Domácí úkol z 22. listopadu 2018
(odevzdává se 29. listopadu 2018)

Nechť K je těleso algebraických čísel stupně $[K : \mathbb{Q}] = n$. Pro libovolný plný modul M v K definujme tzv. duální modul

$$M^* = \{\alpha \in K;\ \forall \mu \in M : \mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha\mu) \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Dokažte, že pro libovolný plný modul M v K platí, že M^* je také plný modul M v K; přičemž pro libovolnou bázi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ modulu M je duální báze $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ bází modulu M^*.
2. Dokažte, že pro libovolný plný modul M v K platí $(M^*)^* = M$.
3. Dokažte, že pro libovolný plný modul M v K platí, že oba plné moduly M a M^* mají stejný okruh násobitelů $\mathcal{O}$.
4. Dokažte, že jsou-li M_1 a M_2 plné moduly v K, pak podmínky $M_1 \subseteq M_2$ a $M_1^* \supseteq M_2^*$ jsou ekvivalentní.
5. Dokažte, že pro libovolný plný modul M v K platí, že součin modulů $MM^* = \mathcal{O}^*$, kde $\mathcal{O}$ je okruh násobitelů modulu M (součin modulů byl definován v minulém domácím úkolu; protože okruh násobitelů $\mathcal{O}$ je plný modul, máme definován modul k němu duální).