

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta A

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte

- (a) *regulární* kuželosečku,
- (b) *singulární bod* kuželosečky.

2. Na přímce $p = \{[5 - 4t, -5 + 6t, t], t \in \mathbb{R}\}$ najděte bod M , který má od roviny $\rho : 2x - y + 2z + 3 = 0$ vzdálenost 2 j. Určete všechna řešení této úlohy. (3 body)

3. Najděte množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které mají od přímky $p : x = 3$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $M = [0; 3]$. Pokud se jedná o regulární kuželosečku, klasifikujte ji, najděte její střed a délky poloos (respektive vrchol a parametr). (4 body)

4. Necht' je dána kuželosečka

$$k : x^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Kuželosečku k klasifikujte (tzn. určete její druh, ohniska a středy či vrcholy). Bodem $R = [1; -2]$ pak veďte všechny přímky (tzn. určete obecné rovnice příslušných přímek), které mají s k právě jeden společný bod, u případných tečen najděte i dotykové body. V případě, že tečny existují právě dvě, vypočítejte délku tětivy T_1T_2 , kde T_1 a T_2 značí body dotyku těchto tečen s kuželosečkou k . (8 bodů)

5. Určete střed a poloměr kulové plochy

$$\kappa : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z - 4 = 0.$$

Dále najděte všechna $d \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že průnikem roviny

$$\rho : 2x - 3y - 6z + d = 0$$

a kulové plochy κ je kružnice o poloměru 4 j. (4 body)

6. Necht' je dána kuželosečka

$$k : -2x^2 + xy + y^2 + 7x + 5y + 4 = 0.$$

- (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.
- (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k .
- (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k .
- (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinnového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

(6 bodů)

7. **Nepovinná bonusová úloha.** Každé z následujících tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.

- (a) Jestliže je kuželosečka k singulární, tak má nejvýše jeden střed.
- (b) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak každý její střed musí být singulárním bodem.

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta B

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte

- (a) *singulární* kuželosečku,
- (b) *střed* kuželosečky.

2. Na přímce $p = \{[-4 + 4t, -5 + 3t, 9 - 4t], t \in \mathbb{R}\}$ najděte bod M , který má od roviny $\rho : x + 2y - 2z + 5 = 0$ vzdálenost 3 j. Určete všechna řešení této úlohy. (3 body)

3. Najděte množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které mají od přímky $p : y = 3$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $M = [2; 0]$. Pokud se jedná o regulární kuželosečku, klasifikujte ji, najděte její střed a délky poloos (respektive vrchol a parametr). (4 body)

4. Necht' je dána kuželosečka

$$k : y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Kuželosečku k klasifikujte (tzn. určete její druh, ohniska a středy či vrcholy). Bodem $R = [-2; 1]$ pak veďte všechny přímky (tzn. určete obecné rovnice příslušných přímek), které mají s k právě jeden společný bod, u případných tečen najděte i dotykové body. V případě, že tečny existují právě dvě, vypočítejte délku tětivy T_1T_2 , kde T_1 a T_2 značí body dotyku těchto tečen s kuželosečkou k . (8 bodů)

5. Určete střed a poloměr kulové plochy

$$\kappa : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 155 = 0.$$

Dále najděte všechna $d \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že průnikem roviny

$$\rho : 4x - y - 8z + d = 0$$

a kulové plochy κ je kružnice o poloměru 12 j. (4 body)

6. Necht' je dána kuželosečka

$$k : -2x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 4 = 0.$$

- (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.
- (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k .
- (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k .
- (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinnového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

(6 bodů)

7. **Nepovinná bonusová úloha.** Každé z následujících tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.

- (a) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak má přímku středů.
- (b) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak má alespoň jeden singulární bod.

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta C

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte

- (a) kuželosečku,
- (b) asymptotický směr kuželosečky.

2. Necht' je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a . Vypočtete odchylku přímky \overleftrightarrow{DF} a roviny $\overleftrightarrow{AS_{CG}H}$, kde S_{CG} značí střed hrany CG . Výsledek vyjádřete s přesností právě na jednotky minut. (4 body)

3. Necht' je dána elipsa

$$e : 25x^2 + 16y^2 + 150x - 32y - 159 = 0.$$

Najděte její hlavní vrcholy a vypočtete obsah čtyřúhelníku, který má vrcholy ve vedlejších vrcholech a ohniscích elipsy e . (4 body)

4. Necht' je dána kuželosečka

$$k : xy - 3x - 2 = 0$$

a bod $M = [-1; 1]$. Kuželosečku k klasifikujte, tzn. pojmenujte ji, určete její střed, vrcholy, ohniska, osy, asymptoty a délky poloos (případně uveďte, které z uvedených objektů kuželosečka k nemá). Dále najděte rovnice všech přímek, které prochází bodem M a mají s kuželosečkou k právě jeden společný bod. (8 bodů)

5. Najděte středovou rovnici kulové plochy, která má tečnou rovinu $\tau : 2x - 3y + 6z - 11 = 0$ a střed $S = [-2; 4; 1]$. Dále určete její průsečíky s osou y . (3 body)

6. Necht' je dána kuželosečka

$$k : 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0.$$

- (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.
- (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k .
- (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k .
- (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinnového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

(6 bodů)