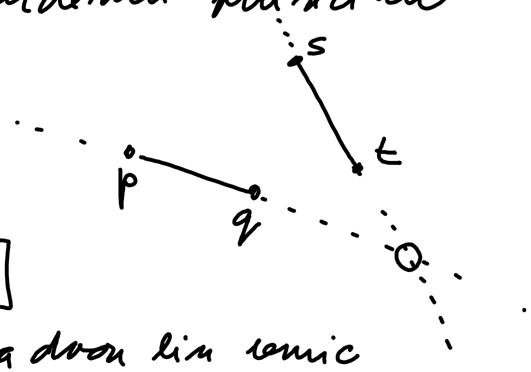
Priesečníky úsečiek

(Metóda zametacej priamky - sweeping line)

$S = \{ s_1, s_2, .. s_n \}$ množina n úsečiek v rovine

Chceme spočítať priesečníky (všetky, ale každému priesečníku chceme zoznam všetkých úsečiek, na ktorých leží)



$\left. \begin{matrix} p\ q \\ s\ t \end{matrix} \right\}$ dve úsečky

$\lambda p + (1-\lambda) q \qquad \lambda \in [0,1]$

$\mu s + (1-\mu) t \qquad \mu \in [0,1]$

$$\lambda p + (1-\lambda) q = \mu s + (1-\mu) t$$

V súradniciach

$$\lambda p_x + (1-\lambda) q_x = \mu s_x + (1-\mu) t_x$$
$$\lambda p_y + (1-\lambda) q_y = \mu s_y + (1-\mu) t_y$$

Sústava dvoch lin. rovníc o neznámych λ, μ.

2

Naivní algoritmus

Vezmeme všechny dvojice s_i, s_j $i<j$ a spočítáme zda mají průsečík

Dvojic $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Náročnost tohoto algoritmu je $O(n^2)$

Chceme algoritmus, jehož náročnost závisí na počtu průsečíků.

n úseček má k průsečíků

Časová náročnost by měla být závislá na n a k.

3

Metoda zametací přímky

je pomyslná vodorovná přímka ℓ, která v našem algoritmu je spouštěna nad všemi úsečkami množiny S.

Během algoritmu se posunuje dolů a když přechází význačnými body (události, events) tak v algoritmu probíhá nějaká akce.

Struktury spojené s metodou zametací přímky

- fronta událostí – události seřazené shora dolů a zleva doprava lexikografické uspořádání $\boxed{p \text{ je před } q}$ $p_y > q_y$ nebo $p_y = q_y$ a $p_x < q_x$.

4

Fronta událostí se v průběhu algoritmu mění

- událost, přes kterou projde zametací přímka, je z fronty vyjmuta
- některé další události mohou ve frontě přibýt

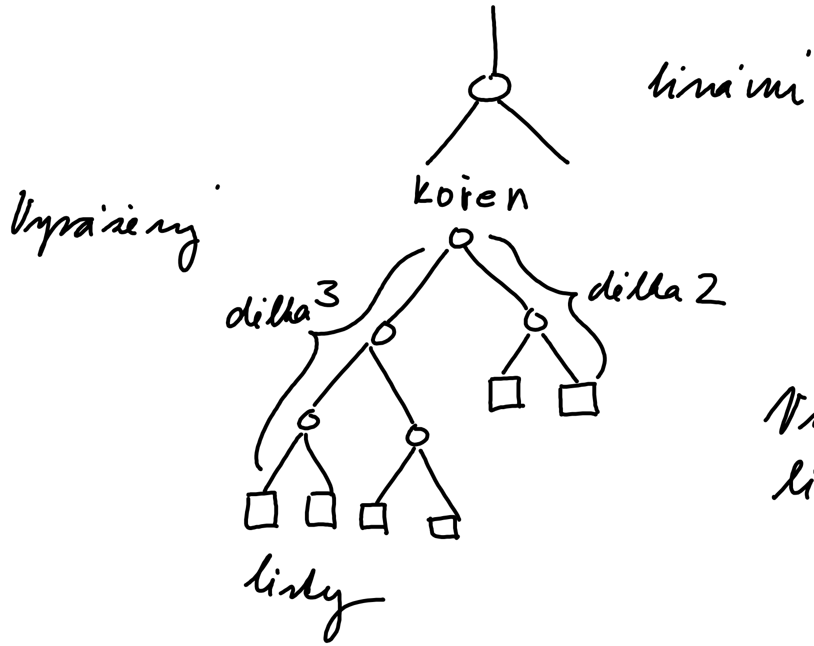
V našem případě

na začátku je fronta událostí tvořena všemi koncovými body úseček. V průběhu algoritmu přibývají ve frontě spočítané průsečíky úseček, které leží pod zametací přímkou

5

Další struktura je vyvážený binární strom

Strom je souvislý graf bez kružnice

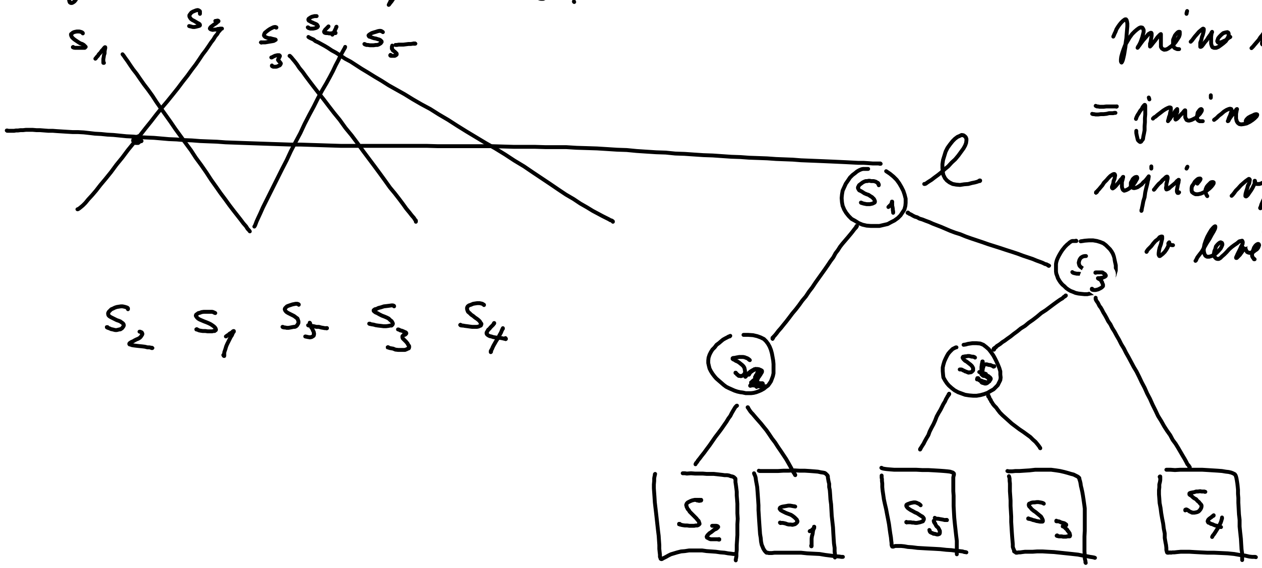


Od kořene k listům se délka cest neliší o více než 1

Vyvážený strom určuje pořadí listů.

(6)

V případě našeho algoritmu může pořadí listů vyváženého binárního stromu pořadí úseček (zleva doprava), ve kterém protínají zametací přímku.



jméno uzlu = jméno listu nejvíce vpravo v levém podstromu

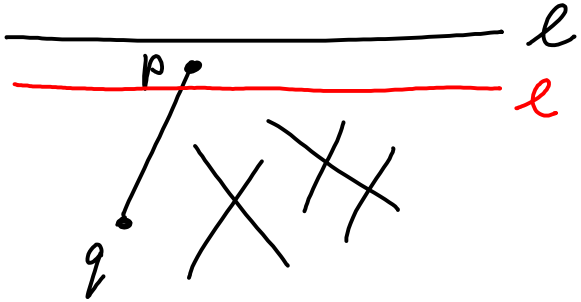
(7)

Na začátku všechny koncové body úseček ve frontě

Bin vyvážený strom T je prázdný

Zametací přímka prochází shora dolů. Co se děje při příchodu události p.

První událost



p vyjmeme z fronty Q

Strom T bude obsahovat jediný list

$\boxed{p}$

Tak v tomto případě vše

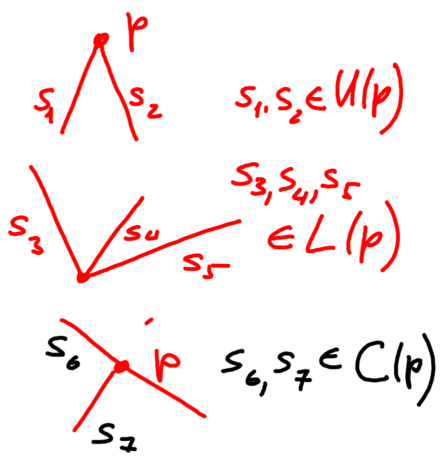
8

Príchod udalosti p obecně

$U(p)$ ty úsečky z S, které mají p za horní vrchol

$L(p)$ —"— , —"— za dolní vrchol

$C(p)$ ty úsečky z S, které mají p „uprostřed"



Vyndáme $L(p) \cup C(p)$ ze stromu T a přidáme $U(p) \cup C(p)$ only do stromu T.

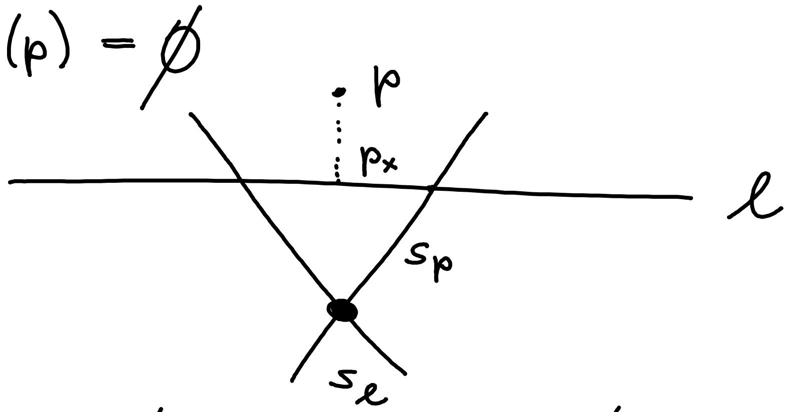
Vyvažování stromu při každém odebrání a přidání prvku.

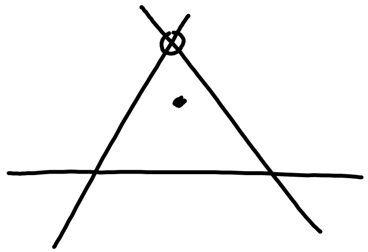
Strom s n listy, vyvážený, má čas $\log n$.

9

Akce vyhazující ze fronty a počítání průsečíků

① $U(p) \cup C(p) = \emptyset$

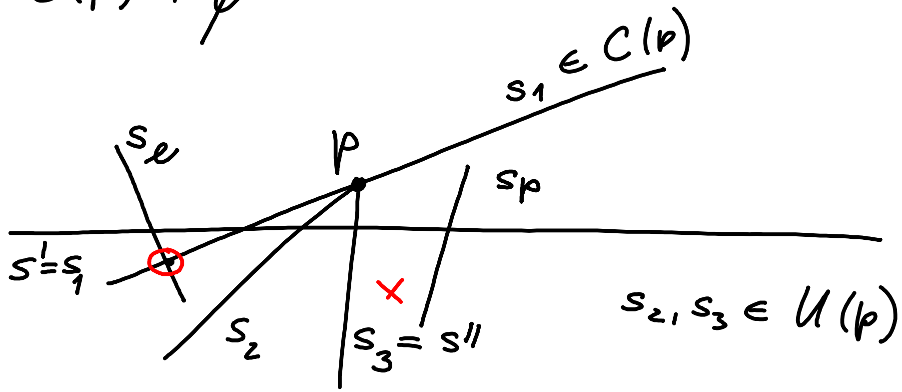




• $s_e \cap s_p$ je neprázdný a leží pod l (y souřadnice < p_y)
v tomto případě přidáme bod do fronty

(10)

② $U(p) \cup C(p) \neq \emptyset$



Z $U(p) \cup C(p)$ vybereme úsečku nejvíce vlevo s'

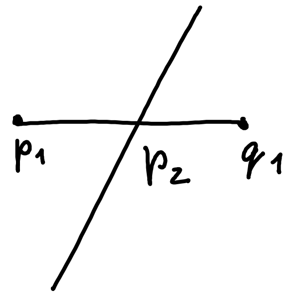
úsečku nejvíce vpravo s''

s_l nejbližší úsečka vlevo od s' počítáme $s_l \cap s'$

s_p nejbližší úsečka vpravo od s'' $s_p \cap s''$

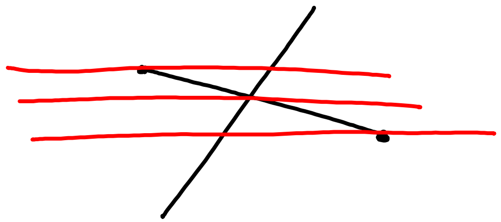
Společné průsečíky pod zametací přímkou zařadíme do fronty.

11



$p_1 \; p_2 \; q_1$

Geometrická představa .... malinko ohneme ve směru hod ručiček



(12)

Věta. Algoritmus zpracuje všechny průsečíky.

Věta. Časová náročnost algoritmu je $O((n+k)\log n)$, kde n je počet úseček a k počet průsečíků.

Seřazení $2n$ bodů lexikograficky trvá čas $O(n \log n)$

$m(p)$ = počet prvků množiny $U(p) \cup C(p) \cup L(p)$ pro každé p.

Časová náročnost průchodu bodem p je maximálně $2m(p)$ vyřešení po $O(\log n)$

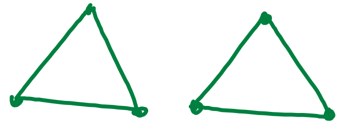
Čas. nároč. $2m(p) \log n$ počítání průsečíku $O(1)$

(13)

Čas načítání

$$O\Big(\sum_p{}' m(p) \log n + \sum_p{}' 1\Big) \le O\Big(\sum{}' m(p) \log n + (2n+k)\Big)$$

Chceme dokázat, že $\sum_p{}' m(p) = O(n+k)$



$n_v = 6$ $n_e = 6$ $n = 3$

$6 - 3 + 6 - 3 = 2$

Eulerova věta pro rovinný graf

Rovinný graf lze nakreslit do roviny tak, že žádné dvě hrany se neprotínají

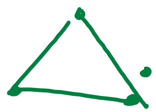
vrcholy .... počet n_v

hrany n_e (e edge)

oblasti n_f (f face)

$n_v - n_e + n_f \ge 2$

je-li graf souvislý, pak $n_v - n_e + n_f = 2$



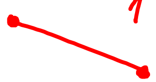
$n_v = 3$ $n_e = 3$

14

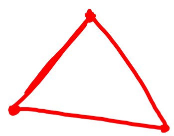
Lemma $n_f \le \frac{2 n_e}{3} + 1$

Dk. 1 hrana musí mít maximálně dvě oblasti

1 oblast je ohraničena aspoň 3 hranami



$1 = n_f \le \frac{2}{3} + 1$



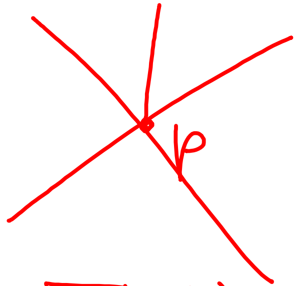
$2 \le \frac{2 \cdot 3}{3} + 1 = 3$

Odhad $\sum n(p)$

Úsečky $s_1, s_2, \dots s_n$ vykresleme jako rovinný graf, kde vrcholy jsou všechny koncové body a všechny průsečíky $n_v = 2n + k$

15

Stupeň uzlu p . . . s(p) .. počet hran, které do něj vcházejí



$m(p) = 3$

$s(p) = 5$ $\qquad m(p) \le s(p)$

Graf $\sum_{p \text{ uzel}} s(p) = 2n_e$

$n_f \le \frac{2}{3} n_e + 1$

$n_v - n_e + n_f \ge 2$

$n_v - n_e + \frac{2}{3} n_e + 1 \ge 2$

$3n_v + 3 - 6 \ge n_e$

n_e

Odtud:

$$\sum_p m(p) \le \sum s(p) = 2n_e =$$