^{k}[q b_j(n+1)^j - b_j n^j] = q^n P_k(n).$$

Odtud rozepsáním zjistíme, že $b_k \neq 0$, a že hodnoty $b_k, b_{k-1}, ..., b_0$ jsou určeny jednoznačně. Poslední část tvrzení plyne z Poznámky 3.4.

**Příklad 3.13:** Nalezněte všechny posloupnosti $y(n)$, pro které platí $y(n) = \sum[5^n(8n^2 + 8n - 1) + 2^n]$.

*Řešení:*

$$y(n) = \sum\left[5^n(8n^2 + 8n - 1) + 2^n\right] = \sum\left[5^n(8n^2 + 8n - 1)\right] + \sum 2^n.$$

Označme:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \sum\left[5^n(8n^2 + 8n - 1)\right], \\ y_2(n) &= \sum 2^n. \end{aligned}$$

Podle Věty 3.12 platí:

$$y_1(n) = 5^n(b_1 n^2 + b_2 n + b_3) + c_1,$$

kde $b_1, b_2, b_3$ jsou hledané konstanty a $c_1 \in \mathbf{R}$ je libovolné.

$$\begin{aligned} \Delta y_1(n) &= 5^{n+1}[b_1(n+1)^2 + b_2(n+1) + b_3] - 5^n(b_1 n^2 + b_2 n + b_3) = \\ &= 5^n[5(b_1 n^2 + 2b_1 n + b_1 + b_2 n + b_2 + b_3) - b_1 n^2 - b_2 n - b_3 = \\ &= 5^n[4b_1 n^2 + (10b_1 + 4b_2)n + 5b_1 + 5b_2 + 4b_3]. \end{aligned}$$

Tedy:

$$5^n[4b_1n^2 + (10b_1 + 4b_2)n + 5b_1 + 5b_2 + 4b_3] = 5^n(8n^2 + 8n - 1).$$

Porovnáním koeficientů:

$$\begin{aligned} 4b_1 &= 8 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 2, \\ 10b_1 + 4b_2 &= 8 \quad \Rightarrow \quad b_2 = -3, \\ 5b_1 + 5b_2 + 4b_3 &= -1 \quad \Rightarrow \quad b_3 = 1. \end{aligned}$$

Dostali jsme

$$y_1(n) = 5^n(2n^2 - 3n + 1) + c_1.$$

Podle Věty 3.9.2 je

$$y_2(n) = \sum 2^n = \frac{1}{2-1}2^n + c_2 = 2^n + c_2,$$

kde $c_2 \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta. Označíme-li $c = c_1 + c_2$, pak můžeme psát

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = 5^n(2n^2 - 3n + 1) + 2^n + c,$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta.

Poznamenejme ještě, že při hledání posloupnosti $y_1(n)$ jsme mohli rovněž využít sumaci per partes (viz Věta 3.6.3). Provedení tohoto výpočtu však již ponecháme na čtenáři.

## 3.3 Součet n členů posloupnosti

V této kapitole si ukážeme, jak lze pomocí sumace získat vzorce pro součet $n$ členů posloupnosti.

Součet $s(n)$ prvních $n$ členů posloupnosti $u(n)$

$$s(n) = u(1) + u(2) + ... + u(n)$$

se nazývá $n-$*tým částečným součtem* členů posloupnosti $u(n)$. Tyto součty tvoří novou posloupnost - *posloupnost částečných součtů* posloupnosti $u(n)$.

Odvoďme nyní *funkční vzorec* (tj. vzorec, který je elementární funkcí proměnné $n$) posloupnosti $s(n)$. Platí:

$$\begin{aligned} s(n) &= u(1) + u(2) + ... + u(n), \\ s(n+1) &= u(1) + u(2) + ... + u(n) + u(n+1). \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovností dostáváme:

$$s(n+1) - s(n) = \Delta s(n) = u(n+1), \tag{3.1}$$

tj.

$$s(n) = \sum u(n+1). \tag{3.2}$$

Je-li $u(n)$ zadána funkčním vzorcem obsahujícím posloupnosti $c, n^k, q^n, \sin \alpha n$, $\cos \alpha n$ a posloupnosti z nich utvořené součtem nebo součinem, umíme na základě předchozího výkladu tuto úlohu vyřešit.

Označíme-li $U(n+1)$ jednu ze sumací posloupnosti $u(n+1)$, můžeme psát:

$$s(n) = U(n+1) + c,$$

kde $c$ je konstanta určená počáteční podmínkou:

$$s(1) = U(2) + c = u(1).$$

Odtud $c = u(1) - U(2)$, tedy

$$s(n) = U(n+1) + u(1) - U(2).$$

Tímto jsme odvodili větu:

**Věta 3.14:** Nechť posloupnost $u(n)$ je dána funkčním vzorcem. Nechť $U(n+1)$ je jedna ze sumací posloupnosti $u(n+1)$. Pak pro $n-$tý částečný součet posloupnosti $u(n)$ platí:

$$s(n) = U(n+1) + u(1) - U(2).$$

**Příklad 3.15:** Nalezněte funkční vzorec pro $n-$tý částečný součet posloupnosti $u(n) = \sin \frac{\pi}{3}(n-1)$.

*Řešení:* Hledáme

$$s(n) = u(1) + u(2) + ... + u(n).$$

Podle (3.1) platí:

$$\Delta s(n) = \sin \frac{\pi}{3} n.$$

Podle Poznámky 3.10 budeme $s(n)$ hledat ve tvaru:

$$s(n) = a \sin \frac{\pi}{3} n + b \cos \frac{\pi}{3} n + c.$$

S využitím Vět 2.15.4 a 2.15.5 počítejme:

$$\begin{aligned}
\Delta s(n) &= \Delta \left[ a \sin \frac{\pi}{3} n + b \cos \frac{\pi}{3} n + c \right] = a \left[ \sin \left( \frac{\pi}{3} n + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \frac{\pi}{3} n \right] + \\
&+ b \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} n + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \frac{\pi}{3} n \right] = a \left[ \left( \cos \frac{\pi}{3} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{3} n + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} n \right] + \\
&+ b \left[ \left( \cos \frac{\pi}{3} - 1 \right) \cos \frac{\pi}{3} n - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} n \right] = \\
&= a \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} n + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{3} n \right) + b \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} n - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{3} n \right) = \\
&= \left( -\frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2} b \right) \sin \frac{\pi}{3} n + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{2} b \right) \cos \frac{\pi}{3} n.
\end{aligned}$$

Identicky má platit:

$$\left( -\frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2} b \right) \sin \frac{\pi}{3} n + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{2} b \right) \cos \frac{\pi}{3} n = \sin \frac{\pi}{3} n.$$

Porovnáním koeficientů:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2} b &= 1, \\
\frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{2} b &= 0,
\end{aligned}$$

odkud vypočteme, že $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tedy

$$s(n) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} n - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{3} n + c = -\sin \left( \frac{\pi}{3} n + \frac{\pi}{3} \right) + c.$$

Konstantu $c$ určíme z počáteční podmínky $s(1) = u(1)$, tj.:

$$-\sin \frac{2\pi}{3} + c = \sin 0,$$

odkud $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hledané řešení je

$$s(n) = -\sin\frac{\pi}{3}(n+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Příklad 3.16:** Nalezněte vzorec pro součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti.

*Řešení:* Geometrická posloupnost je posloupnost určená rekurentně:

$$u(n+1) = u(n)\cdot q,$$

kde $u(1)$ a $q$ jsou daná čísla.

Nejprve potřebujeme znát funkční vzorec pro geometrickou posloupnost. Podle uvedeného rekurentního vzorce platí:

$$\begin{array}{rcl} u(2) & = & u(1)\cdot q, \\ u(3) & = & u(2)\cdot q \;=\; u(1)\cdot q^2, \\ u(4) & = & u(3)\cdot q \;=\; u(2)\cdot q^3, \\ & \vdots & \\ u(n+1) & = & u(n)\cdot q \;=\; u(1)\cdot q^n. \end{array}$$

Hledáme

$$s(n) = u(1) + u(2) + \dots + u(n).$$

Začněme zvláštním případem, je-li $q = 1$, tzn. $u(1) = u(2) = \dots = u(n)$. Pak zřejmě platí

$$s(n) = n\cdot u(1).$$

Nyní předpokládejme, že $q \neq 1$. Podle (3.2) platí $s(n) = \sum u(n+1)$. Tedy

$$s(n) = \sum [u(1)q^n] = u(1)\sum q^n = u(1)\cdot\frac{1}{q-1}\cdot q^n + c.$$

Konstantu $c$ určíme z počáteční podmínky:

$$s(1) = \frac{u(1)}{q-1}q + c = u(1).$$

Odtud

$$c = -\frac{u(1)}{q-1}.$$

Dostali jsme

$$s(n) = \frac{u(1)}{q-1}(q^n - 1) = u(1)\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Pro součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti platí:

$$\begin{array}{rcl} s(n) & = & u(1)\dfrac{q^n-1}{q-1}, \quad \text{je}-\text{li} \quad q \neq 1, \\ s(n) & = & n\cdot u(1), \quad \text{je}-\text{li} \quad q = 1. \end{array}$$

## 3.4 Určité sumy

**Definice 3.17:** Nechť $u(n)$ je posloupnost. Nechť $a, b$ jsou přirozená čísla, $a \leq b$. Pak *určitou sumou* posloupnosti $u(n)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ rozumíme součet:

$$\sum_{n=a}^{b} u(n) = u(a) + u(a+1) + \dots + u(b-1) + u(b).$$

Definici určité sumy lze rozšířit pro libovolná celá čísla $a, b, a \leq b$, pokud je $u(n)$ definována ve všech bodech množiny $\{a, a+1, ..., b\}$.

Ve spojitém případě je analogií k pojmu určité sumy *určitý integrál*. Pro jeho výpočet platí Newton-Leibnitzův vzorec (v případě, že existuje primitivní funkce $F$ k funkci $f$)

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

jehož diskrétní analogii si právě uvedeme. Všimněme si, že v diskrétním případě se opět objevuje posun.

**Věta 3.18:** Nechť posloupnost $U(n)$ je sumací posloupnosti $u(n)$, tj. $U(n) = \sum u(n)$. Nechť $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $a \leq b$. Pak platí:

$$\sum_{n=a}^{b} u(n) = [U(n)]_a^{b+1} = U(b+1) - U(a).$$

**Důkaz:** $U(n) = \sum u(n)$, tj. $\Delta U(n) = U(n+1) - U(n) = u(n)$. Proto:

$$\begin{aligned} U(a+1) - U(a) &= u(a), \\ U(a+2) - U(a+1) &= u(a+1), \\ &\vdots \\ U(b) - U(b-1) &= u(b-1), \\ U(b+1) - U(b) &= u(b). \end{aligned}$$

Součtem těchto rovností dostaneme:

$$U(b+1) - U(a) = u(a) + u(a+1) + ... + u(b-1) + u(b),$$

což jsme měli dokázat.

Následující věta ukazuje, že určitá suma má tytéž vlastnosti, jaké jsme uvedli pro sumaci ve Větě 3.6.

**Věta 3.19:** Nechť $u(n)$ a $v(n)$ jsou posloupnosti. Nechť $a$, $b \in \mathbf{N}$, $a \leq b$. Pak platí:

1. $\sum_{n=a}^{b}[u(n) \pm v(n)] = \sum_{n=a}^{b} u(n) \pm \sum_{n=a}^{b} v(n)$
2. $\sum_{n=a}^{b}[cu(n)] = c\sum_{n=a}^{b} u(n)$, kde $c \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta
3. $\sum_{n=a}^{b}[u(n)\Delta v(n)] = [u(n)v(n)]_a^{b+1} - \sum_{n=a}^{b}[v(n+1)\Delta u(n)]$ /tzv. sumace per partes pro určité sumy/

**Důkaz:**

1. $\sum_{n=a}^{b}[u(n) \pm v(n)] = u(a) \pm v(a) + u(a+1) \pm v(a+1) + ... + u(b) \pm v(b) =$
   $= u(a) + u(a+1) + ... + u(b) \pm [v(a) + v(a+1) + ... + v(b)] = \sum_{n=a}^{b} u(n) \pm$
   $\pm \sum_{n=a}^{b} v(n)$
2. $\sum_{n=a}^{b}[cu(n)] = cu(a) + cu(a+1) + ... + cu(b) = c[u(a) + u(a+1) + ... + u(b)] =$
   $= c\sum_{n=a}^{b} u(n)$
3. Podle Věty 2.10.3 lze psát: $\sum[u(n)\Delta v(n) + v(n+1)\Delta u(n)] = u(n)v(n)$.
   Podle Věty 3.18 platí: $\sum_{n=a}^{b}[u(n)\Delta v(n) + v(n+1)\Delta u(n)] = [u(n)v(n)]_a^{b+1}$.
   Rovnost upravme s využitím části 1 této věty:
   $\sum_{n=a}^{b}[u(n)\Delta v(n)] = [u(n)v(n)]_a^{b+1} - \sum_{n=a}^{b}[v(n+1)\Delta u(n)]$.
   Tímto je věta dokázána.

**Příklad 3.20:** Vypočtěte $\sum_{n=a}^{b}[nq^n]$, kde $a$, $b \in \mathbf{N}$, $a \leq b$ a $q \neq 1$.

*Řešení:* Postupujme podle Věty 3.19.3:

$$\begin{array}{ll} u(n) = n & \Delta v(n) = q^n \\ \Delta u(n) = 1 & v(n) = \frac{1}{q-1}q^n, \quad v(n+1) = \frac{1}{q-1}q^{n+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b}[nq^n] &= \left[n\frac{q^n}{q-1}\right]_a^{b+1} - \sum_{n=a}^{b}\left[\frac{q^{n+1}}{q-1}\right] = \frac{1}{q-1}\left[(b+1)q^{b+1} - aq^a\right] - \\ &- \frac{q}{(q-1)^2}\left[q^n\right]_a^{b+1} = \frac{1}{q-1}\left[(b+1)q^{b+1} - aq^a\right] - \frac{q}{(q-1)^2}(q^{b+1} - q^a). \end{aligned}$$

Tedy:

$$\sum_{n=a}^{b}[nq^n] = \frac{1}{q-1}\left[(b+1)q^{b+1} - aq^a\right] - \frac{q}{(q-1)^2}(q^{b+1} - q^a).$$

## 3.5 Sumace vyšších řádů

Známe-li $k-$tou diferenci a hledáme posloupnost, kterou jsme diferencovali, potřebujeme zavést pojem $k-$té sumace.

**Definice 3.21:** Nechť $n$, $k \in \mathbf{N}$ a $u(n)$ je posloupnost. Položme

$$\begin{aligned} \sum{}^{(0)} u(n) &= u(n), \\ \sum{}^{(1)} u(n) &= \sum u(n). \end{aligned}$$

Potom *$k$-tou sumaci posloupnosti* $u(n)$ značíme $\sum^{(k)} u(n)$ a definujeme rekurentně vzorcem

$$\sum{}^{(k)} u(n) = \sum\left[\sum{}^{(k-1)} u(n)\right].$$

Pro $k = 1$ místo první sumace říkáme jen sumace. Pro $k > 1$ kromě termínu $k-$tá sumace říkáme též *sumace $k-$tého řádu.*

Čtenář si jistě všiml, že definice $k-$té sumace je naprosto analogická definici $k-$té diference. Výpočet $k-$té sumace provádíme rekurentně podle Definice 3.21, tj. analogicky jako výpočet $k-$té diference, pokud postupujeme podle Definice 2.20 (viz Příklad 2.23).

**Příklad 3.22:** Nalezněte alespoň jednu posloupnost $y(n)$, která je třetí sumací posloupnosti $u(n) = 3^n$.

*Řešení:* Využijme Větu 3.9.2, kde stačí zvolit $c = 0$ :

$$\begin{aligned} \sum u(n) &= \sum 3^n = \frac{1}{2}\cdot 3^n, \\ \sum{}^{(2)} u(n) &= \sum\left[\sum u(n)\right] = \sum\left[\frac{1}{2}\cdot 3^n\right] = \frac{1}{2}\sum 3^n = \frac{1}{4}\cdot 3^n, \\ \sum{}^{(3)} u(n) &= \sum\left[\sum{}^{(2)} u(n)\right] = \sum\left[\frac{1}{4}\cdot 3^n\right] = \frac{1}{4}\sum 3^n = \frac{1}{8}\cdot 3^n. \end{aligned}$$

Zadání vyhovuje např. posloupnost:

$$y(n) = \frac{1}{8}\cdot 3^n.$$

Podle Poznámky 3.4 víme, že sumace $\sum u(n)$ není určena jednoznačně, ale že těchto posloupností je nekonečně mnoho. Je tedy zřejmé, že nekonečně mnoho je i posloupností, které jsou $k-$tou sumací posloupnosti $u(n)$. Hledejme tedy obecný vzorec, který by nám umožňoval nalézt všechny posloupnosti $y(n)$, pro které platí

$$y(n) = \sum{}^{(k)} u(n).$$

Nejprve ale zformulujme a dokažme následující větu.

**Věta 3.23:** Nechť $n,\, k \in \mathbf{N}$ a $u(n)$ je posloupnost. Pak platí:

$$\Delta^k u(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(n) = c_{k-1} n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + ... + c_0,$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ pro $i = 0, 1, ..., k-1$ jsou libovolné konstanty.

**Důkaz:**
„$\Rightarrow$“ Důkaz této implikace provedeme postupnými sumacemi, přičemž využijeme Věty 3.2 a 3.7. Nechť $\Delta^k u(n) = 0$, pak

$$\begin{aligned}
\Delta^{k-1} u(n) &= \sum 0 = c_{01}, \\
\Delta^{k-2} u(n) &= \sum{}^{(2)} 0 = \sum c_{01} = c_{12} n + c_{02}, \\
&\vdots \\
\Delta^{k-j} u(n) &= \sum{}^{(j)} 0 = \sum (c_{j-2,j-1} n^{j-2} + c_{j-3,j-1} n^{j-3} + ... + c_{0,j-1}) = \\
&= c_{j-1,j} n^{j-1} + c_{j-2,j} n^{j-2} + ... + c_{0j}, \\
&\vdots \\
u(n) &= \sum{}^{(k)} 0 = \sum (c_{k-2,k-1} n^{k-2} + c_{k-3,k-1} n^{k-3} + ... + c_{0,k-1}) = \\
&= c_{k-1,k} n^{k-1} + c_{k-2,k} n^{k-2} + ... + c_{0k}.
\end{aligned}$$

V prvním řádku je konstanta $c_{01}$ podle Věty 3.2 libovolná. Ve druhém řádku je podle Věty 3.9.1 konstanta $c_{02}$ libovolná a konstanta $c_{12}$ se rovná konstantě $c_{01}$, která je ovšem libovolná, takže i konstanta $c_{12}$ nabývá libovolné hodnoty. Takto lze postupně s využitím Věty 3.7 zdůvodnit, že všechny konstanty v posledním řádku jsou libovolné.

„$\Leftarrow$“ Nechť $u(n) = c_{k-1} n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + ... + c_0$, kde $c_i \in \mathbf{R}$ pro $i = 0, 1, ..., k-1$ jsou libovolné konstanty. Posloupnost $u(n)$ je v tomto případě polynomem a to nejvýše stupně $k-1$. Proto tvrzení platí podle Věty 2.24.

**Věta 3.24:** Nechť $n,\, k \in \mathbf{N}$ a nechť $u(n)$ a $v(n)$ jsou posloupnosti. Pak

$$\Delta^k u(n) = \Delta^k v(n) \text{ pro } \forall n \in \mathbf{N} \;\Leftrightarrow\; u(n) = v(n) + c_{k-1} n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + ... + c_0,$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ pro $i = 0, 1, ..., k-1$ jsou libovolné konstanty. Neboli, $u(n)$ a $v(n)$ jsou $k-$tými sumacemi téže posloupnosti právě tehdy, když se liší o polynom nejvýše stupně $k-1$.

**Důkaz:** Nejprve s využitím Vět 2.21 a 3.19.1 ukažme platnost vzorce, kterého využijeme při důkazu obou implikací. Pro libovolné posloupnosti $u(n)$ a $v(n)$ platí:

$\Delta^k u(n) \pm \Delta^k v(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} u(n+j) \pm \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v(n+j) =$

$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} [u(n+j) \pm v(n+j)] = \Delta^k [u(n) \pm v(n)].$

„$\Rightarrow$“ $\Delta^k u(n) - \Delta^k v(n) = 0 \Rightarrow \Delta^k [u(n) - v(n)] = 0 \Rightarrow u(n) = v(n) + c_{k-1} n^{k-1} +$

$c_{k-2}n^{k-2} + ... + c_0$ (viz Věta 3.23).

„$\Leftarrow$“ Nechť $u(n) = v(n) + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + ... + c_0$. Označme pro zjednodušení zápisu $w(n) = c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + ... + c_0$. Pak $\Delta^k u(n) = \Delta^k[v(n) + w(n)] = \Delta^k v(n) + \Delta^k w(n)$. Ale $\Delta^k w(n) = 0$ (viz Věta 3.23), tedy $\Delta^k u(n) = \Delta^k v(n)$.

**Poznámka 3.25:** Z Věty 3.24 vyplývá, že je-li $U(n)$ $k-$tou sumací $u(n)$, pak existuje nekonečně mnoho posloupností $y(n)$, které jsou $k-$tými sumacemi $u(n)$ a každou z nich lze vyjádřit ve tvaru:

$$y(n) = \sum{}^{(k)} u(n) = U(n) + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + ... + c_0,$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ pro $i = 0, 1, ..., k-1$ jsou libovolné konstanty.

Právě vyloženou problematiku ilustrujeme příkladem v další kapitole, kde zjistíme, že úloha na výpočet $k-$té sumace je zvláštním případem diferenční rovnice $k-$tého řádu. Uvidíme také, že Poznámka 3.25 vlastně popisuje, jakého tvaru je obecné řešení diferenční rovnice $\Delta^k y(n) = u(n)$.

## 3.6 Úlohy na procvičení

**Úloha 3.29:** Nalezněte všechny posloupnosti $y(n)$, pro které platí $\Delta y(n) = u(n)$, je-li:

1. $u(n) = 6n^2 + 8n$

   $[y(n) = 2n^3 + n^2 - 3n + c]$

2. $u(n) = (2n^2 - 4) \cdot 3^n$

   $[y(n) = (n^2 - 3n + 1) \cdot 3^n + c]$

3. $u(n) = \sin \frac{\pi}{4} n$

   $[y(n) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} n - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} n + c]$

**Úloha 3.30:** Nalezněte funkční vzorec pro součet prvních $n$ členů posloupnosti $u(n)$, je-li:

1. $u(n) = (2n-1)^2$

   $[s(n) = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)]$

2. $u(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

   $[s(n) = 4 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}]$

3. $u(n) = n^3$

   $[s(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2]$

**Úloha 3.31:** Rozhodněte, zda posloupnosti $U(n) = \cos(\pi n - \frac{\pi}{3})$ a $V(n) = \frac{1}{2}[(-1)^n - \sqrt{2}]$ jsou sumacemi téže posloupnosti.

[ano; $\Delta U(n) = \Delta V(n) = (-1)^{n+1}$; $U(n) - V(n) = ... = \frac{1}{2}\cos \pi n - \frac{1}{2}(-1)^n + $ $+ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

**Úloha 3.32:** Nalezněte všechny posloupnosti $y(n)$, pro které platí $y(n) = \sum n \sin \frac{\pi}{2} n$.

[Návod: Postupujte metodou sumace per partes. Jejím užitím dostanete: $y(n) = \sum n \sin \frac{\pi}{2} n = -\frac{n}{2}(\sin \frac{\pi}{2} n + \cos \frac{\pi}{2} n) + \frac{1}{2}\sum(\cos \frac{\pi}{2} n - \sin \frac{\pi}{2} n)$. Metodou neurčitých koeficientů vypočtete, že $\sum(\cos \frac{\pi}{2} n - \sin \frac{\pi}{2} n) = \sin \frac{\pi}{2} n$.]

$[y(n) = \frac{1}{2}(1-n)\sin \frac{\pi}{2} n - \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{2} n + c]$

**Úloha 3.33:** Nalezněte vzorec pro součet prvních $n$ členů aritmetické posloupnosti.

[Návod: Aritmetická posloupnost je určená rekurentně: $u(n+1) = u(n) + d$, kde $u(1)$ a $d$ jsou daná čísla. Funkční vzorec pro aritmetickou posloupnost dostanete ve tvaru $u(n) = u(1)+(n-1)d$. Výpočtem $s(n) = \sum(u(1)+nd),\ s(1) = u(1)$ obdržíte vzorec $s(n) = \frac{d}{2}n^2 + [u(1) - \frac{d}{2}]n$, který ještě upravte na obvyklejší tvar.]

$[s(n) = \frac{n}{2}[u(1) + u(n)]]$

**Úloha 3.34:** Určete součet vnitřních úhlů konvexního $n-$úhelníka ($n \geq 3$).

[Návod: Součet vnitřních úhlů konvexního $n-$úhelníka $A_1A_2...A_n$ je $s(n)$. Uvažte konvexní $(n+1)-$úhelník $A_1A_2...A_{n+1}$. Součet jeho vnitřních úhlů je dán součtem vnitřních úhlů $n-$úhelníka $A_1A_2...A_n$ a trojúhelníka $A_1A_nA_{n+1}$.]

[Řešením $\Delta s(n) = 180°,\ s(3) = 180°$ vyjde $s(n) = (n-2)\cdot 180°$.]

**Úloha 3.35:** Určete počet úhlopříček konvexního $n-$úhelníka ($n \geq 4$).

[Návod: Jeden ze způsobů, jak vyřešit tuto úlohu je sestavit rekurentní vztah. Počet úhlopříček v konvexním $n-$úhelníku $A_1A_2...A_n$ je $u(n)$. Uvažte konvexní $(n+1)-$úhelník $A_1A_2...A_{n+1}$. Jeho úhlopříčky tvoří právě všechny úhlopříčky $n$-úhelníka $A_1A_2...A_n$ plus „nové“ úhlopříčky $A_1A_n,\ A_2A_{n+1},\ A_3A_{n+1},\ \ldots,$ $A_{n-1}A_{n+1}$.]

[Řešením $\Delta u(n) = n-1,\ u(4) = 2$ vyjde $u(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}(n-3)$.]

**Úloha 3.36:** Určete největší možný počet $u(n)$ oblastí, na které lze rovinu rozdělit pomocí $n$ kružnic.

[Návod: Mějme $n$ kružnic $k_1, k_2, ..., k_n$ v obecné poloze, tj. $n$ kružnic takových, že každé dvě z nich se protnou ve dvou bodech a žádné tři z nich neprocházejí jedním bodem. Uvažte kružnici $k_{n+1}$ tak, aby všech $n+1$ kružnic bylo opět v obecné poloze. Kružnice $k_{n+1}$ je $2n$ průsečíky s kružnicemi $k_1, k_2, ..., k_n$ rozdělena na $2n$ oblouků, přičemž každý z těchto oblouků dělí jednu z původních oblastí roviny na dvě „nové“.]

[Řešením $\Delta u(n) = 2n,\ u(1) = 2$ vyjde $u(n) = n^2 - n + 2$.]

**Úloha 3.37:** Určete největší možný počet $v(n)$ oblastí, na které lze rozdělit prostor pomocí $n$ kulových ploch.

[Návod: Mějme $n$ kulových ploch $K_1, K_2, ..., K_n$ v obecné poloze, tj. $n$ kulových ploch takových, že každé tři se protínají a žádné čtyři neprocházejí týmž bodem. Uvažte kulovou plochu $K_{n+1}$ tak, aby všech $n+1$ kulových ploch bylo opět v obecné poloze. Průniky $K_{n+1} \bigcap K_j,\ j = 1, ..., n$ jsou kružnice, které rozdělí kulovou plochu $K_{n+1}$ na $n^2 - n + 2$ oblastí (viz Úloha 3.36), přičemž každá z těchto oblastí dělí jednu z původních částí prostoru na dvě „nové“.]

[Řešením $\Delta v(n) = n^2 - n + 2,\ v(1) = 2$ vyjde $v(n) = \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{8}{3}n =$
$= \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8)$.]

# 4 Pojem diferenční rovnice

**Definice 4.1:** Nechť $f\colon \mathbf{N} \times \mathbf{R}^{k+1} \to \mathbf{R}$ je funkce $k+2$ proměnných. Rovnici tvaru

$$f(n, y, \Delta y, \Delta^2 y, ..., \Delta^k y) = 0, \tag{4.1}$$

ve které je neznámou posloupnost $y = \varphi(n)$, nazýváme *diferenční rovnicí k-tého řádu a 1. typu* definovanou v $\mathbf{N}$.
Každou posloupnost $y = \varphi(n)$, která pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splňuje rovnici (4.1), nazveme *partikulárním řešením* této rovnice.
*Obecným řešením* pak rozumíme vzorec zahrnující všechna partikulární řešení.

Definice 4.1 je analogická k definici diferenciální rovnice $k$-tého řádu, nahradíme-li diference derivacemi příslušného řádu.

**Příklad 4.2:** Diferenční rovnice 1. typu:

1. $\Delta y - y = 4$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 1. řádu
2. $3\Delta^2 y + n\Delta y = 0$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 2. řádu
3. $(n-1)^2 \Delta y = 5^n$ je pro $n \neq 1$ rovnice 1. řádu
4. $(\Delta^3 y)^2 + 2^n + 1 = 0$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 3. řádu
5. $\Delta^3 y = 6$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 3. řádu

Ačkoliv ještě diferenční rovnice neumíme řešit, snadno si zdůvodníme, že 4. rovnice nemá reálné řešení, protože $(\Delta^3 y)^2 \geq 0$, $2^n > 0$ a součet na levé straně rovnice nikdy nemůže dát nulu.

Povšimněme si nyní 5. rovnice. To je však úloha na $k$-tou sumaci ($k = 3$), kterou jsme se zabývali v předchozím textu. Zvláštním případem diferenčních rovnic 1. typu jsou rovnice tvaru

$$\Delta^k y = u(n).$$

Je-li $y_1 = \varphi_1(n) = \sum^{(k)} u(n)$ partikulární řešení této rovnice, pak podle Věty 3.24 existuje polynom stupně nejvýše $k-1$ takový, že libovolné jiné partikulární řešení $y_2$ této rovnice lze vyjádřit jako součet $y_1$ a zmíněného polynomu. Obecné řešení této rovnice je tedy tvaru

$$y = \varphi_1(n) + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + ... + c_1 n + c_0,$$

kde $c_{k-1}, c_{k-2}, ..., c_0$ jsou libovolné konstanty, což je v souladu s Poznámkou 3.25. Libovolné partikulární řešení dostaneme z obecného řešení vhodnou volbou konstant $c_{k-1}, c_{k-2}, ..., c_0$. Tyto konstanty pak určujeme z tzv. počátečních podmínek, které tvoří $k$ daných dvojic hodnot $\{n_0, \Delta^j y(n_0)\}$, pro $j = 0, 1, ..., k-1$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$.

Pomocí vět uvedených v kapitole o sumaci dokážeme řešit rovnice $\Delta^k y = u(n)$, kde u$(n)$ je speciálního tvaru: $konst., n^k, q^n, \sin \alpha n, \cos \alpha n$ a funkce utvořené součtem nebo součinem z nich. Řešení hledáme postupnými sumacemi a to buď přímým výpočtem pomocí příslušných vzorců, nebo odhadneme tvar řešení, který dosadíme s neurčitými koeficienty do patřičné rovnice a určíme je porovnáním s koeficienty pravé strany $u(n)$.

**Příklad 4.3:** Najděte obecné řešení a partikulární řešení určené počátečními podmínkami $y(1) = 3, \Delta y(1) = 4, \Delta^2 y(1) = 8$ rovnice $\Delta^3 y = 6$.

*Řešení:* Nejprve postupnými sumacemi hledejme obecné řešení rovnice $\Delta^3 y = 6$. Platí

$$\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y).$$

Označíme-li $\Delta^2 y = y_1$, obdržíme rovnici

$$\Delta y_1 = 6.$$

Podle Věty 3.9.1 platí

$$y_1 = 6n + c_2^*,$$

kde $c_2^*$ je libovolná konstanta. Je tedy

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = 6n + c_2^*.$$

Označme podobně $\Delta y = y_2$. Řešíme tudíž rovnici

$$\Delta y_2 = 6n + c_2^*.$$

Podle Věty 3.8 dostáváme

$$y_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} n^{(2)} + c_2^* n + c_1^*,$$

kde $c_1^*$ je libovolná konstanta. Konečně vypočtěme neznámou $y$ z rovnice

$$\Delta y = 3n^{(2)} + c_2^* n + c_1^*.$$

Využijeme-li znovu Větu 3.8, obdržíme

$$y = 3 \cdot \frac{1}{3} n^{(3)} + c_2^* \cdot \frac{1}{2} n^{(2)} + c_1^* n + c_0,$$

kde $c_0$ je libovolná konstanta. Po odstranění zobecněných mocnin, označíme-li $c_2 = -3 + \frac{1}{2} c_2^*$ a $c_1 = 2 - \frac{1}{2} c_2^* + c_1^*$, můžeme zapsat obecné řešení ve tvaru:

$$y = n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0.$$

Zbývá určit partikulární řešení dané počátečními podmínkami:

$$y(1) = 3, \;\; y(1) = c_1^* + c_0,$$

$$\Delta y(1) = 4, \;\; \Delta y(1) = c_2^* + c_1^*,$$

$$\Delta^2 y(1) = 8, \;\; \Delta^2 y(1) = 6 + c_2^*.$$

Odtud snadno vypočteme:

$$c_2^* = 2, \qquad c_1^* = 2, \qquad c_0 = 1.$$

Ale

$$c_2 = -3 + \frac{1}{2} c_2^* \implies c_2 = -2,$$

$$c_1 = 2 - \frac{1}{2} c_2^* + c_1^* \implies c_1 = 3.$$

Hledané partikulární řešení tedy je

$$y = n^3 - 2n^2 + 3n + 1.$$

S diferenční rovnicí 1. typu v dalším příliš pracovat nebudeme. Ukažme si, jak dojdeme k jinému tvaru diferenční rovnice. Podle Věty 2.21 můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \varphi(n+1) - \varphi(n), \\
\Delta^2 y &= \varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n), \\
&\;\vdots \\
\Delta^k y &= \varphi(n+k) - \binom{k}{1} \varphi(n+k-1) + \ldots + (-1)^k \varphi(n).
\end{aligned}$$

Zaveďme značení:

$$\varphi(n+j) = y(n+j),\ j = 0,1,2,...,k.$$

**Definice 4.4:** Nechť $g$: $\mathbf{N} \times \mathbf{R}^{k+1} \to \mathbf{R}$ je funkce $k+2$ proměnných. Rovnici tvaru

$$g\left(n, y(n), y(n+1), ..., y(n+k)\right) = 0, \tag{4.2}$$

kde $y(n+j) = \varphi(n+j),\ j = 0,1,2,...,k$, ve které neznámou je posloupnost $y(n) = \varphi(n)$, nazýváme *diferenční rovnicí 2. typu* definovanou v $\mathbf{N}$. Říkáme, že rovnice je *k-tého řádu*, jestliže se v (4.2) pro každé $n \in \mathbf{N}$ skutečně objeví $y(n)$ i $y(n+k)$ („skutečně“ se myslí tak, že nejsou např. vynásobeny koeficientem, který je pro nějaké $n$ nulový).
Každou posloupnost $y(n) = \varphi(n)$, která pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splňuje rovnici (4.2), nazýváme *partikulární řešení diferenční rovnice 2. typu* v $\mathbf{N}$.
*Obecným řešením* rovnice 2. typu pak rozumíme vzorec zahrnující všechna partikulární řešení.
*Počáteční podmínky* tvoří $k$ daných dvojic hodnot $\{n_0 + j, \varphi(n_0 + j)\}$ pro $j = 0,1,2,...,k-1$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$.

**Příklad 4.5:** Diferenční rovnice 2. typu:

1. $y^2(n+1) - 3y(n) = 4$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 1. řádu
2. $y(n+2) = \frac{y(n+1)}{1+(n-2)^2 y(n)}$ je pro $n \neq 2$ rovnice 2. řádu
3. $y(n+2) - y(n+1) = 0$ je pro $\forall n \in \mathbf{N}$ rovnice 1. řádu (rovnice neobsahuje členy $y(n)$, tzn. řád rovnice určíme až po provedení substituce $t = n+1$, když dostaneme rovnici $y(t+1) - y(t) = 0$)

**Příklad 4.6:** Rovnici 1. typu $\Delta^2 y + \Delta y = 0$ převeďte na rovnici 2. typu.

*Řešení:* Platí:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(n+1) - y(n), \\ \Delta^2 y &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n). \end{aligned}$$

Dosadíme-li do dané rovnice, dostáváme:

$$y(n+2) - y(n+1) = 0.$$

Všimněme si, že zatímco řád rovnice 1. typu byl 2, rovnice 2. typu je 1. řádu (viz Příklad 4.5.3), tedy řád nezůstal zachován. Obvyklejší je druhá definice diferenční rovnice včetně definice jejího řádu.

**Příklad 4.7:** Rovnici $y(n+3) - 3y(n+2) + y(n) = 5n$ převeďte na rovnici 1. typu:

*Řešení:* Ze vztahů

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(n+1) - y(n), \\ \Delta^2 y &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n), \\ \Delta^3 y &= y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n) \end{aligned}$$

vyjádříme $y(n+1), y(n+2)$ a $y(n+3)$, přičemž značíme $y(n) = y$ :

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \Delta y + y, \\ y(n+2) &= \Delta^2 y + 2\Delta y + y, \\ y(n+3) &= \Delta^3 y + 3\Delta^2 y + 3\Delta y + y. \end{aligned}$$

Dosadíme do dané rovnice a dostáváme

$$\Delta^3 y - 3\Delta y - y = 5n.$$

Jak jsme již naznačili, v dalším budeme pracovat s rovnicemi 2. typu.

**Úloha 4.8:** Nalezněte obecné a partikulární řešení dané rovnice, je-li:

1. $\Delta^2 y = 9 \cdot 2^{2n+1}, \;\; y(1) = 5, \; \Delta y(1) = 20$

   [ OŘ: $y = 2^{2n+1} + c_1 n + c_0$, PŘ: $y = 2^{2n+1} - 4n + 1$ ]

2. $\Delta^2 y = 12n, \;\; y(1) = 5, \; \Delta y(1) = -4$

   [ OŘ: $y = 2n^3 - 6n^2 + c_1 n + c_0$, PŘ: $y = 2n^3 - 6n^2 + 9$ ]

**Úloha 4.9:** Nalezněte obecné řešení dané rovnice, je-li:

1. $\Delta^2 y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} n$

   [ $y = \cos \frac{\pi}{3} n + c_1 n + c_0$ ]

2. $\Delta^3 y = (8n + 36) \cdot 3^n$

   [ $y = n \cdot 3^n + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$ ]

# 5 Pojem a vlastnosti lineární diferenční rovnice

**Definice 5.1:** Diferenční rovnici tvaru

$$a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + ... + a_k(n)y(n+k) = u(n), \tag{5.1}$$

kde $u(n), a_0(n), a_1(n), ..., a_k(n)$ jsou libovolné posloupnosti definované v $\mathbf{N}$, přičemž $a_0(n) \neq 0$, $a_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, nazýváme *lineární diferenční rovnicí k-tého řádu*; $a_0(n), a_1(n),...,$ $a_k(n)$ nazýváme *koeficienty*, $u(n)$ *pravou stranou.*
Jestliže jsou posloupnosti $a_0(n), a_1(n), ..., a_k(n)$ konstantami, píšeme $a_0(n) = a_0$, $a_1(n) = a_1, ...,$ $a_k(n) = a_k$ a říkáme, že rovnice má *konstantní koeficienty.* V opačném případě hovoříme o rovnici s *nekonstantními koeficienty.*
Je-li pro všechna $n \in \mathbf{N}$ $u(n) = 0$, říkáme, že rovnice je *homogenní (bez pravé strany).* V opačném případě mluvíme o rovnici *nehomogenní (s pravou stranou).*

**Příklad 5.2:**

1. $2y(n+2) - y(n+1) + 3y(n) = 0$ je homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty
2. $y(n)y(n+1) - y(n) = 1$ není lineární diferenční rovnice
3. $y(n+1) + (n^2+1)y(n) = 5^n$ je nehomogenní lineární diferenční rovnice 1. řádu s nekonstantními koeficienty

**Věta 5.3:** *(Existenční věta pro lineární diferenční rovnici)*
Nechť je dáno $k$ hodnot $y(c), y(c+1), ..., y(c+k-1)$ v $k$ po sobě jdoucích bodech $c, c+1, ..., c+k-1$ z definičního oboru $\mathbf{N}$ lineární diferenční rovnice (5.1). Potom existuje v $\mathbf{N}$ právě jedno řešení rovnice (5.1), které splňuje zadané počáteční podmínky.

**Důkaz:** Provedeme úplnou indukcí. Nechť daný bod $c \in \mathbf{N}$ lze psát ve tvaru $c = 1 + N$, kde $N$ je jisté přirozené číslo.

Nejprve dokážeme, že řešení $y(n)$ existuje pro $n \geq c+k$; k tomu nejdříve nalezneme $y(c+k)$. Dosaďme $n = c$ do rovnice (5.1):

$$a_0(c)y(c) + a_1(c)y(c+1) + ... + a_k(c)y(c+k) = u(c).$$

Protože $a_k(c) \neq 0$, můžeme jednoznačně vypočítat $y(c+k)$, neboť hodnoty $y(c), y(c+1), ..., y(c+k-1)$ jsou předepsány.

$$y(c+k) = \frac{1}{a_k(c)}[u(c) - a_0(c)y(c) - a_1(c)y(c+1) - ... - a_{k-1}(c)y(c+k-1)].$$

Předpokládejme, že takto lze jednoznačně vypočítat hodnoty $y(c+k), y(c+k+1), ..., y(c+K)$ pro jisté $K \geq k$. Z toho dokážeme, že lze jednoznačně vypočítat i $y(c+K+1)$ a to následovně: do rovnice (5.1) dosadíme $n = c+K-k+1$ ($n \in \mathbf{N}$); protože $K-k \geq 0$, je $n \geq c+1$ :

$$a_0(n)y(c+K-k+1) + a_1(n)y(c+K-k+2) + ... + a_k(n)y(c+K+1) = u(c+K-k+1).$$

Neboť $a_k(n) \neq 0$, lze jednoznačně vyjádřit

$$\begin{aligned} y(c+K+1) &= \frac{1}{a_k(n)}[u(c+K-k+1) - a_0(n)y(c+K-k+1) - \\ &- a_1(n)y(c+K-k+2) - ... - a_{k-1}(n)y(c+K)]. \end{aligned}$$

Protože $c+K-k+1 \geq c+1$, jsou tedy hodnoty $y(c+K-k+1), y(c+K-k+2), ..., y(c+K)$ podle indukčního předpokladu určeny jednoznačně. To ale znamená, že řešení existuje, a to jediné, pro všechna $n \geq c+k$.

Nyní vypočtěme řešení pro $n = 1, 2, ..., c-1$. Dosaďme do rovnice (5.1) $n = c-1 \in \mathbf{N}$ :

$$a_0(c-1)y(c-1) + a_1(c-1)y(c) + ... + a_k(c-1)y(c-1+k) = u(c-1).$$

Odtud můžeme jednoznačně vypočítat $y(c-1)$, protože v diferenční rovnici předpokládáme $a_0(n) \neq 0$. Dále, dosadíme-li $n = c-2$, vypočteme podobně $y(c-2)$ atd., až po $N$ (konečně mnoha) krocích vypočítáme $y(c-N) = y(1)$.

Nyní se budeme zabývat homogenní rovnicí. V následujících větách si ukážeme několik vlastností, které mají řešení této rovnice.

**Věta 5.4:** Rovnice

$$a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + ... + a_k(n)y(n+k) = 0 \tag{5.2}$$

má pro všechna $n \in \mathbf{N}$ vždy tzv. triviální řešení $y(n) = 0$.

**Důkaz:** Je-li pro $\forall n \in \mathbf{N}$ $y(n) = 0$, pak $y(n+j) = 0$ pro $j = 0, 1, ..., k$ a tedy $a_0(n)y(n) + a_1(n)y(n+1) + \ldots + a_k(n)y(n+k) = \sum_{j=0}^{k} a_j(n)y(n+j) = 0$.

**Věta 5.5:** Nechť $\varphi_1(n)$ a $\varphi_2(n)$ jsou partikulární řešení rovnice (5.2) a nechť $C_1, C_2$ jsou libovolné konstanty. Pak funkce $y(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n)$ je rovněž řešením rovnice (5.2).

**Důkaz:** $\sum_{j=0}^{k} a_j(n)[C_1\varphi_1(n+j) + C_2\varphi_2(n+j)] = C_1 \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\varphi_1(n+j) + C_2 \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\varphi_2(n+j) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$.

Z Věty 5.5 plyne následující důsledek:

**Důsledek 5.6:** Nechť $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ jsou partikulární řešení rovnice (5.2). Nechť $C_1, C_2, ..., C_k$ jsou libovolné konstanty. Pak funkce $y(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + ... + C_k\varphi_k(n)$ je také řešením rovnice (5.2).

**Důkaz:** $\sum_{j=0}^{k} a_j(n)[C_1\varphi_1(n+j) + C_2\varphi_2(n+j) + ... + C_k\varphi_k(n+j)] = C_1 \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\varphi_1(n+j) + C_2 \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\varphi_2(n+j) + ... + C_k \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\varphi_k(n+j) = 0$ .

V dalším se budeme zabývat lineárně nezávislými řešními $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, ..., $\varphi_k(n)$ rovnice (5.2). Ukážeme totiž, že posloupnost $y(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(n)$ bude obecným řešením rovnice (5.2). Nejprve však uveďme definici lineárně nezávislých posloupností.

**Definice 5.7:** Řekneme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ jsou *lineárně závislé* v $\mathbf{N}$, jestliže existuje aspoň jedna konstanta $C_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., k$ taková, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je splněna rovnice

$$C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + ... + C_k\varphi_k(n) = 0.$$

V opačném případě řekneme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ jsou *lineárně nezávislé* v $\mathbf{N}$.

**Definice 5.8:** Říkáme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$, které jsou partikulárními řešeními rovnice (5.2) v $\mathbf{N}$, tvoří *fundamentální systém řešení,* jestliže jsou posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ lineárně nezávislé v $\mathbf{N}$.

V dalším textu využijeme větu z lineární algebry, která udává důležitou vlastnost lineárně nezávislých posloupností. Její důkaz lze nalézt např. v knize [2].

**Věta 5.9:** Posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbf{N}$ právě tehdy , když existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že determinant

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(n_0) & \varphi_2(n_0) & \dots & \varphi_k(n_0) \\ \varphi_1(n_0+1) & \varphi_2(n_0+1) & \dots & \varphi_k(n_0+1) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1(n_0+k-1) & \varphi_2(n_0+k-1) & \dots & \varphi_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Věta 5.10:** Nechť posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5.2) v $\mathbf{N}$. Pak obecné řešení rovnice (5.2) je tvaru

$$y(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + ... + C_k\varphi_k(n), \tag{5.3}$$

kde $C_1, C_2, ..., C_k$ jsou libovolné konstanty.

**Důkaz:** Abychom mohli tvrdit, že tvar (5.3) je obecným řešením rovnice (5.2), musíme dokázat toto. Je-li $\varphi(n)$ libovolné partikulární řešení rovnice (5.2), pak existují konstanty $C_1, C_2, ..., C_k$ takové, že $\varphi(n) = \sum_{j=1}^k C_j\varphi_j(n)$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. To znamená, že když ukážeme, jak lze tyto konstanty nalézt, pak budeme umět libovolné partikulární řešení rovnice (5.2) vyjádřit ve tvaru (5.3).

K výpočtu konstant utvoříme následující soustavu k lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k C_j\varphi_j(n_0) &= \varphi(n_0) \\ \sum_{j=1}^k C_j\varphi_j(n_0+1) &= \varphi(n_0+1) \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^k C_j\varphi_j(n_0+k-1) &= \varphi(n_0+k-1). \end{aligned}$$

Podle předpokladu a Věty 5.9 existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, pro něž je determinant matice soustavy nenulový a tedy existuje jediné řešení $C_1^*, C_2^*, \dots, C_k^*$. Tím jsme dokázali, že $\varphi(n) = \sum_{j=1}^k C_j^*\varphi_j(n)$ pro body $n_0, n_0+1, ..., n_0+k-1$ a zbývá ověřit, že i pro ostatní body $n \in \mathbf{N}$ platí $\varphi(n) = \sum_{j=1}^k C_j^*\varphi_j(n)$.

Utvořme posloupnost $g(n) = \varphi(n) - \sum_{j=1}^k C_j^*\varphi_j(n)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Tato posloupnost je podle Důsledku 5.6 také partikulárním řešením rovnice (5.2) pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Z výpočtu konstant $C_1^*, C_2^*, \dots, C_k^*$ vyplývá, že posloupnost $g(n)$ nabývá ve všech bodech $n_0, n_0+1, ..., n_0+k-1$ hodnot 0. Vezmeme-li tyto hodnoty v $k$ po sobě jdoucích bodech za počáteční podmínky, pak z existenční Věty 5.3 víme, že jimi je určeno jediné partikulární řešení, což je právě $g(n)$ a toto řešení je triviální, tj. pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je $g(n) = 0$, což jsme měli dokázat.

Nyní se dostáváme k nehomogenní lineární rovnici.

**Věta 5.11:** *(Princip superpozice)*
Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Nechť $\psi_1(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^k a_j(n)y(n+j) = u(n)$ a $\psi_2(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^k a_j(n)y(n+j) = v(n)$. Pak $\alpha\psi_1(n) + \beta\psi_2(n)$ je řešením rovnice $\sum_{j=0}^k a_j(n)y(n+j) = \alpha u(n) + \beta v(n)$.

**Důkaz:** $\sum_{j=0}^k a_j(n)[\alpha\psi_1(n+j) + \beta\psi_2(n+j)] = \alpha\sum_{j=0}^k a_j(n)\psi_1(n+j) + \beta\sum_{j=0}^k a_j(n)\psi_2(n+j) = \alpha u(n) + \beta v(n)$.

**Důsledek 5.12:** Jsou-li $\psi_1(n), \psi_2(n)$ libovolná řešení nehomogenní rovnice (5.1), pak je rozdíl $\psi_1(n) - \psi_2(n)$ řešením homogenní rovnice (5.2).

**Důkaz:** Vyplývá přímo z Věty 5.11, je-li $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $u(n) = v(n)$.

**Důsledek 5.13:** Nechť $Y(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n)$ je obecné řešení homogenní rovnice (5.2), nechť $Z(n) = \psi(n)$ je partikulární řešení nehomogenní rovnice (5.1). Pak obecné řešení rovnice (5.1) je tvaru

$$y(n) = Z(n) + Y(n) = \psi(n) + \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n). \tag{5.4}$$

**Důkaz:** Potřebujeme dokázat, že libovolné řešení rovnice (5.1) (označme jej $\psi_1(n)$) lze zapsat ve tvaru (5.4). To však plyne z Důsledku 5.12, neboť

$$\psi_1(n) - \psi(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n),$$

tj.

$$\psi_1(n) = \psi(n) + \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n).$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tedy součtem jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení homogenní rovnice.

Na závěr této kapitoly ukažme, jak najít partikulární řešení nehomogenní rovnice určené počátečními podmínkami. Nechť je dáno obecné řešení tvaru (5.4) rovnice (5.1). Hledejme partikulární řešení, které v daných $k$ po sobě jdoucích bodech $n_0, n_0+1, ..., n_0+k-1$ z definičního oboru $\mathbf{N}$ nabývá daných hodnot $y(n_0) = Y_0, y(n_0+1) = Y_1, ..., y(n_0+k-1) = Y_{k-1}$ (počáteční podmínky). Z těchto podmínek lze určit jednoznačně konstanty $C_1, C_2, ..., C_k$ následujícím způsobem: dosaďme postupně do tvaru (5.4) za $n_0$ a $y(n_0)$ počáteční podmínky. Dostáváme soustavu $k$ lineárních rovnic pro neznámé $C_1, C_2, ..., C_k$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n_0) &= Y_0 - \psi(n_0), \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n_0+k-1) &= Y_{k-1} - \psi(n_0+k-1).
\end{aligned}$$

Determinant matice soustavy je nenulový (viz Věta 5.9), tudíž soustava má jediné řešení $C_1, C_2, ..., C_k$.

Poznamenejme ještě, že uvedený postup platí i pro homogenní rovnici (5.2) s tím, že $\psi(n_0) = \psi(n_0+1) = ... = \psi(n_0+k-1) = 0$.

# 6 Homogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Hledejme netriviální řešení homogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty $k-$tého řádu:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + ... + a_k y(n+k) = 0, \tag{6.1}$$

kde $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$ jsou reálné konststanty. Podstatnou roli zde bude hrát jistá algebraická rovnice (tzv. charakteristická rovnice), jejíž kořeny nás přivedou k obecnému řešení rovnice (6.1).

**Definice 6.1:** Algebraickou rovnici

$$a_0 + a_1\lambda + ... + a_k\lambda^k = 0 \tag{6.2}$$

nazýváme *charakteristickou rovnicí* diferenční rovnice (6.1).

**Věta 6.2:** Nechť $\lambda \neq 0$. Pak posloupnost $y(n) = \lambda^n$ je řešením rovnice (6.1) právě tehdy, když $\lambda$ je řešením rovnice (6.2).

**Důkaz:**
„$\Rightarrow$“ Nechť $y(n) = \lambda^n$ je řešením rovnice (6.1) $\Rightarrow a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n+1} + ... + a_k\lambda^{n+k} = 0$, $\lambda \neq 0$, tedy lze rovnici dělit $\lambda^n \Rightarrow a_0 + a_1\lambda + ... + a_k\lambda^k = 0$, neboli $\lambda$ je řešením (6.2).
„$\Leftarrow$“ Zřejmé, neboť stačí „otočit implikace“ v předchozí části.

**Poznámka 6.3:** Povšimněme si, že je-li $\lambda$ kořenem charakteristické rovnice (6.2), pak $\lambda \neq 0$ neboť $a_0 \neq 0$ (viz Definice 5.1).

**Věta 6.4:** Posloupnosti $\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n$ pro $\lambda_i \neq \lambda_j$, kde $i \neq j$, $\lambda_i \neq 0$, $i, j = 1, 2, ..., k$, jsou lineárně nezávislé v $\mathbf{N}$.

**Důkaz:** Podle Věty 5.9 potřebujeme dokázat, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že determinant $D \neq 0$, kde

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1^{n_0} & \lambda_2^{n_0} & \dots & \lambda_k^{n_0} \\ \lambda_1^{n_0+1} & \lambda_2^{n_0+1} & \dots & \lambda_k^{n_0+1} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n_0+k-1} & \lambda_2^{n_0+k-1} & \dots & \lambda_k^{n_0+k-1} \end{vmatrix}.$$

Vytkneme-li z každého sloupce před determinant společného dělitele $\lambda_j^{n_0}$, dostaneme

$$D = \lambda_1^{n_0}\lambda_2^{n_0}...\lambda_k^{n_0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Označme $D = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^{n_0} D_k^*$. Protože $(\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^{n_0} \neq 0$ pro libovolné $n_0 \in \mathbf{N}$, stačí dokázat, že determinant $D_k^* \neq 0$. Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku násobek jiného řádku. Násobme tedy první řádek číslem $-\lambda_1$ a přičtěme první řádek ke druhému, násobme druhý řádek číslem $-\lambda_1$ a sečtěme ho s řádkem třetím, atd. až $(k-1)-$tý řádek vynásobíme číslem $-\lambda_1$ a přičteme k poslednímu řádku. Dostáváme

$$D_k^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_k - \lambda_1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \lambda_2^{k-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_k^{k-2}(\lambda_k - \lambda_1) \end{vmatrix}.$$

Rozvineme-li determinant $D_k^*$ podle prvního sloupce a vytkneme-li z každého sloupce společného dělitele, obdržíme

$$D_k^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & & & \\ \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix}.$$

Tedy

$$D_k^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_1) D_{k-1}^*.$$

Podle předpokladu je $(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_1) \neq 0$, což znamená, že potřebujeme dokázat, že $D_{k-1}^* \neq 0$. Dále postupujeme analogicky, až se dostaneme k determinantu

$$D_2^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{k-1} & \lambda_k \end{vmatrix} = \lambda_k - \lambda_{k-1} \neq 0,$$

což jsme potřebovali dokázat.

Rovnice (6.2) má nejvýše $k$ různých kořenů $\lambda_i$, a to podle Poznámky 6.3 nenulových, což podle Vět 6.2 a 6.4 znamená, že známe příslušný počet lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (6.1). V dalším se budeme zabývat problémem, jak nalézt fundamentální systém řešení v závislosti na charakteru kořenů charakteristické rovnice (6.2).

## 6.1 Charakteristická rovnice má $k$ různých reálných kořenů

**Věta 6.5:** Nechť $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, kde $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., k$, jsou kořeny rovnice (6.2). Pak rovnice (6.1) má v $\mathbf{N}$ obecné řešení tvaru

$$y(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + ... + C_k\lambda_k^n,$$

kde $C_1, C_2, ..., C_k$ jsou libovolné konstanty.

**Důkaz:** Věta vyplývá z Vět 5.10, 6.2 a 6.4.

**Příklad 6.6:** Nalezněte obecné řešení rovnice $y(n+2) - 9y(n+1) + 20y(n) = 0$.

*Řešení:* Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$. Její řešení určíme snadno pomocí rozkladu na součin: $(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$, tedy $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$. Podle Věty 6.5 je obecné řešení této rovnice

$$y(n) = C_1 4^n + C_2 5^n.$$

**Příklad 6.7:** Zjistěte, kolik „slov" délky $n$ lze sestavit z písmen $A, B, C$ tak, aby žádné z nich neobsahovalo „podslovo" typu $AA, AB, BA, BB$.

*Řešení:* Označme $s(n)$ počet hledaných slov. Rozdělme množinu slov délky $n + 2$ vyhovujících zadání na tři disjunktní podmnožiny podle toho, jakým písmenem končí. Ovšem slova končící písmenem $A$ (resp. $B$) musí mít předposlední písmeno $C$, aby neobsahovala zakázané podslovo. Touto úvahou dostáváme rekurentní vzorec

$$s(n + 2) = s(n + 1) + 2s(n),$$

což je vlastně lineární diferenční rovnice, kterou lze přepsat do obvyklejšího tvaru

$$s(n + 2) - s(n + 1) - 2s(n) = 0.$$

Zřejmě $s(1) = 3$, $s(2) = 5$.

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ a její kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Obecné řešení má tvar

$$s(n) = C_1 2^n + C_2(-1)^n.$$

Konstanty $C_1, C_2$ určíme z počátečních podmínek $s(1) = 3$, $s(2) = 5$, dosadíme-li do obecného řešení za $n = 1$, $n = 2$ :

$$\begin{aligned} 3 &= 2C_1 - C_2, \\ 5 &= 4C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou hodnoty $C_1 = \frac{4}{3}$, $C_2 = -\frac{1}{3}$. Pro hledaný počet slov jsme našli vzorec

$$s(n) = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3}(-1)^n,$$

tedy

$$s(n) = \frac{1}{3}\left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right].$$

## 6.2 Charakteristická rovnice má imaginární kořeny

Nejprve si připomeňme známé poznatky o komplexních číslech, o které se opírá následující věta:

- Jestliže má charakteristická rovnice (6.2) imaginární kořen $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, pak má i kořen $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.
- Každé komplexní číslo $\alpha + i\beta \neq 0$ lze vyjádřit pomocí jeho absolutní hodnoty a argumentu v goniometrickém tvaru

$$r(\cos\omega + i\sin\omega) = \alpha + i\beta$$

- Moivreova věta

$$[r(\cos\omega + i\sin\omega)]^n = r^n(\cos\omega n + i\sin\omega n)$$

**Věta 6.8:** Nechť má rovnice (6.2) imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i\sin\omega)$ (tj. $r \neq 0$ a $\omega \neq k\pi,\ k \in \mathbf{N}$). Pak má rovnice (6.1) tato lineárně nezávislá partikulární řešení

$$\varphi_1(n) = r^n\cos\omega n, \qquad \varphi_2(n) = r^n\sin\omega n,$$

tedy má za řešení posloupnost

$$\varphi_{1,2}(n) = r^n(C_1\cos\omega n + C_2\sin\omega n),$$

kde $C_1, C_2$ jsou libovolné konstanty.

**Důkaz:** Má-li rovnice (6.2) kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i\sin\omega)$, pak podle Věty 6.2 je posloupnost $\lambda_{1,2}^n$ partikulárním řešením rovnice (6.1). Ale $\lambda_{1,2}^n = [r(\cos\omega \pm i\sin\omega)]^n = [r(\cos(\pm\omega) + i\sin(\pm\omega))]^n = r^n[\cos(\pm\omega n) + i\sin(\pm\omega n)] = r^n(\cos\omega n \pm i\sin\omega n)$. Tedy

$$\lambda_{1,2}^n = r^n(\cos\omega n \pm i\sin\omega n)$$

Podle Věty 5.5 jsou řešením rovnice (6.1) i posloupnosti $\varphi_1(n) = \frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n)$ a $\varphi_2(n) = \frac{1}{2i}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$, tj.

$$\varphi_1(n) = r^n\cos\omega n, \qquad \varphi_2(n) = r^n\sin\omega n.$$

Dokažme dále, že tyto posloupnosti jsou v $\mathbf{N}$ lineárně nezávislé. K tomu je třeba (viz Věta 5.9) ukázat, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, pro něž je nenulový determinant

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(n_0) & \varphi_2(n_0) \\ \varphi_1(n_0+1) & \varphi_2(n_0+1) \end{vmatrix}.$$

$D = \varphi_1(n_0)\varphi_2(n_0+1) - \varphi_1(n_0+1)\varphi_2(n_0) = r^n \cos\omega n_0 \cdot r^{n_0+1} \sin\omega(n_0+1) - r^{n_0+1}\cos\omega(n_0+1) \cdot r^{n_0} \sin\omega n_0 = r^{2n_0+1}[\cos\omega n_0(\sin\omega n_0 \cos\omega + \cos\omega n_0 \sin\omega) - \sin\omega n_0(\cos\omega n_0 \cos\omega - \sin\omega n_0 \sin\omega)] = r^{2n_0+1}(\cos^2\omega n_0 \sin\omega + \sin^2\omega n_0 \sin\omega) = r^{2n_0+1}\sin\omega$. Tedy $D = r^{2n_0+1}\sin\omega \neq 0$, neboť $\omega \neq k\pi$, $k \in \mathbf{N}$ a $r \neq 0$.

**Příklad 6.9:** Najděte obecné řešení rovnice $y(n+2) - 2y(n+1) + 4y(n) = 0$.

*Řešení:* Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$, její kořeny pak jsou $\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$. Abychom mohli použít Větu 6.8, musíme tyto kořeny převést do goniometrického tvaru: $1 \pm \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3})$, tedy $r = 2$, $\omega = \frac{\pi}{3}$. Obecné řešení je:

$$y(n) = 2^n(C_1 \cos\frac{\pi}{3}n + C_2 \sin\frac{\pi}{3}n).$$

Závěrem této podkapitoly uveďme větu, kterou využijeme v dalším textu.

**Věta 6.10:** Nechť rovnice (6.1) má komplexní řešení $y(n) = u(n) + iv(n)$. Pak jsou také posloupnosti $u(n)$ a $v(n)$ řešením dané rovnice.

**Důkaz:** $0 = \sum_{j=0}^k a_j[u(n+j) + iv(n+j)] = \sum_{j=0}^k a_j u(n+j) + i\sum_{j=0}^k a_j v(n+j)$, ale tento komplexní výraz je nulový, když $\sum_{j=0}^k a_j u(n+j) = 0$ a $\sum_{j=0}^k a_j v(n+j) = 0$, což však znamená, že $u(n)$ a $v(n)$ jsou řešením rovnice (6.1).

## 6.3 Charakteristická rovnice má vícenásobný kořen

Následující věta nám dá návod, jak nalézt $s$ nezávislých partikulárních řešení příslušejících $s-$násobnému kořenu charakteristické rovnice.

**Věta 6.11:** Nechť má charakteristická rovnice dané diferenční rovnice $k$-tého řádu $s-$násobný kořen $\lambda_1$, kde $1 \leq s \leq k$. Pak má diferenční rovnice tato lineárně nezávislá partikulární řešení:

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= \lambda_1^n \\ \varphi_2(n) &= n\lambda_1^n \\ &\vdots \\ \varphi_s(n) &= n^{s-1}\lambda_1^n, \end{aligned}$$

tj. má za řešení posloupnost

$$\varphi_{1,2,\ldots,s}(n) = P_{s-1}(n)\lambda_1^n,$$

kde $P_{s-1}(n)$ je libovolný polynom stupně $s-1$.

Důkaz zde vzhledem k náročnosti formálních úprav nebudeme provádět. Čtenář ho však může nalézt v knize [1], str. 76.

**Poznámka 6.12:** Jestliže má charakteristická rovnice $s-$násobný imaginární kořen $\lambda_1 = r(\cos\omega + i\sin\omega)$, pak jsou posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_s(n)$ uvedené ve Větě 6.11 komplexní. Podle Věty 6.10 jsou však řešením reálné i imaginární části těchto posloupností, tj. hledaná lineárně nezávislá partikulární řešení jsou posloupnosti

$$\varphi_{1j}(n) = n^{j-1}r^n\cos\omega n \qquad \text{a} \qquad \varphi_{2j}(n) = n^{j-1}r^n\sin\omega n$$

pro $j = 1, 2, ..., s$.

**Příklad 6.13:** Nalezněte obecné řešení rovnice $y(n+6) - 2y(n+5) + 3y(n+4) - 4y(n+3) + 3y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0$.

*Řešení:* Charakteristická rovnice je

$$\lambda^6 - 2\lambda^5 + 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

což je kladně reciproká rovnice 6. stupně. Rovnici vydělíme $\lambda^3$ ($\lambda \neq 0$) a substitucí zavedeme pomocnou proměnnou $\lambda + \frac{1}{\lambda} = z$, pak $\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = z^2 - 2$ a $\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} = z^3 - 3z$. Dostáváme

$$z^3 - 3z - 2(z^2 - 2) + 3z - 4 = 0,$$

tj.

$$z^3 - 2z^2 = 0,$$

tedy $z_1 = 2$, $z_{2,3} = 0$. Vraťme se k původní proměnné $\lambda$. Kořen $z_1 = 2$ nás přivede k hodnotě $\lambda_{1,2} = 1$, dvojnásobný kořen $z_{2,3} = 0$ pak ke dvojnásobným imaginárním kořenům $\lambda_{3,4} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ a $\lambda_{5,6} = -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$. Podle Věty 6.11 a Poznámky 6.12 lze obecné řešení zapsat

$$y(n) = C_1 + C_2 n + C_3 \cos\frac{\pi}{2}n + C_4 n \cos\frac{\pi}{2}n + C_5 \sin\frac{\pi}{2}n + C_6 n \sin\frac{\pi}{2}n.$$

Po úpravě

$$y(n) = C_1 + C_2 n + \cos\frac{\pi}{2}n(C_3 + C_4 n) + \sin\frac{\pi}{2}n(C_5 + C_6 n).$$

## 6.4 Úlohy na procvičení

**Úloha 6.14:** Nalezněte obecné řešení a partikulární řešení určené počátečními podmínkami:

1. $y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 0,\ \ y(1) = -13,\ \ y(2) = -11$

   [OŘ: $y(n) = C_1 2^n + C_2(-3)^n$, PŘ: $y(n) = -5 \cdot 2^n + (-3)^n$]

2. $y(n+2) + 4y(n+1) - 12y(n) = 0,\ \ y(1) = -32,\ \ y(2) = 32$

   [OŘ: $y(n) = C_1 2^n + C_2(-6)^n$, PŘ: $y(n) = -5 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot (-6)^n$]

3. $y(n+2) + 4y(n+1) + 16y(n) = 0,\ \ y(1) = 2,\ \ y(2) = -40$

   [OŘ: $y(n) = C_1 4^n \cos\frac{2\pi}{3}n + C_2 4^n \sin\frac{2\pi}{3}n$,
   PŘ: $y(n) = 2 \cdot 4^n \cos\frac{2\pi}{3}n + \sqrt{3} \cdot 4^n \sin\frac{2\pi}{3}n$]

**Úloha 6.15:** Nalezněte funkční vzorec pro posloupnosti dané rekurentně:

1. $u(n+2) = 9u(n+1) - 18u(n),\ \ u(1) = 1,\ \ u(2) = 21$

   [$u(n) = -5 \cdot 3^{n-1} + 6^n$]

2. $u(n+2) = 2u(n+1) + 2u(n),\ \ u(1) = -1,\ \ u(2) = 1$

   [$u(n) = \frac{9+5\sqrt{3}}{12}(1-\sqrt{3})^n + \frac{9-5\sqrt{3}}{12}(1+\sqrt{3})^n$]

3. $u(n+2) = 2u(n+1) - 2u(n),\ \ u(1) = 2,\ \ u(2) = -2$

   [$u(n) = \sqrt{2}^n(3\cos\frac{\pi}{4}n - \sin\frac{\pi}{4}n)$]

**Úloha 6.16:** Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic

1. $y(n+3) + 8y(n) = 0$

   [$y(n) = C_1(-2)^n + C_2 2^n \cos\frac{\pi}{3}n + C_3 2^n \sin\frac{\pi}{3}n$]

2. $y(n+3) - 12y(n+2) + 48y(n+1) - 64y(n) = 0$

$$[y(n) = C_1 4^n + C_2 n 4^n + C_3 n^2 4^n]$$

3. $y(n+3) - 5y(n+2) - 4y(n+1) + 20y(n) = 0$

$$[y(n) = C_1 2^n + C_2 (-2)^n + C_3 5^n]$$

4. $y(n+3) - 3y(n+2) + 4y(n+1) - 12y(n) = 0$

$$[y(n) = C_1 2^n \cos \tfrac{\pi}{2} n + C_2 2^n \sin \tfrac{\pi}{2} n + C_3 3^n]$$

5. $y(n+4) - 2y(n+2) + y(n) = 0$

$$[y(n) = C_1 + C_2 n + C_3 (-1)^n + C_4 n (-1)^n]$$

**Úloha 6.17:** Řešete rovnice 1. typu:

[Návod: Rovnice 1. typu nejprve převeďte na rovnice 2. typu, které jsou již doposud vyloženými prostředky řešitelné]

1. $\Delta^2 y - \Delta y = 0$

$$[y(n) = C_1 + C_2 2^n]$$

2. $\Delta^3 y + 3\Delta^2 y + 3\Delta y = 0$

$$[y(n) = C_1 + C_2 \cos \tfrac{2\pi}{3} n + C_3 \sin \tfrac{2\pi}{3} n]$$

**Úloha 6.18:** Zjistěte, kolik „slov“ délky $n$ lze sestavit z písmen $A, B, C$ tak, aby žádné z nich neobsahovalo „podslovo“ typu $AA$ nebo $BA$.

[Návod: Uvažujte podobně jako v Příkladu 6.7. Je zřejmé, že slova končící písmenem $A$ musí mít na předposledním místě písmeno $C$.]

[Řešením rovnice $s(n+2) - 2s(n+1) - s(n) = 0$, $s(1) = 3$, $s(2) = 7$ dostanete $s(n) = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}]$.]

**Úloha 6.19:** Zjistěte, kolik „slov“ délky $n$ lze sestavit z písmen $A, B, C, D$ tak, aby žádné z nich neobsahovalo „podslovo“ typu $AB$, $BB$, $BC$, $CB$, $CC$.

[Návod: Promyslete si, že slova končící písmenem $B$ musí mít na předposledním místě písmeno $D$ a slova končící $C$ mohou mít na předposledním místě pouze $A$ nebo $D$.]

[Řešením rovnice $s(n+2) - 2s(n+1) - 3s(n) = 0$, $s(1) = 4$, $s(2) = 11$, dostanete $s(n) = \frac{1}{4}[5 \cdot 3^n + (-1)^{n+1}]$.]

# 7 Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zabývejme se rovnicí s konstantními koeficienty

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \dots + a_k y(n+k) = u(n), \tag{7.1}$$

kde $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$ jsou reálné konstanty. Připomeňme, že obecné řešení rovnice (7.1) je dáno součtem obecného řešení zhomogenizované rovnice a libovolného partikulárního řešení rovnice nehomogenní (viz Důsledek 5.13). Homogenní rovnice již umíme řešit, soustřeďme se nyní na nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. K tomu lze použít dva postupy: *metodu neurčitých koeficientů* (též nazýváme jako *metodu odhadu partikulárního řešení*) a nebo *metodu variace konstant*, což vyložíme v následujících podkapitolách.

## 7.1 Metoda neurčitých koeficientů

Tuto metodu je možno použít jen pro speciální pravé strany $u(n)$, a to pro posloupnosti typu $konst$, $n^k$, $q^n$, $\sin \alpha n$, $\cos \alpha n$ a posloupnosti utvořené součtem nebo součinem z nich. Z faktu, že jejich diference $1., 2., \dots$ až $k-$tého řádu a jejich lineární kombinace jsou opět posloupnosti téhož typu (viz kapitola 2), usuzujeme, že toto platí i obráceně. Známe-li výslednou posloupnost $u(n)$ utvořenou lineární kombinací $\sum_{j=0}^{k} a_j Z(n+j)$, pak posloupnost $Z(n)$ je stejného typu jako $u(n)$. Platí následující věta.

**Věta 7.1:** Nechť je dána rovnice s konstantními koeficienty

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \dots + a_k y(n+k) = P_m(n) q^n \cos \alpha n, \tag{7.2}$$

kde $P_m(n)$ je polynom stupně $m \geq 0$.

1. Nechť má charakteristická rovnice kořeny $\lambda_j \neq q(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Pak je partikulárním řešením rovnice (7.2) posloupnost tvaru

$$Z(n) = [Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \cos \alpha n] q^n,$$

kde $Q_m(n)$ a $R_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně $m$.

2. Nechť má charakteristická rovnice některý kořen $\lambda_j = q(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a to $s-$násobný, $s \geq 1$. Pak je partikulárním řešením rovnice (7.2) posloupnost tvaru

$$Z(n) = n^s [Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \cos \alpha n] q^n,$$

kde $Q_m(n)$ a $R_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně $m$.

**Poznámka 7.2:** Analogické tvrzení platí pro rovnici

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \dots + a_k y(n+k) = P_m(n) q^n \sin \alpha n.$$

Důkaz zde nebudeme provádět, protože je poměrně obtížný. Pokud se čtenář chce o této problematice dozvědět více, můžeme jej odkázat na knihu [3], kapitola 2.4, str. 70.

Při hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice postupujeme tak, že do dané diferenční rovnice dosadíme odhadnutý tvar $Z(n)$ (podle Věty 7.1, resp. Poznámky 7.2) s neurčitými koeficienty, které pak získáme porovnáním s koeficienty pravé strany $u(n)$.

**Příklad 7.3:** Najděte obecné řešení rovnice $y(n+2) - 8y(n+1) + 15y(n) = 130 \sin \frac{\pi}{2} n$.

*Řešení:* Nejprve najdeme obecné řešení zhomogenizované rovnice $y(n+2) - 8y(n+1) + 15y(n) = 0$. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 5$, takže obecné řešení homogenní rovnice je

$$Y(n) = C_1 3^n + C_2 5^n.$$

To znamená, že partikulární řešení nehomogenní rovnice předpokládáme ve tvaru

$$Z(n) = a \sin \frac{\pi}{2} n + b \cos \frac{\pi}{2} n.$$

Dosaďme do dané rovnice:

$$a \sin \frac{\pi}{2}(n+2) + b \cos \frac{\pi}{2}(n+2) - 8[a \sin \frac{\pi}{2}(n+1) + b \cos \frac{\pi}{2}(n+1)] +$$

$$+15[a \sin \frac{\pi}{2} n + b \cos \frac{\pi}{2} n] = 130 \sin \frac{\pi}{2} n.$$

Užitím součtových vzorců po úpravě dostáváme:

$$(14a + 8b) \sin \frac{\pi}{2} n + (-8a + 14b) \cos \frac{\pi}{2} n = 130 \sin \frac{\pi}{2} n.$$

Nyní porovnejme koeficienty:

$$\begin{aligned} 14a + 8b &= 130 \\ -8a + 14b &= 0, \end{aligned}$$

odkud $a = 7,\ b = 4$. Partikulární řešení rovnice je

$$Z(n) = 7 \sin \frac{\pi}{2} n + 4 \cos \frac{\pi}{2} n.$$

Konečně obecné řešení jsme nalezli ve tvaru

$$y(n) = C_1 3^n + C_2 5^n + 7 \sin \frac{\pi}{2} n + 4 \cos \frac{\pi}{2} n.$$

**Příklad 7.4:** Nalezněte obecné řešení rovnice $y(n+2) + 6y(n+1) + 9y(n) = (4n^2 + 4n)(-3)^{n+3}$.

*Řešení:* Charakteristická rovnice zhomogenizované rovnice je $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ a má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -3$. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$Y(n) = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n.$$

Proto partikulární řešení nehomogenní rovnice musíme hledat ve tvaru

$$Z(n) = n^2(an^2 + bn + c)(-3)^n.$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme:

$$(n+2)^2[a(n+2)^2 + b(n+2) + c](-3)^{n+2} + 6(n+1)^2[a(n+1)^2 + b(n+1) + c](-3)^{n+1} +$$

$$+9n^2(an^2 + bn + c)(-3)^n = (4n^2 + 4n)(-3)^{n+3}.$$

Rovnici vydělíme $(-3)^n$ a zjednodušíme:

$$108an^2 + (216a + 54b)n + 126a + 54b + 18c = -108n^2 - 108n.$$

Porovnáním koeficientů snadno vypočteme:

$$\begin{aligned} 108a = -108 \quad &\Rightarrow \quad a = -1, \\ 216a + 54b = -108 \quad &\Rightarrow \quad b = 2, \\ 126a + 54b + 18c = 0 \quad &\Rightarrow \quad c = 1. \end{aligned}$$

Hledané partikulární řešení je

$$Z(n) = n^2(-n^2 + 2n + 1)(-3)^n.$$

Obecné řešení diferenční rovnice je tvaru

$$y(n) = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n + n^2(-n^2 + 2n + 1)(-3)^n.$$

Snadno nahlédneme, že právě probíraný odhad partikulárního řešení $Z(n)$ úzce souvisí s výpočtem $k-$té sumace vyloženém v předchozím textu. Podle Věty 2.21 je

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}y(n+j) = \Delta^k y$$

a tedy rovnice 1. typu

$$\Delta^k y = P_k(n) q^n \cos \alpha n$$

je speciálním případem rovnice (7.2).

**Poznámka 7.5:** Metodou neurčitých koeficientů lze řešit i rovnice se „složitější“ pravou stranou, než bylo uvedeno ve Větě 7.1. Je-li pravá strana rovnice (7.1) součtem $u_1(n) + u_2(n)$, kde $u_1(n)$ a $u_2(n)$ jsou speciálního tvaru ve smyslu Věty 7.1, je-li $Z_1(n)$ partikulární řešení rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j y(n+j) = u_1(n)$ a je-li $Z_2(n)$ partikulární řešení rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j y(n+j) = u_2(n)$, pak podle principu superpozice (Věta 5.11) víme, že $Z_1(n) + Z_2(n)$ je partikulární řešení rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j y(n+j) = u_1(n) + u_2(n)$.

V následující podkapitole uvedeme příklad, ve kterém zmíněné skutečnosti využijeme.

## 7.2 Metoda variace konstant

Tato metoda je obecná a nevyžaduje speciální tvar pravé strany řešené rovnice (7.1). Nechť

$$Y(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n) \tag{7.3}$$

je obecné řešení příslušné zhomogenizované rovnice

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + ... + a_k y(n+k) = 0. \tag{7.4}$$

Metoda variace konstant spočívá v nahrazení konstant $C_j$ ve tvaru (7.3) posloupnostmi $C_j(n)$. Hledejme tedy partikulární řešení rovnice (7.1) ve tvaru

$$Z(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n).$$

K určení $k$ neznámých posloupností $C_j(n)$ je třeba $k$ rovnic. Jednou z nich je samozřejmě rovnice (7.1), zbylých $k-1$ rovnic si vhodně zvolíme při tvoření hodnot $Z(n+1), Z(n+2), ..., Z(n+k)$. Z Definice 2.2 plyne

$$C_j(n+1) = C_j(n) + \Delta C_j(n),$$

proto

$$Z(n+1) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n+1)\varphi_j(n+1) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+1) + \sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+1).$$

Zvolme $C_j(n)$ tak, aby

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+1) = 0,$$

tedy

$$Z(n+1) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+1).$$

To ale znamená, že

$$Z(n+2) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n+1)\varphi_j(n+2) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+2) + \sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+2).$$

Zvolme opět $C_j(n)$ tak, aby

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+2) = 0,$$

tedy

$$Z(n+2) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+2).$$

Popsaným způsobem postupujeme až k $Z(n+k-1)$, čímž získáme zmíněných $k-1$ rovnic. Konečně

$$Z(n+k) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n+1)\varphi_j(n+k) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+k) + \sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+k).$$

Vyjádřené hodnoty $Z(n), Z(n+1), ..., Z(n+k)$ dosaďme do rovnice (7.1):

$$a_0 \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n) + a_1 \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+1) + ... + a_{k-1} \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+k-1) +$$
$$+ a_k \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n+k) + a_k \sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+k) = u(n).$$

V této rovnici se objevují hodnoty posloupností $C_j$ vždy ve stejném bodě $n$, což jsou jistá čísla. Lze tedy říci, že kromě posledního členu je součet sum na pravé straně rovnice roven nule, neboť je to vlastně levá strana rovnice (7.4). Poslední $k-$tá rovnice pro $\Delta C_j$, $j = 1, 2, ..., k$ je tedy tvaru

$$a_k \sum_{j=1}^{k} \Delta C_j(n)\varphi_j(n+k) = u(n).$$

Dostali jsme lineární soustavu $k$ rovnic pro $k$ neznámých $\Delta C_j(n)$, $j = 1, 2, ..., k$ :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+1)\Delta C_j(n) &= 0, \\ \textstyle\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+2)\Delta C_j(n) &= 0, \\ &\vdots \\ \textstyle\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+k-1)\Delta C_j(n) &= 0, \\ a_k \textstyle\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(n+k)\Delta C_j(n) &= u(n). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Protože posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé, je determinant matice soustavy nenulový a existuje jediné nenulové řešení, ze kterého sumací vypočteme hledané posloupnosti $C_j(n)$. Výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$C_j(n) = K_j(n) + K_j, \quad j = 1, ..., k,$$

kde $K_j$ jsou libovolné konstanty vzniklé při sumacích a $K_j(n)$ jsou jisté posloupnosti závisející na pravé straně $u(n)$. Neboť nám stačí najít jediné partikulární řešení, zvolme $K_1 = K_2 = ... = K_k = 0$. Našli jsme tedy partikulární řešení rovnice (7.1) ve tvaru

$$Z(n) = \sum_{j=1}^{k} K_j(n)\varphi_j(n)$$

a tím jsme odvodili větu.

**Věta 7.6:** Nechť $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7.4). Nechť diference posloupností $C_1(n), C_2(n), ..., C_k(n)$ jsou řešením systému (7.5). Pak posloupnost

$$Z(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j(n)\varphi_j(n)$$

je partikulárním řešením rovnice (7.1).

**Příklad 7.7:** Nalezněte obecné řešení rovnice $y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = 2^{2n+1} - 7 \cdot 5^n$.

*Řešení:* Nejprve najděme fundamentální systém řešení zhomogenizované rovnice $y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = 0$. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$. Tedy

$$\varphi_1(n) = 1, \qquad \varphi_2(n) = 5^n.$$

1. způsob: Hledejme partikulární řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant:

$$Z(n) = C_1(n) + C_2(n) \cdot 5^n.$$

Podle (7.5) musíme řešit soustavu:

$$\begin{aligned} \Delta C_1(n) + 5^{n+1}\Delta C_2(n) &= 0, \\ \Delta C_1(n) + 5^{n+2}\Delta C_2(n) &= 2^{2n+1} - 7 \cdot 5^n. \end{aligned}$$

Rozřešíme-li ji, dostáváme:

$$\begin{aligned} \Delta C_1(n) &= -\frac{1}{2} \cdot 4^n + \frac{7}{4} \cdot 5^n, \\ \Delta C_2(n) &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

Podle vlastností sumace předpokládáme

$$\begin{aligned} C_1(n) &= a \cdot 4^n + b \cdot 5^n, \\ C_2(n) &= c \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + dn. \end{aligned}$$

Vypočteme-li odtud $\Delta C_1(n)$ a $\Delta C_2(n)$ a porovnáme-li koeficienty, získáme

$$\begin{aligned} C_1(n) &= -\frac{1}{6} \cdot 4^n + \frac{7}{16} \cdot 5^n, \\ C_2(n) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{7}{20}n. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě dostáváme partikulární řešení ve tvaru

$$Z(n) = -\frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{7}{20} n \cdot 5^n + \frac{7}{16} \cdot 5^n,$$

přičemž člen $\frac{7}{16} \cdot 5^n$ lze zahrnout do obecného členu $C_2 5^n$, takže obecné řešení je

$$y(n) = C_1 + C_2 5^n - \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{7}{20} n \cdot 5^n.$$

2. způsob: Hledejme partikulární řešení nehomogenní rovnice metodou neurčitých koeficientů. Postupujme podle Poznámky 7.5. Nejprve hledejme partikulární řešení rovnice

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = 2 \cdot 4^n.$$

Podle Věty 7.1 toto řešení předpokládáme ve tvaru

$$Z_1(n) = a \cdot 4^n.$$

Dosaďme do dané rovnice

$$a \cdot 4^{n+2} - 6a \cdot 4^{n+1} + 5a \cdot 4^n = 2 \cdot 4^n,$$

odkud přímo vypočteme, že $a = -\frac{2}{3}$. Tedy

$$Z_1(n) = -\frac{2}{3} \cdot 4^n.$$

Nyní hledejme partikulární řešení rovnice

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = -7 \cdot 5^n.$$

Protože $\lambda_2 = 5$ je kořenem charakteristické rovnice, musíme toto řešení předpokládat ve tvaru

$$Z_2(n) = n \cdot a \cdot 5^n.$$

Dosaďme do výchozí rovnice

$$(n+2) \cdot a \cdot 5^{n+2} - 6(n+1) \cdot a \cdot 5^{n+1} + 5n \cdot a \cdot 5^n = -7 \cdot 5^n.$$

Přímým výpočtem dostaneme $a = -\frac{7}{20}$. Tudíž

$$Z_2(n) = -\frac{7}{20} n \cdot 5^n.$$

Podle principu superpozice je partikulární řešení naší rovnice

$$Z(n) = Z_1(n) + Z_2(n) = -\frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{7}{20} n \cdot 5^n.$$

Obecné řešení je tedy

$$y(n) = C_1 + C_2 5^n - \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{7}{20} n \cdot 5^n.$$

Všimněme si, že partikulární řešení vypočtené metodou variace konstant nemusí být stejné jako partikulární řešení, které nalezneme metodou neurčitých koeficientů, jak je vidět i v Příkladu 7.7. To nás však nemusí překvapovat, protože víme, že partikulární řešení není určeno jednoznačně.

## 7.3 Úlohy na procvičení

**Úloha 7.8:** Nalezněte obecné řešení následujících rovnic (partikulární řešení nehomogenní rovnice hledejte metodou neurčitých koeficientů):

1. $y(n+2) - 3y(n+1) - 4y(n) = 12n^2 - 2n + 15$

$$[y(n) = C_1(-1)^n + C_2 4^n - 2n^2 + n - 3]$$

2. $y(n+2) - 7y(n+1) + 10y(n) = -260\cos\frac{\pi}{2}n$

$$[y(n) = C_1 2^n + C_2 5^n + 14\sin\tfrac{\pi}{2}n - 18\cos\tfrac{\pi}{2}n]$$

3. $y(n+2) + 6y(n+1) + 9y(n) = 2(3n+2)(-3)^{n+2}$

$$[y(n) = (C_1 + C_2 n)(-3)^n + n^2(n-1)(-3)^n]$$

4. $9y(n+2) - 12y(n+1) + 4y(n) = 3 - 2n$

$$[y(n) = (C_1 + C_2 n)(\tfrac{2}{3})^n - 2n + 15]$$

**Úloha 7.9:** Nalezněte obecné řešení následujících rovnic (partikulární řešení nehomogenní rovnice hledejte metodou variace konstant):

1. $2y(n+1) - 6y(n) = 3^n - n \cdot 2^{-n}$

$$[y(n) = C_1 3^n + \tfrac{n}{2} \cdot 3^{n-1} + (\tfrac{n}{5} + \tfrac{1}{25}) \cdot 2^{-n}]$$

2. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 3^n - n$

$$[y(n) = C_1 2^n + C_2 3^n + n \cdot 3^{n-1} - \tfrac{n}{2} - \tfrac{3}{4}]$$

3. $y(n+2) - 10y(n+1) + 25y(n) = 5^n - 2n$

$$[y(n) = (C_1 + C_2 n)5^n + \tfrac{n^2}{50} \cdot 5^n - \tfrac{n}{8} - \tfrac{1}{16}]$$

**Úloha 7.10:** Zjistěte, kolik „slov“ délky $n$ lze sestavit z písmen $A, B, C$ tak, aby žádné z nich neobsahovalo „podslovo“ typu $AC$ nebo $BC$.

[Návod: Uvažujte podobně jako v Příkladu 6.7. Promyslete si, že slovo končící písmenem $C$ je jediné, protože musí mít každé předchozí písmeno rovněž $C$.]

[Řešením rovnice $s(n+1) - 2s(n) = 1$, $s(1) = 3$ dostanete $s(n) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.]

# 8 Lineární diferenční rovnice 1. řádu s nekonstantními koeficienty

V této závěrečné kapitole alespoň nastíníme problematiku řešení rovnic s nekonstantními koeficienty a sice ukážeme postup řešení lineární diferenční rovnice 1. řádu.

Uvažujme rovnici

$$a_1(n)y(n+1) + a_0(n)y(n) = u(n). \tag{8.1}$$

Podle Definice 5.1 víme, že $a_1(n) \neq 0$ a $a_0(n) \neq 0$ a proto rovnici (8.1) můžeme vydělit $a_1(n)$. Označíme-li $\frac{a_0(n)}{a_1(n)} = -A(n)$ a $\frac{u(n)}{a_1(n)} = B(n)$, dostáváme

$$y(n+1) - A(n)y(n) = B(n). \tag{8.2}$$

Nejprve budeme řešit zhomogenizovanou rovnici. Její obecné řešení označme $Y(n)$, $y(n)$ pak bude značit obecné řešení rovnice nehomogenní.

Na rovnici

$$Y(n+1) - A(n)Y(n) = 0 \tag{8.3}$$

můžeme pohlížet jako na rekurentní vzorec, který také říká, že

$$\begin{aligned} Y(n) &= A(n-1)Y(n-1), \\ Y(n-1) &= A(n-2)Y(n-2), \\ &\vdots \\ Y(2) &= A(1)Y(1), \end{aligned}$$

kde $Y(1)$ značí počáteční hodnotu posloupnosti $Y(n)$ v bodě $n = 1$, což je libovolná konstanta; označme ji $C$. Postupným zpětným dosazováním za $Y(2), Y(3)$, ..., $Y(n-1)$ dostáváme

$$Y(n) = C \cdot A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(n-1) = C \prod_{j=1}^{n-1} A(j), \tag{8.4}$$

což je obecné řešení rovnice (8.3).

Jedním z prvních pojmů, se kterými se setkáváme ve středoškolské kombinatorice, je permutace z $n$ prvků. Tímto pojmem se rozumí každá uspořádaná $n-$tice sestavená z daných $n$ prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou. Následující příklad ukazuje jeden ze způsobů, jak určit počet všech permutací z $n$ prvků.

**Příklad 8.1:** Vypočtěte, kolik permutací lze sestavit z $n$ prvků ($n \in \mathbf{N}$).

*Řešení:* Hledaný počet permutací z $n$ prvků označme $P(n)$. Uvažme o rozdělení $P(n+1)$ permutací do skupin podle toho, který prvek je na prvním místě. Touto úvahou jsme $P(n+1)$ permutací rozdělili do $n+1$ skupin, z nichž každá obsahuje právě $P(n)$ permutací. Tímto jsme odvodili rekurentní vzorec

$$P(n+1) = (n+1)P(n),$$

což je však homogenní lineární diferenční rovnice 1. řádu s nekonstantními koeficienty, kterou přepišme do obvyklejšího tvaru

$$P(n+1) - (n+1)P(n) = 0.$$

Přitom zřejmě platí $P(1) = 1$. Podle (8.4) je obecné řešení této rovnice tvaru

$$P(n) = C \prod_{j=1}^{n-1} (j+1) = C \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

kde $C = P(1) = 1$, tedy pro hledaný počet permutací platí

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

K nalezení obecného řešení rovnice (8.2) potřebujeme znát aspoň jedno partikulární řešení $Z(n)$ této rovnice. Budeme postupovat metodou variace konstanty. Partikulární řešení $Z(n)$ tedy předpokládáme ve tvaru

$$Z(n) = u(n) \cdot v(n), \tag{8.5}$$

kde $u(n)$ je nenulové řešení příslušné homogenní rovnice a $v(n)$ neznámá posloupnost, kterou potřebujeme určit. Podle (8.4) můžeme psát $u(n) = \prod_{j=1}^{n-1} A(j)$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$Z(n+1) = u(n+1) \cdot v(n+1) = A(n) \cdot u(n)[v(n) + \Delta v(n)]. \tag{8.6}$$

Dosaďme (8.6) a (8.5) do (8.2):

$$A(n) \cdot u(n)[v(n) + \Delta v(n)] - A(n) \cdot u(n) \cdot v(n) = B(n),$$

tj.

$$A(n) \cdot u(n) \cdot \Delta v(n) = B(n).$$

Protože $A(n) \neq 0,\ u(n) \neq 0$ platí

$$\Delta v(n) = \frac{B(n)}{A(n) \cdot u(n)} = \frac{B(n)}{u(n+1)}.$$

Podle Věty 3.18 dostáváme

$$v(n) - v(1) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B(j)}{u(j+1)},$$

kde $v(1)$ značí počáteční hodnotu hledané posloupnosti $v(n)$ v bodě $n = 1$, což je libovolná konstanta. Protože nám stačí nalézt jedno řešení $Z(n)$, můžeme zvolit $v(1) = 0$. Máme tedy

$$v(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B(j)}{u(j+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B(j)}{\prod_{i=1}^{j} A(i)}.$$

Nyní dosaďme za $u(n)$ a $v(n)$ do (8.5)

$$Z(n) = u(n) \cdot v(n) = \prod_{j=1}^{n-1} A(j) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B(j)}{\prod_{i=1}^{j} A(i)}. \tag{8.7}$$

Ve tvaru (8.7) jsme nalezli partikulární řešení rovnice (8.2). Můžeme již zapsat i obecné řešení této rovnice, protože podle Důsledku 5.13 víme, že je součtem obecného řešení (8.4) zhomogenizované rovnice (8.3) a jistého partikulárního řešení (8.7) nehomogenní rovnice (8.2). Tudíž

$$y(n) = C \prod_{j=1}^{n-1} A(j) + \prod_{j=1}^{n-1} A(j) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B(j)}{\prod_{i=1}^{j} A(i)}.$$

Diferenční rovnici (8.2) jsme vyřešili podobným způsobem, jakým bychom řešili diferenciální rovnici

$$y' - A(x)y = B(x), \tag{8.8}$$

kde $A(x)$, $B(x)$ jsou spojité funkce. Popišme v nejhrubších rysech postup řešení rovnice (8.8).

- Nejprve vyřešíme zhomogenizovanou rovnici $y' - A(x)y = 0$. Její obecné řešení lze psát ve tvaru

  $$Y(x) = K \cdot e^{\int A(x)dx},$$

  kde $K$ je reálná konstanta.

- Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstant: řešení předpokládáme ve tvaru $Z(x) = K(x) \cdot e^{\int A(x)dx}$, tedy ve tvaru součinu jistého nenulového řešení zhomogenizované rovnice a neznámé funkce $K(x)$, kterou vypočteme po dosazení předpokládaného řešení do rovnice (8.8).
- Obecné řešení rovnice (8.8) dostaneme jako součet obecného řešení zhomogenizované rovnice a jednoho partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

**Příklad 8.3:** Řešte rovnici $ny(n+1) - (n+1)y(n) = n^3 + 4n^2 + 3n$.

*Řešení:* Protože $n > 0$ lze rovnici upravit na tvar

$$y(n+1) - \frac{n+1}{n}y(n) = n^2 + 4n + 3,$$

$A(n) = \frac{n+1}{n}$, $B(n) = n^2 + 4n + 3$. Nejprve podle (8.4) vypočtěme, jakého tvaru je obecné řešení zhomogenizované rovnice:

$$Y(n) = C\prod_{j=1}^{n-1} A(j) = C\prod_{j=1}^{n-1}\frac{j+1}{j} = C \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = Cn.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice vypočteme podle vzorce (8.7). K tomu pro větší přehlednost výpočtu nejprve vyjádřeme $u(n)$ a $v(n)$. Již víme, že

$$u(n) = \prod_{j=1}^{n-1} A(j) = n$$

a zbývá nám provést výpočet:

$$\begin{aligned} v(n) &= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{B(j)}{\prod_{i=1}^{j} A(i)} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j^2+4j+3}{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{(j+1)(j+3)}{j+1} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}(j+3) = \left[\frac{j^2+5j}{2}\right]_1^n = \frac{1}{2}(n^2+5n-6). \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je tedy:

$$Z(n) = u(n) \cdot v(n) = \frac{n}{2}(n^2+5n-6) = \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2} - 3n.$$

Konečně pro obecné řešení platí:

$$y(n) = Y(n) + Z(n) = Cn + \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2} - 3n = (C-3)n + \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2}.$$

Výraz $C - 3$ je libovolná konstanta (neboť $C$ je libovolné), označme ji $K$. Nalezli jsme obecné řešení ve tvaru

$$y(n) = Kn + \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{2}.$$

Poznamenejme, že o správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou. To však již ponecháme na čtenáři.

**Úloha 8.4:** Nalezněte obecné řešení následujících rovnic:

1. $y(n+1) - \frac{n+3}{n+1}y(n) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$

   $[y(n) = K(n^2+3n+2) + \frac{1}{2}(n^4+4n^3+5n^2+2n)]$

2. $ny(n+1) - (n+2)y(n) = n^4 + 3n^3 + 2n^2$

   $[y(n) = K(n^2+n) + \frac{1}{2}(n^4-n^2)]$

# Literatura


[1] A.Prágerová, *Diferenční rovnice*, SNTL, Praha, 1971.

[2] R.P.Agarwal, *Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods, and Applications*, Pure and Appl. Math., M.Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[3] S.N.Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer Uerlag, New York, 1996.

[4] W.G.Kelly, A.C.Peterson, *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Academic Press, San Diego, 1991.

[5] J.Herman, R.Kučera, J.Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, skripta MU, Brno, 1996.

[6] J.Herman, R.Kučera, J.Šimša, *Metody řešení matematických úloh II*, skripta MU, Brno, 1997.

[7] P.Horák, J.Janyška, *Analytická geometrie*, skripta MU, Brno, 1997.

[8] P.Horák, *Algebra a teoretická aritmetika I.*, skripta MU, Brno, 1994.

[9] I.Bušek, *Řešené maturitní úlohy z matematiky*, Prometheus, Praha, 1999.

[10] F.Vejsada, F. Talafous, *Sbírka úloh z matematiky pro gymnásia*, SPN, Praha, 1969.