INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diskrétní deterministické modely

Tento elektronický učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

Jeho první varianta vznikala v jarním semestru 2011, kdy byl předmět poprvé vyučován. Na základě zkušeností z výuky byl text přepracováván a rozšiřován v jarním semestru 2013 a podzimním semestru 2014.

Pro podzimní semestr 2018 bude text postupně přestrukturován, měněn a doplňován. Doufám, že úpravy přispějí k lepší srozumitelnosti.

Září 2018 Zdeněk Pospíšil

Obsah

Kapitola 1

Prolog

Nejprve se pokusíme sestavit jednoduch matematický model nějakého procesu, tj. děje, který se odehrává v průběhu času. O modelovaném procesu budeme předpokládat, že ho lze kvantifikovat, že jeho stav v konkrétním čase lze vyjádřit číslem. Přitom si budeme představovat, že tento proces pozorujeme nebo popisujeme v oddělených časových okamžicích. Běh času si tedy budeme představovat jako diskrétní, jako plynoucí v nějakých krocích nebo taktech, jejichž trvání budeme považovat za jednotkové. Tato představa rovnoměrně diskrétně plynoucího času bude v celém textu podstatná.

Konkrétně půjde o model růstu nějaké populace, její „stav“ bude vyjádřen jako její velikost.

Základním objektem vystupujícím v modelu bude posloupnost. Právě členy posloupnosti budou vyjadřovat stav procesu v jednotlivých okamžicích. U posloupností si budeme všímat její monotonnosti, ohraničenosti, existence nebo neexistence limity, případně jiné charakteristiky chování posloupnosti. To ukazuje, že je užitečné připomenout některé základní poznatky o posloupnostech, případně je uvést v nových souvislostech. Zejména si ukážeme, že pro posloupnosti můžeme vytvořit kalkulus, který je analogií diferenciálního a integrálního počtu pro funkce.

Jednoduchý model růstu populace

Představme si populaci složenou z nějakých organismů; mohou to být obratlovci, rostliny, mikrobi — na zvolené úrovni abstrakce na jejich povaze nezáleží. Všechny jedince budeme považovat za stejné, jeden od druhého se nijak neliší, v průběhu svého života se nijak nemění. Do naší úvahy zahrneme jediné dva děje — vznik a zánik jedinců tvořících populaci; jedinci vznikají (rodí se, líhnou, klíčí, pučí, ...) a zanikají (umírají, hynou, dělí se, ...). Jako jedinou kvantitativní charakteristiku populace budeme uvažovat její velikost; ta může být vyjádřena počtem jedinců, populační hustotou, celkovou biomasou a podobně. Dále si budeme představovat, že velikost populace zjišťujeme v pravidelných časových intervalech, jinak řečeno, že máme nějakou „přirozenou“ jednotku času, takže můžeme časové okamžiky očíslovat přirozenými čísly 0,1,2,.... Je celkem jasné, že

$$\begin{aligned}
&(\text{velikost populace v čase } t+1) = (\text{velikost populace v čase } t)\ + \\
&\qquad + (\text{množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1)\ - \\
&\qquad\qquad - (\text{množství jedinců uhynulých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1).
\end{aligned}$$

Z tohoto *pojmového modelu* vytvoříme *model matematický* tak, že zavedeme veličinu x závislou na čase, tedy $x = x(t)$, kterou budeme interpretovat jako (pozorovanou) velikost populace v časovém okamžiku t. Dále označíme $B(t)$ množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ a $D(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto období. Symboly jsou voleny tak, že x označuje veličinu, kterou chceme znát, B je zkratkou slova „birth“ a D slova „death“.

Uvedené slovně vyjádřené rovnici nyní můžeme dát tvar

$$x(t+1) = x(t) + B(t) - D(t). \tag{1.1}$$

Abychom z této rovnice mohli spočítat velikost populace v jednotlivých časových okamžicích, potřebujeme ještě specifikovat veličiny $B(t)$ a $D(t)$. Vzhledem k předpokladu, že všichni jedinci jsou stejní, můžeme očekávat, že každý z nich „vyprodukuje“ během časového intervalu jednotkové délky určité stejné množství živých potomků; označme toto množství b. Alternativně bychom mohli říci, že b je střední hodnota počtu potomků jedince za jednotkový časový interval. Hodnota b tedy nemusí být celé číslo. Celkové množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ tedy bude

$$B(t) = bx(t). \tag{1.2}$$

Z téhož předpokladu také můžeme odvodit, že každý jedinec má v libovolném intervalu jednotkové délky stejnou pravděpodobnost, že uhyne; označme tuto pravděpodobnost d. Klasicky spočítáme pravděpodobnost, že jedinec během jednotkového intervalu uhyne jako podíl množství uhynulých jedinců a množství všech jedinců, tj. $d = D(t)/x(t)$, neboli

$$D(t) = dx(t). \tag{1.3}$$

Při odvození vztahu (1.2) jsme však uvažovali, jako by se neměnilo množství jedinců, kteří žili v časovém okamžiku t a „produkovali“ potomky v průběhu intervalu do okamžiku $t+1$. Mlčky jsme tak přijali další zjednodušující předpoklad: k rození dochází „krátce po začátku“ uvažovaného časového intervalu, k úhynům až po dokončení procesu reprodukce. Možnost, že nějaký jedinec vznikne i zanikne v témže jednotkovém časovém intervalu, nemá na vztahy (1.2), (1.3) vliv. Takoví jedinci by totiž nemohli být zahrnuti mezi živé potomky, kterých je b, a tím pádem by v odvozených rovnostech vůbec nefigurovali.

Vyjádření (1.2) a (1.3) dosadíme do rovnice (1.1). Dostaneme

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t),$$

nebo po triviální úpravě

$$x(t+1) = (1 + b - d)x(t). \tag{1.4}$$

Parametr b v této rovnici nazýváme *porodnost* (birth rate); tento parametr je kladný, neboť v nevyhynulé populaci musí noví jedinci vznikat. Parametr d nazýváme *úmrtnost* (death rate); poněvadž vyjadřuje pravděpodobnost, nabývá hodnot mezi 0 a 1 — úmrtí je možné, ale není nutné. Tedy

$$b > 0, \quad 0 < d < 1. \tag{1.5}$$

Označíme-li

$$r = 1 + b - d, \tag{1.6}$$

můžeme rovnici (1.4) zapsat v kratším tvaru

$$x(t+1) = rx(t); \tag{1.7}$$

parametr r nazveme *koeficient růstu* (růstový koeficient, growth rate). Vyjadřuje relativní přírůstek populace za jednotku času. Podle podmínek (1.5) platí

$$r > 0. \tag{1.8}$$

Rovnost (1.7) můžeme chápat jako rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost

$$\{x(0), x(1), x(3), \dots\}$$

s kvocientem r, dobře známou ze střední školy. Pokud tedy na počátku, tj. v čase $t = 0$, je velikost populace rovna

$$x(0) = \xi_0, \tag{1.9}$$

kde ξ_0 je nějaké kladné číslo, pak velikost populace v libovolném časovém okamžiku t je rovna

$$x(t) = \xi_0 r^t. \tag{1.10}$$

Dostáváme tak první závěr: velikost populace roste jako geometrická posloupnost („populace roste geometrickou řadou“). Tento závěr — ovšem odpozorovaný na růstu obyvatelstva severoamerických osad, nikoliv odvozený uvedeným postupem — zpopularizoval Thomas Malthus ve svém slavném Pojednání o principech populace z roku 1798. Proto rovnici (1.7) s počáteční podmínkou (1.9) budeme nazývat *malthusovský model růstu populace.*

Závěr bychom ale měli formulovat opatrněji: pokud se populace vyvíjí podle modelu (av 18. století býval matematický model považován za vyjádření přírodního zákona) daného rovností (1.7) a na počátku má velikost rovnu ξ_0, pak její velikost v časovém okamžiku t je dána výrazem na pravé straně rovnosti (1.10). Je-li přitom $r > 1$, tj. porodnost je větší než úmrtnost, pak velikost populace roste nade všechny meze, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$; je-li $r < 1$, tj. úmrtnost je větší než porodnost, pak populace vymírá, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Pokud by $r = 1$, tj. porodnost by se vyrovnala s úmrtností, velikost populace by se neměnila, $x(t) = \xi_0$ v každém časovém okamžiku t.

Geometrický růst populace skutečně může být pozorován v případech, kdy populace je malá a prostředí, ve kterém se vyvíjí, je prakticky neomezené; jako např v době počátečního osídlení Ameriky imigranty z Evropy a západní Afriky, nebo růst kolonie bakterií na živném substrátu. Malthusovský model (1.7) tedy za jistých podmínek popisuje růst reálné populace. Ovšem žádná populace nemůže růst nade všechny meze, přinejmenším proto, že povrch Země je konečný.

Nyní jsme tedy v situaci, že pro popis růstu (nebo přesněji pro popis vývoje velikosti) populace máme matematický model (1.4), který adekvátně popisuje skutečnost za jistých, dosti omezujících předpokladů. Chtěli bychom však mít model, který zachovává „dobré vlastnosti“ modelu (1.4), tj. správně popisuje jednak vymírání populace, v níž a úmrtnost větší než porodnost, a také počáteční fáze růstu malé životaschopné populace, ale nemá jeho „vlastnost špatnou“, tj. nepředpovídá nerealistický neomezený růst.

V omezeném prostředí velká populace spotřebovává velké množství omezených zdrojů, na jedince připadne jejich menší podíl a proto se mu nebude dostávat energie k reprodukci. Je-li tedy v prostředí s omezenými zdroji velká populace, je její porodnost (počet potomků na jedince) menší, než by byla v případě, že by populace byla malá.

Velká populace znečišťuje prostředí produkty svého metabolismu; žádný organismus ale nemůže žít v prostředí tvořeném odpady jeho činnosti nebo života. Je-li tedy populace v omezeném prostředí velká, na jedince připadne větší množství produkovaných odpadních látek, které bývají toxické a proto se úmrtnost v populaci zvětší.

Těmito úvahami můžeme dojít k závěru, že u velké populace je malá porodnost nebo velká úmrtnost. Tyto jevy se vzájemně zesilují podle (1.6), růst populace působí pokles růstového koeficientu. Při „vylepšování" modelu (1.4) tedy konstantní koeficient růstu r nahradíme nějakým výrazem závislým na velikosti populace, nějakou funkcí proměnné x. Model růstu populace tedy může mít obecný tvar

$$x(t+1) = g\big(x(t)\big)x(t). \tag{1.11}$$

Přitom funkce g je definována pro nezáporné hodnoty argumentu x a je klesající. Chceme, aby model (1.7) byl speciálním případem modelu (1.11) pro „malé" velikosti populace. Přesněji tento požadavek vyjádříme ve tvaru

$$g(0) = r > 1. \tag{1.12}$$

V tomto případě se r nazývá *vnitřní koeficient růstu* (intrinsic growth rate). Vyjadřuje maximální možný relativní přírůstek velikosti populace za jednotku času, tj. takový přírůstek, který by populace měla v prostředí s neomezenými zdroji.

Existující populace žijí v dynamické rovnováze se svým prostředím, jejich velikost se dlouhodobě nemění, přestože jedinci se rodí a umírají. Toto pozorování vede k předpokladu, že pro každou populaci existuje nějaká „rovnovážná velikost". Pokud by populace byla větší, spotřebovávala by více zdrojů nebo produkovala více odpadů a její růstový koeficient by byl menší než 1. Naopak, kdyby populace byla menší než „rovnovážná", měla by nadbytek zdrojů na jedince a „přebytečná" energie by se mohla využít pro reprodukci. Růstový koeficient takové populace by byl větší než 1. Tyto úvahy nyní vyjádříme tak, že pro klesající funkci g existuje konstanta K taková, že $g(K) = 1$,

$$(\exists K > 0)\ g(K) = 1. \tag{1.13}$$

Hodnota K vyjadřuje *kapacitu (úživnost) prostředí.*

Funkce g vystupující v modelu (1.11) je tedy klesající a splňuje podmínky (1.12), (1.13). Tuto funkci potřebujeme dále nějak specifikovat.

Nejjednodušší volbou je lineární funkce,

$$g(x) = r - \frac{r-1}{K}x,$$

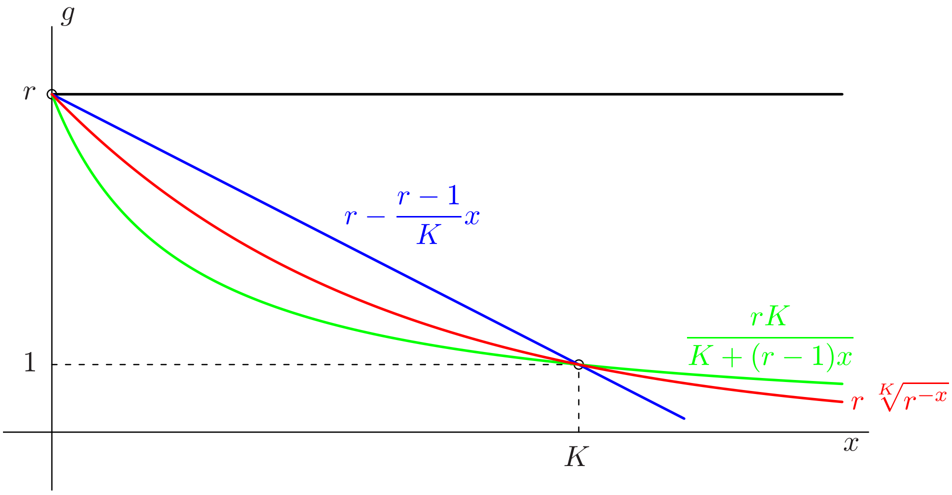
tato funkce je na obr. 1.1 znázorněna modrou přímkou. Model (1.11) tedy získá tvar

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{1.14}$$

Tato rovnice se nazývá *logistická.* Jako model růstu populace ji patrně poprvé použil John Maynard Smith ve slavné knize Mathematical Ideas in Biology[1].

Rovnici (1.14) lze opět chápat jako rekurentní formuli pro nějakou posloupnost. Pro obecný člen takové posloupnosti však neznáme vzoreček. Aspoň ale můžeme vypočítat prvních několik

[1] Cambridge Univ. Press, 1968



Obrázek 1.1: Různé možnosti volby funkce g na pravé straně obecného modelu (1.11) růstu populace v prostředí s omezenými zdroji.

členů této posloupnosti pro různé hodnoty parametrů. Tyto simulace provedeme pro hodnoty $K = 1$ a $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$; to lze interpretovat jako růst populace v neobsazeném prostředí, do něhož invadovalo několik jedinců, rovnovážnou velikost populace přitom považujeme za jednotkovou. Výsledek simulací je na obr. 1.2.

Vidíme, že pro malé hodnoty koeficientu r, přesněji pro $r < 2$, populace roste. Pro malé hodnoty t, růst připomíná geometrickou posloupnost, poté se stane skoro lineárním (připomíná aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí), pak se zpomalí až dosáhne hodnoty kapacity prostředí a růst ustane. Jinak řečeno, posloupnost zadaná rekurentně rovností (1.14) je rostoucí omezenou posloupností, pro niž platí

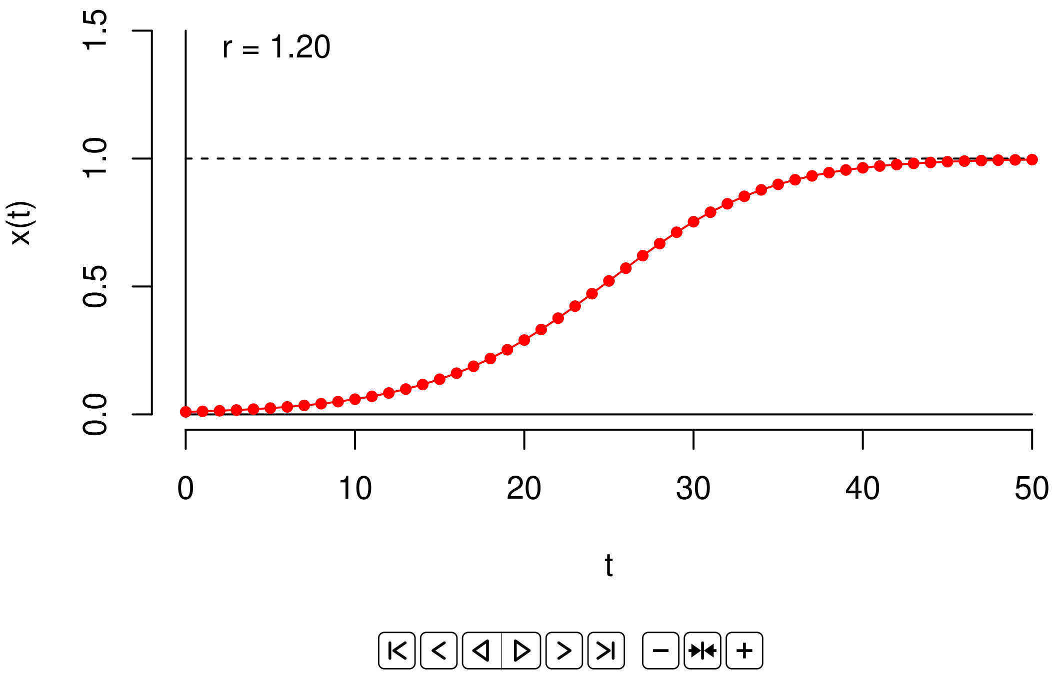
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K. \tag{1.15}$$

Pokud je hodnota růstového koeficientu r větší, přesněji pokud je $2 < r < 3$, posloupnost překročí hodnotu kapacity prostředí, ale s tlumenými oscilacemi se na této hodnotě postupně ustálí. Stále tedy platí (1.15), ale posloupnost již není monotonní.

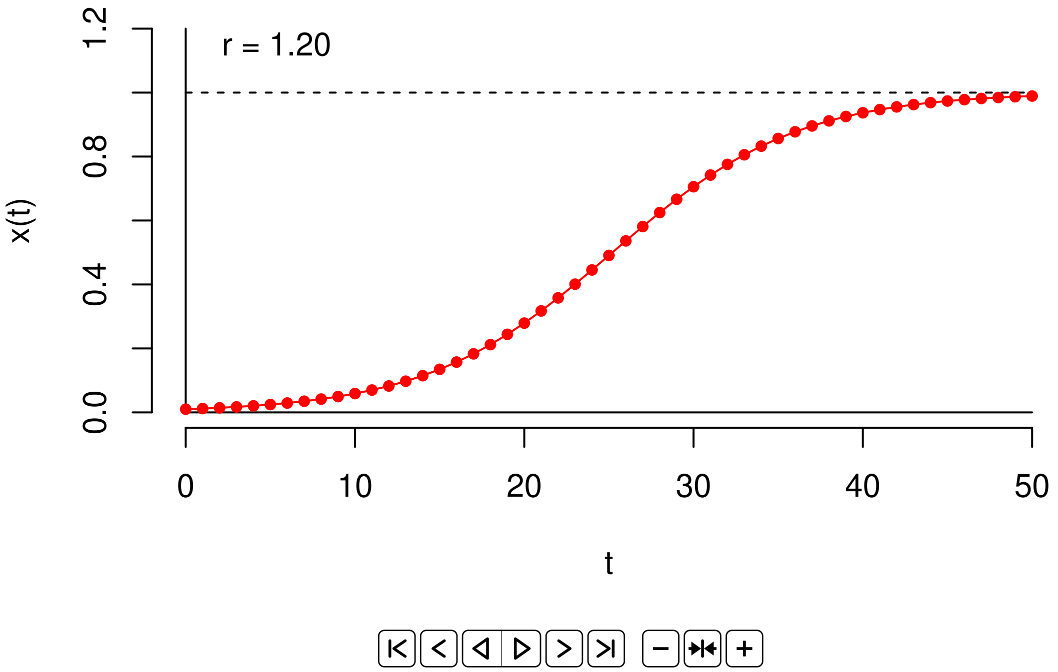
Při ještě větší hodnotě r se hodnoty posloupnosti neustálí na kapacitě prostředí, ale kolísají kolem ní. Pro menší r pravidelně, pro velká r již z obrázků žádnou pravidelnost vypozorovat nemůžeme.

Z těchto pozorování můžeme uzavřít, že model (1.14) může popisovat jak populaci, jejíž velikost je v dynamické rovnováze se svým prostředím (takové jsou např. populace velkých savců, nazýváme je K-stratégové — ustálí se na hodnotě K), tak populaci, jejíž velikost kolísá (to je typické např. pro drobné hlodavce, nazýváme je r-stratégové — mají velkou hodnotu r). Jeden model popisuje různé ekologické jevy. To je jeho velká přednost a proto je model (1.14) dobrým adeptem na „objevený přírodní zákon“.

Velká nevýhoda modelu (1.14) však spočívá v tom, že pro velkou počáteční hodnotu ξ_0 jsou její další hodnoty záporné, konkrétně pro $\xi_0 > Kr/(r-1)$ je $x(1) < 0$. Reálná populace nemůže mít zápornou velikost. Přitom velká počáteční hodnota může vyjadřovat např. to, že



Obrázek 1.2: Řešení logistické rovnice $x(t+1) = x(t)\big(r - (r-1)x(t)\big)$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.



Obrázek 1.3: Řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice $x(t+1) = x(t)\dfrac{r}{1+(r-1)x(t)}$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

se v důsledku nějaké ekologické disturbance skokem zmenšila úživnost prostředí. Model (1.14) tedy není dostatečně obecný.

Naznačený problém modelu (1.14) spočívá v tom, že funkční hodnoty funkce g jsou pro velké hodnoty argumentu záporné. Potřebujeme tedy klesající funkci, která má vlastnosti (1.12), (1.13) a navíc je pro všechny hodnoty argumentu kladná. Takovou funkcí může být funkce lomená,

$$g(x) = \frac{rK}{K + (r-1)x},$$

která je na obr. 1.1 znázorněna zelenou křivkou. Příslušný model má tvar

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)} \tag{1.16}$$

Tento model zavedli Raymond Beverton a Sidney Holt[2], nezávisle na nich a jiným způsobem ho odvodila Evelyn Pielou[3]. Často bývá nazýván *Bevertonova-Holtova logistická rovnice* nebo *logistická rovnice Pielou.*

Opět můžeme vypočítat několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu prostředí $K = 1$, s počáteční hodnotou $x_0 = \xi_0$ a s různými hodnotami koeficientu r, viz obr. 1.3. V tomto případě vidíme, že výsledná posloupnost vždycky roste a dosáhne kapacity prostředí, tedy pro libovolnou hodnotu r platí vztah (1.15). Model (1.16) je tedy vhodný pouze pro popis populace K-stratégů.

Cenou za odstranění nedostatku v modelu (1.14) jeho nahrazením modelem (1.16) je ztráta universality. Oba modely (1.14) i (1.16) mají nějaké „dobré vlastnosti“, ale také „nedostatky“. Zkusíme v modelu (1.11) použít funkci g, která je „něco mezi“ funkcí lineární a lomenou.

Elementární klesající kladná funkce, která má vlastnosti (1.12) a (1.13) a jejíž hodnoty jsou mezi hodnotami funkce lineární a lomené, je funkce exponenciální

$$g(x) = r^{1-x/K} = r\sqrt[K]{\frac{1}{r^x}} = \exp\left[\left(1 - \frac{x}{K}\right)\ln r\right],$$

viz na obr. 1.1 červenou křivku mezi modrou přímkou a zelenou křivkou. Příslušný model je tvaru

$$x(t+1) = x(t)\exp\left[\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)\ln r\right] \tag{1.17}$$

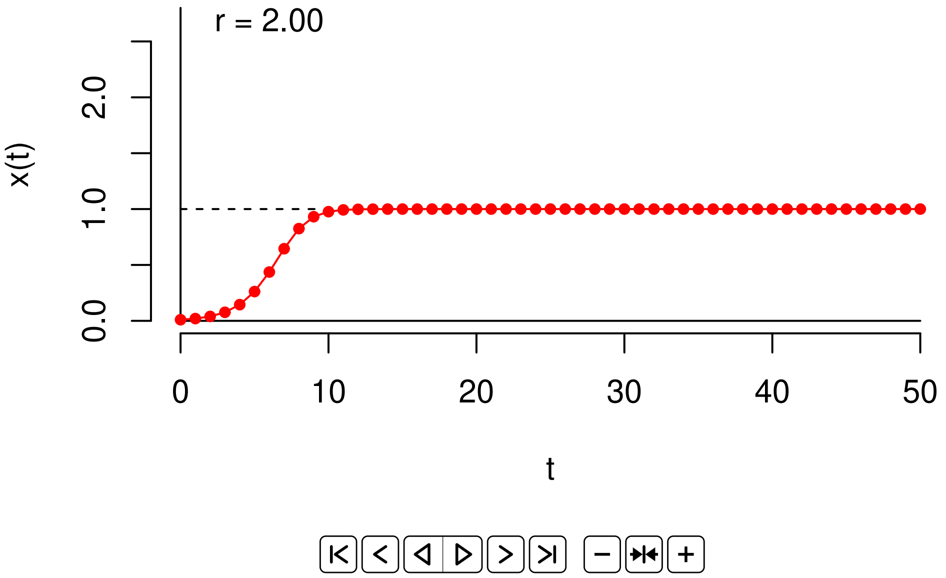
a zavedl ho William Ricker[4]. Bývá nazýván *Rickerova (logistická) rovnice.* Vypočítáme-li z něho několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu $K = 1$ a s počáteční hodnotou $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$ pro různé hodnoty růstového koeficientu r, vidíme na obr. 1.4, že model (1.17) je universální jako model (1.14) a nemá jeho vadu.

Ještě si můžeme povšimnout skutečnosti, že malthusovský model (1.7) je mezním případem všech logistických modelů (1.14), (1.16) a (1.17) také pro $K \to \infty$. Malthusovský model proto lze považovat za popis růstu populace v prostředí s neomezenými zdroji, tj. s nekonečnou úživností.

[2] R. J. H. Beverton and S. J. Holt, On the dynamic of exploited fish populations. Fisheries Investigations Series 2(19). Ministry of Agriculture, Fisheries, and Food, London, UK, 1957

[3] E. C. Pielou, Mathematical Ecology. Wiley Interscience, 1977

[4] W. E. Ricker, Stock and recruitment. *J.Fish.Res.Board Can.*, 11:559–623, 1954



Obrázek 1.4: Řešení Rickerovy rovnice $x(t+1) = x(t)r^{1-x(t)}$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

1.1 Posloupnosti

Pro celé číslo $t_0 \in \mathbb{Z}$ označíme

$$\mathbb{Z}_{t_0} = \{t_0 + n : n \in \mathbb{N}\} = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots\}$$

množinu všech celých čísel větších nebo rovných číslu t_0. Pro sjednocení symboliky budeme někdy množinu celých čísel označovat $\mathbb{Z}_{-\infty}$.

Definice 1. *Reálná posloupnost* je zobrazení a z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ takové, že jeho definiční obor $\operatorname{Dom} a$ je celá množina $\mathbb{Z}$ nebo některá z množin $\mathbb{Z}_{t_0}$.

Přívlastek „reálná“ budeme většinou vynechávat. Hodnotu posloupnosti $a(t)$ budeme nazývat *člen posloupnosti* nebo podrobněji *t-tý člen posloupnosti*. Hodnotu nezávisle proměnné t budeme někdy nazývat *index posloupnosti*. Pokud $t_0 > -\infty$ a $\operatorname{Dom} a = \mathbb{Z}_{t_0}$, řekneme, že t_0 je *počáteční index* posloupnosti.

Posloupnost a můžeme také zapisovat pomocí jejích členů jako $\{a(t)\}_{t=t_0}^{\infty}$ nebo stručně $\{a(t)\}$.

Množinu posloupností definovaných na $\mathbb{Z}_{t_0}$, resp. na $\mathbb{Z}$, označíme symbolem $\mathcal{P}_{t_0}$, resp. $\mathcal{P}_{-\infty}$; množinu všech posloupností označíme symbolem $\mathcal{P}$, tj.

$$\mathcal{P}_{t_0} = \{a : \mathbb{Z}_{t_0} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P}_{-\infty} = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_{t_0} \cup \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Tvrzení 1. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Množina posloupností $\mathcal{P}_\tau$ je vektorovým prostorem nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. Sčítání posloupností je definováno vztahem

$$(a+b)(t) = a(t) + b(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a, b \in \mathcal{P}_\tau \text{ a každé } t \in \mathbb{Z}_{t_0},$$

nulovým prvkem je posloupnost $o \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $\operatorname{Im} o = \{0\}$, tj.

$$o(t) = 0 \quad \text{pro všechna } t \in \operatorname{Dom} o,$$

násobení skalárem je definováno vztahem

$$(\alpha a)(t) = \alpha a(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a \in \mathcal{P}_\tau \text{ a všechna čísla } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Věta 1. *Nechť $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$. Označme*

$$C(t) = C(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_n(t) \\ a_1(t+1) & a_2(t+1) & \dots & a_n(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t+n-1) & a_2(t+n-1) & \dots & a_n(t+n-1) \end{vmatrix}.$$

Pokud existuje $t \in \mathbb{Z}_\tau$ takový index, že $C(t) \neq 0$, pak jsou posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ lineárně nezávislé.

Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ lineárně závislé, pak $C(t) = 0$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{Z}_\tau$.

Důkaz: Nechť pro konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = o$$

a nechť $t \in \mathbb{Z}_\tau$ je takový index, že $C(t) \neq 0$. Z předchozí rovnosti nyní plyne

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 a_1(t) & + & \alpha_2 a_2(t) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t) & = 0 \\ \alpha_1 a_1(t+1) & + & \alpha_2 a_2(t+1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+1) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_1(t+n-1) & + & \alpha_2 a_2(t+n-1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+n-1) & = 0. \end{array}$$

To je homogenní soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ a $C(t)$ je její determinant. Odtud plyne, že tato soustava má jen triviální řešení, tj.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

To ovšem znamená, že posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou lineárně nezávislé a první tvrzení je dokázáno.

Druhé tvrzení je bezprostředním důsledkem prvního. □

Poznámka 1. Determinant $C(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$ zavedený v předchozí větě se nazývá *Casoratián posloupností $a_1, a_2, \dots, a_n$ v indexu t_0*. Tvrzení 1 lze tedy přeformulovat: Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$ lineárně závislé, pak jejich Casoratián je nulový v každém indexu ze společného definičního oboru těchto posloupností.

Definice 2. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *ohraničená zdola,* pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není menší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \geq h$;

ohraničená shora, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není větší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \leq h$;

ohraničená, pokud je ohraničená zdola i shora, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, |a(t)| \leq h$.

Definice 3. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá

rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \leq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \leq a(t+1)$;

ryze rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) < a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) < a(t+1)$;

klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \geq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \geq a(t+1)$;

ryze klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) > a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) > a(t+1)$;

monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající;

ryze monotonní, pokud je ryze rostoucí nebo ryze klesající;

stacionární, pokud je současně rostoucí a klesající.

Terminologická poznámka. Uvedená terminologie monotonních posloupností je méně obvyklá — posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) \leq a(t_2)$$

je častěji nazývaná „neklesající“ a posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) < a(t_2)$$

„rostoucí“, podobně pro posloupnosti klesající. V této tradičnější terminologii však posloupnost, která není „klesající“ ještě nemusí být „neklesající“ (např. posloupnost daná rovností $a(t) = \sin t$).

V terminologii zavedené v Definici 2 je ryze rostoucí posloupnost také posloupností rostoucí; pojem označující zvláštní případ nějakého obecnějšího pojmu se od tohoto obecnějšího pojmu liší přívlastkem (v pojetí aristotelské logiky nebo biologické klasifikace lze slovo „rostoucí“ považovat za rodové jméno, slovo „ryze“ za druhové jméno).[5]

Poznámka 2. Z tranzitivity relací $\leq$, $<$, $\geq$, $>$ plyne, že posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je

- rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \leq a(t_2)$;
- ryze rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) < a(t_2)$;

[5] Analogická terminologie byla navržena v knize L. Kosmák. *Základy matematickej analýzy.* Bratislava-Praha, Alfa-SNTL, 1984, str. 16. Místo slova „ryze“ je tam používáno slovo „ostro“.

– klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \geq a(t_2)$;

– ryze klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) > a(t_2)$.

Poznámka 3. Obor hodnot stacionární posloupnosti je jednoprvkový, tj. existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$ a $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) = \alpha$.

Je-li $a \in \mathcal{P}$ stacionární posloupnost a $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$, budeme psát $a \equiv \alpha$. S použitím této symboliky můžeme nulovou posloupnost zapsat jako $o \equiv 0$.

Poznámka 4. Všechny pojmy zavedené v Definici 3 lze relativizovat na interval nezávisle proměnné. Např. posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *klesající na intervalu* $[n, m]$, jestliže pro každý index posloupnosti t takový, že $\{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \operatorname{Dom} a$ platí $a(t) \geq a(t+1)$, tj.

$$(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, \{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \leq a(t+1).$$

Definice 4. Buď $a \in \mathcal{P}$ a $t \in \operatorname{Dom} a$. Řekneme, že index t je

uzel posloupnosti a, pokud $a(t) = 0$ nebo $a(t)a(t+1) < 0$;

argument lokálního maxima, pokud $a(t) \geq a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \geq a(t-1)$;

argument lokálního minima, pokud $a(t) \leq a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \leq a(t-1)$;

argument ostrého lokálního maxima, pokud $a(t) > a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) > a(t-1)$;

argument ostrého lokálního minima, pokud $a(t) < a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) < a(t-1)$;

argument lokálního extrému, pokud je argumentem lokálního maxima nebo minima;

argument ostrého lokálního extrému, pokud je argumentem ostrého lokálního maxima nebo minima.

Je-li t argumentem lokálního extrému, řekneme že hodnota $a(t)$ je *lokálním extrémem posloupnosti a*. Analogickou terminologii používáme pro ostré lokální extrémy, maxima a minima.

Definice 5. *Limita posloupnosti* lim je zobrazení z množiny posloupností $\mathcal{P}$ do rozšířené množiny reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Obraz posloupnosti a při zobrazení lim značíme $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Řekneme, že limita posloupnosti a je rovna hodnotě $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pokud ke každému okolí α existuje takový index posloupnosti τ, že všechny členy posloupnosti a s indexy alespoň τ jsou v tomto okolí, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \text{ pokud } \big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\exists \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\forall t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Limita se nazývá *vlastní,* pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ pokud } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow |a(t) - \alpha| < \varepsilon.$$

Limita se nazývá *nevlastní,* pokud $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) > h,$$

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) < h.$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *konvergentní,* pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *divergentní,* pokud $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ nebo $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.

Terminologická poznámka. Nevlastní limita posloupnosti obvykle v učebních textech o posloupnostech nebývá považována za limitu; „nevlastní limita není limita analogicky jako nevlastní matka není matka“. Terminologie zavedená v Definici 5 je však stejná jako terminologie používaná v textech o funkcích.

Věta 2. *Monotonní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

- *je-li a rostoucí neohraničená posloupnost, pak* $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$*;*
- *je-li rostoucí posloupnost a ohraničená shora, pak* $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \sup\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$*;*
- *je-li klesající posloupnost a ohraničená zdola, pak* $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \inf\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$*;*
- *je-li a klesající neohraničená posloupnost, pak* $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$*.*

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.5., str. 127. □

Důsledek: Nechť $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost taková, že $\operatorname{Im} k \subseteq \mathbb{Z}$. Pak $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$.

Důkaz: Poněvadž k je ryze rostoucí a $k(t) \in \mathbb{Z}$ pro každé $t \in \mathbb{N}$, je

$$k(t+1) \geq k(t) + 1 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{N}.$$

Nechť $h \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. K němu existuje $t \in \mathbb{N}$, že $t > h - k(0)$. Pro tento index t platí

$$k(t) \geq k(t-1) + 1 \geq k(t-2) + 2 \geq \cdots \geq k(0) + t > k(0) + h - k(0) = h.$$

To znamená, že posloupnost k není ohraničená shora a dokazované tvrzení plyne z Věty 2. □

Tvrzení 2. Nechť $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Označme $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ množinu konvergentních posloupností z vektorového prostoru $\mathcal{P}_\tau$, tj.

$$\mathcal{P}_\tau^\bullet = \left\{ a \in \mathcal{P}_\tau :\ (\exists \alpha \in \mathbb{R})\, \alpha = \lim_{t\to\infty} a(t) \right\}.$$

Pak $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{P}_\tau$ a zobrazení $\lim : \mathcal{P}_\tau^\bullet \to \mathbb{R}$ je lineární.

Důkaz: $\lim(\alpha a + \beta b) = \lim\limits_{t\to\infty} (\alpha a + \beta b)(t) = \alpha \lim\limits_{t\to\infty} a(t) + \beta \lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \alpha \lim a + \beta \lim b \in \mathbb{R}$

□

Definice 6. Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$ je libovolná posloupnost a $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost celých čísel taková, že $k(0) \geq \tau$, tj. $\operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a$. Pak složené zobrazení $a \circ k$ se nazývá *posloupnost vybraná z posloupnosti a*.

Vzhledem k důsledku Věty 2 je složené zobrazení $a \circ k$ z předchozí definice skutečně posloupnost, t-tý člen vybrané posloupnosti je $a\big(k(t)\big)$.

Tvrzení 3. Nechť $a \in \mathcal{P}$ je konvergentní nebo divergentní posloupnost. Pak $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je její limitou, tj. $\lim a = \lim\limits_{s\to\infty} a(s) = \alpha$, právě tehdy, když α je limitou každé posloupnosti vybrané z posloupnosti a;

$$\lim a = \lim_{s\to\infty} a(s) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$
$$\Big((\forall k \in \mathcal{P}_0)\ \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a,\ \lim_{t\to\infty} k(t) = \infty \Rightarrow \lim a \circ k = \lim_{t\to\infty} a\big(k(t)\big) = \alpha \Big).$$

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí limity α a $a \circ k$ libovolná posloupnost vybraná z posloupnosti a. K okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $s_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna $s \in \operatorname{Dom} a$, $s \geq s_1$ je $a(s) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Množina $\{t \in \mathbb{N} : k(t) \geq s_1\}$ je podmnožinou dobře uspořádané množiny přirozených čísel, a tato množina je neprázdná, neboť $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$. Existuje tedy

$$t_1 = \min\{t \in \mathbb{N} : k(t) \geq s_1\}.$$

Pro libovolné $t > t_1$ je $k(t) > k(t_1) \geq s_1$, a tedy

$$a \circ k(t) = a\big(k(t)\big) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

„$\Leftarrow$“: Nechť $s_0 \in \operatorname{Dom} a$. Definujme $k \in \mathcal{P}_0$ vztahem $k(t) = s_0 + t$. Pak $a \circ k$ je posloupnost vybraná z posloupnosti a. Je tedy

$$\lim_{s\to\infty} a(s) = \lim_{t\to\infty} a(s_0 + t) = \lim_{t\to\infty} a\big(k(t)\big) = \alpha.$$

□

Definice 7. Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod posloupnosti* a, pokud ke každému okolí α a každému celému číslu τ existuje takový index t posloupnosti a, který není menší než τ a člen $a(t)$ posloupnosti leží v tomto okolí, tj.

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti a pokud

$$\big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\forall \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\exists t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau, a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Tvrzení 4. Hodnota $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a právě tehdy, když existuje posloupnost $a \circ k$ vybraná z posloupnosti a taková, že $\lim a \circ k = \alpha$, tj. $\lim\limits_{t\to\infty} a\big(k(t)\big) = \alpha$.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a. Zkonstruujeme ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$ takovou, že $\operatorname{Dom} a \subseteq \mathbb{Z}$ a $\lim a \circ k = \alpha$.

Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí bodu α a $s_0 \in \operatorname{Dom} a$ libovolný prvek.

Položíme $k(0) = s_0$. K s_0 existuje $s_1 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_1 \geq s_0$ a $a(s_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(1) = s_1$. K s_1 existuje $s_2 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_2 \geq s_1 + 1$ a $a(s_2) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(2) = s_2$ atd.

Výsledkem této induktivní konstrukce je ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$; přitom $k(t) = s_t$ a $s_t \in \mathcal{O}(\alpha)$ pro každý index $t \geq 0$ a tedy $a \circ k(t) = a(s_t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Pro všechny indexy $t \geq 0$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$, což znamená, že $\lim a \circ k = \alpha$.

„$\Leftarrow$“: Nechť existuje vybraná posloupnost $a \circ k$ taková, že $\lim a \circ k = \alpha \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\mathcal{O}(\alpha)$ je libovolné okolí α a $\tau \in \mathbb{Z}$ je libovolné číslo. Podle Definice 5 existuje číslo $\tau_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \geq \tau_1$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Vezmeme $t_1 \in \operatorname{Dom} k$ takové, že $t_1 > \tau_1$, $k(t_1) \in \operatorname{Dom} a$ a $k(t_1) \geq \tau$; takové číslo t_1 existuje, neboť posloupnost k je rostoucí a $\lim k = \infty$. Položíme $s_1 = k(t_1)$. Pak $s_1 \geq \tau$ a $a(s_1) = a\big(k(t_1)\big) = a \circ k(t_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$, tedy α je hromadným bodem posloupnosti a. □

Tvrzení 5. Nechť existuje limita posloupnosti a. Pak $\lim a$ je hromadným bodem posloupnosti a.

Důkaz plyne bezprostředně z Tvrzení 3 a 4. □

Příklady. Uvažujme posloupnosti z množiny $\mathcal{P}_0$.

a) $a(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^t$, obr. 1.5 a).
Jediný hromadný bod je 0.

b) $b(t) = (-1)^t$, obr. 1.5 b).
Hromadné body jsou 1 a -1.

c) $c(t) = (-1)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t = (-1)^t \dfrac{1+3^t}{3^t}$,
$c = \left\{2, -\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{28}{27}, \frac{82}{81}, -\frac{244}{243}, \dots\right\}$, obr. 1.5 c). Hromadné body jsou 1 a -1.

d) Definujme posloupnost $m \in \mathcal{P}_0$ předpisem $m(t) = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8t} - 1\right)\right]$, kde $[x]$ označuje celou část z reálného čísla x.
Položme $d(t) = t - \frac{1}{2}\big(m(t)+1\big)m(t)$.
$d = \{0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,5,0,1,\dots\}$, obr. 1.5 d).
Každé přirozené číslo se v této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát, je tedy jejím hromadným bodem. Vybraná posloupnost
$$\{0,1,2,3,4,\dots\} = \left\{a(0), a(2), a(5), a(9), a(14), \dots, a\big(\tfrac{1}{2}t(t+3)\big), \dots\right\}$$
diverguje do ∞, je tedy také ∞ hromadným bodem posloupnosti d.

e) Uvažujme posloupnosti m a d zavedené v předchozím příkladu a položme
$$e(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \dfrac{d(t)}{m(t)}, & t \geq 1, \end{cases}$$
$e(t) = \left\{1,0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,0,\dots\right\}$, obr. 1.5 e).
Každé racionální číslo z intervalu $[0,1]$ se mezi členy této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát. V každém okolí libovolného reálného čísla z intervalu $[0,1]$ existuje nějaké racionální číslo $q \in [0,1]$. To znamená, že každé reálné číslo z intervalu $[0,1]$ je hromadným bodem posloupnosti e, množina všech hromadných bodů vyplní kompaktní interval $[0,1]$.

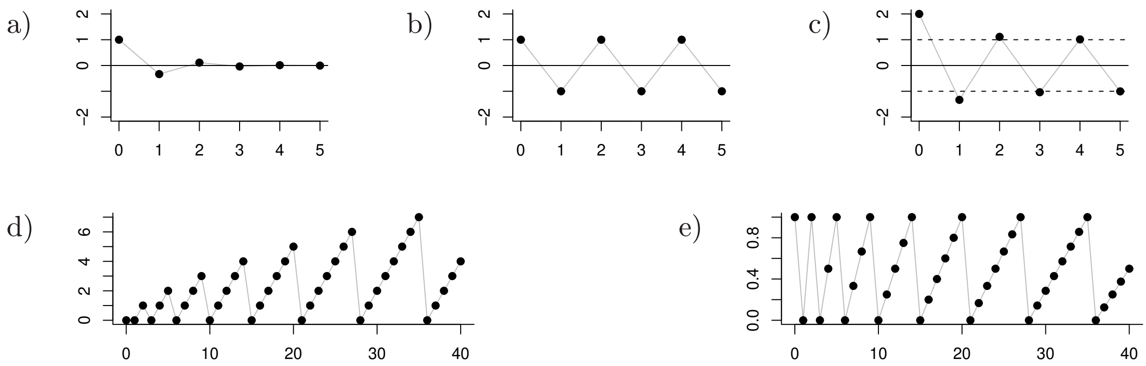
Příklady ukazují, že posloupnost může mít jeden hromadný bod (a), konečně mnoho hromadných bodů (b, c), spočetně (d) nebo nespočetně (e) mnoho hromadných bodů; hromadný body mohou být konečné (a, b, c, e) nebo nekonečné (d); konečný hromadný bod může být členem posloupnosti (b, d, e) ale nemusí (a, c, e). ■

Tvrzení 6. Množina hromadných bodů libovolné posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ má nejmenší a největší prvek.

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.7., str. 131. □

Definice 8. Nejmenší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes inferior* a označuje $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)$; největší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes superior* a označuje $\limsup\limits_{t\to\infty} a(t)$.

Z definice bezprostředně plyne
$$\liminf_{t\to\infty} a(t) \leq \limsup_{t\to\infty} a(t).$$



Obrázek 1.5: Příklady posloupností s různými množinami hromadných bodů.

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je ohraničená zdola právě tehdy, když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t);$$

je ohraničená shora právě tehdy, když

$$\limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

je konvergentní právě tehdy když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t) = \limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

nemá (vlastní ani nevlastní) limitu právě tehdy, když

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) < \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

Definice 9. Nechť $a \in \mathcal{P}$, $m \in \operatorname{Dom} a$, $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n+1 \in \operatorname{Dom} a$. *Součet členů posloupnosti a od m do n* definujeme vztahem

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n), & n \geq m, \\ 0, & n = m-1, \\ -\big(a(n+1) + a(n+2) + \cdots + a(m-1)\big), & n < m-1. \end{cases}$$

Součin členů posloupnosti a od m do n definujeme pro $n \geq m-1$ vztahem

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m)a(m+1)\cdots a(n), & n \geq m, \\ 1, & n = m-1; \end{cases}$$

pokud $n < m+1$ a $a(t) \neq 0$ pro $t \in [n+1, m-1] \cap \mathbb{Z}$, klademe

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \frac{1}{a(n+1)a(n+2)\cdots a(m-1)}.$$

Tvrzení 7. Nechť $a \in \mathcal{P}$. Pak platí

$$\sum_{t=m}^{n-1} a(t) = -\sum_{t=n}^{m-1} a(t), \qquad \sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \sum\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \sum_{t=m}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t)$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součty jsou definovány.

Pokud navíc $a(t) \neq 0$ pro $t \in \operatorname{Dom} a$, pak

$$\prod_{t=m}^{n-1} a(t) = \left(\prod_{t=n}^{m-1} a(t) \right)^{-1}, \qquad \prod_{t=m}^{l} a(t) \prod_{t=l+1}^{n} a(t) = \prod_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \prod\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \prod\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \prod_{t=m}^{n-1} \prod_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \prod_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t)$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součiny jsou definovány.

Důkaz: Nechť $m < n$. Pak také $m - 1 < n - 1$ a tedy

$$\sum_{t=n}^{m-1} a(t) = -\big(a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1)\big) = -\sum_{t=m}^{n-1} a(t),$$

což je ekvivalentní s první rovností. Její platnost budeme v dalších částech důkazu využívat.

Platnost druhé rovnosti ověříme pro $m < n$. Je-li $m \leq l < n$, pak

$$\sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \big(a(m)+a(m+1)+\cdots+a(l)\big) + \big(a(l+1)+a(l+2)+\cdots+a(n)\big) = \sum_{t=m}^{n} a(t);$$

je-li $m < n = l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) + 0;$

je-li $m < n < l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{l} a(t) - \sum\limits_{t=n+1}^{l} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l + 1 = m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = 0 + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l + 1 < m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=l+1}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t).$

V případech $m > n$ a $m = n$ ukážeme platnost druhé rovnosti analogicky.

Při ověřování třetí rovnosti rozlišíme čtyři případy:

je-li $n \geq m$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1) + a(n) =$

$$= a(n-0) + a(n-1) + \cdots + a\big(n-(n-m)\big) = \sum_{t=0}^{n-m} a(n-t);$$

je-li $n = m-1$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) = 0 = \sum\limits_{t=1}^{0} a(n-t)$;

je-li $n = m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-2} a(t) = -\sum\limits_{t=m-1}^{m-1} a(t) = -a(m-1) = -\sum\limits_{t=1}^{1} a(m-t) = \sum\limits_{t=2}^{0} a(m-t)$;

je-li $n < m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=n+1}^{m-1} a(t) = -\sum\limits_{t=0}^{m-n-2} a(m-1-t) =$

$$= \sum_{t=m-n-1}^{1} a(m-1-t) = \sum_{t=m-n}^{0} a(m-t).$$

Čtvrtou rovnost dokážeme úplnou indukcí:

pro $n = m$ platí $\sum\limits_{t=m}^{m-1} \left(\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) \right) = 0 = \sum\limits_{t=m}^{m-1} (m-t)a(t)$;

indukční krok „vpřed“: $\sum\limits_{t=m}^{n} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{\tau=m}^{n} a(\tau) + \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n} a(t) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) = a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t+1)a(t) =$$

$$= (n+1-n)a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n+1-t)a(t) = \sum_{t=m}^{n} (n+1-t)a(t);$$

indukční krok „vzad“: $\sum\limits_{t=m}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) + \sum\limits_{t=n}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{t=n-1}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{\tau=m}^{n-1} a(\tau) =$$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t-1)a(t) = \sum_{t=m}^{n-2} (n-t-1)a(t).$$

Rovnosti pro součin ověříme stejně. □

1.2 Operátory na prostoru posloupností

1.2.1 Operátor posunu

Definice 10. *Operátor posunu (shift operator)* $\cdot^\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost a^σ definovanou vztahem

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{t_0}$ při zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{t_0+1}$, obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{-\infty}$ je posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{-\infty}$.

Věta 3. *Operátor posunu $\cdot^\sigma$ je bijekce. Zúžení $\cdot^\sigma$ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ je lineární.*

Důkaz: Nechť $b \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Definujme posloupnost $a \in \mathcal{P}$ tak, že pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ položíme $a(t) = b(t-1)$. Pak je $a^\sigma(t) = a(t+1) = b(t+1-1) = b(t)$, tedy $b = a^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy surjektivní.

Nechť posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ jsou různé. Pokud $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, existuje nějaká hodnota $t_1 \in \operatorname{Dom} a$ taková, že $a(t_1) \neq b(t_1)$; odtud plyne, že $a^\sigma(t_1-1) = a(t_1) \neq b(t_1) = b^\sigma(t_1-1)$, tedy $a^\sigma \neq b^\sigma$. Pokud $\operatorname{Dom} a \neq \operatorname{Dom} b$, pak podle Definice 10 je také $\operatorname{Dom} a^\sigma \neq \operatorname{Dom} b^\sigma$ a opět $a^\sigma \neq b^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy injektivní (prosté).

Pro všechny posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ takové, že $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, pro všechna reálná čísla α, β a každé celé číslo $t \in \operatorname{Dom} a$ platí

$$(\alpha a + \beta b)^\sigma(t) = (\alpha a + \beta b)(t+1) = \alpha a(t+1) + \beta b(t+1) = \alpha a^\sigma(t) + \beta b^\sigma(t),$$

takže zobrazení $\cdot^\sigma$ je lineární. □

1.2.2 Diference

Definice 11. *Operátor (první) diference (vpřed)* $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ posloupnost $\Delta a \in \mathcal{P}$ definovanou vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Je-li $a \in \mathcal{P}_\tau$, pak také $\Delta a \in \mathcal{P}_\tau$ pro libovolné $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Z definice operátorů diference a posunu plyne, že

$$\Delta a = a^\sigma - a, \qquad a^\sigma = a + \Delta a, \tag{1.18}$$

nebo stručněji $\Delta = \cdot^\sigma - \mathrm{id}_\mathcal{P}$, $\cdot^\sigma = \Delta + \mathrm{id}_\mathcal{P}$.

Operátory posunu a diference komutují na prostoru posloupností, tj. pro každou posloupnost $a \in \mathcal{P}$ platí

$$(\Delta a)^\sigma = \Delta\left(a^\sigma\right).$$

Pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$ totiž platí

$$(\Delta a)^\sigma(t) = (\Delta a)(t+1) = a(t+2) - a(t+1) = a^\sigma(t+1) - a^\sigma(t) = \Delta\left(a^\sigma\right)(t).$$

Věta 4. *Operátor diference Δ je surjektivní zobrazení, které není prosté. Zúžení Δ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, je lineární a jeho jádrem je množina stacionárních posloupností.*

Důkaz: Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položíme

$$s(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Pak podle Tvrzení 7 platí

$$\Delta s(t) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t),$$

což znamená, že posloupnost a je obrazem posloupnosti s při zobrazení Δ.

Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položme $b(t) = a(t) + c$. Pak $b \in \mathcal{P}$ a $b \neq a$. Avšak pro libovolné $t \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ platí

$$\Delta b(t) = b(t+1) - b(t) = \big(a(t+1) + c\big) - \big(a(t) + c\big) = a(t+1) - a(t) = \Delta a(t),$$

tedy $\Delta a = \Delta b$.

Nechť $a, b \in \mathcal{P}_\tau$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha a + \beta b)(t) &= (\alpha a + \beta b)(t+1) - (\alpha a + \beta b)(t) = \\ &= \alpha\big(a(t+1) - a(t)\big) + \beta\big(b(t+1) - b(t)\big) = \alpha\Delta a(t) + \beta\Delta b(t).\end{aligned}$$

Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$, $a \equiv \alpha$. Pak $\Delta a(t) = \alpha - \alpha = 0$, tedy $a \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$.

Nechť $b \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$, tedy $\Delta b \equiv 0$. Pak pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ platí $0 = \Delta b(t) = b(t+1) - b(t)$, tedy pro všechna $t \in \operatorname{Dom} b$ je $b(t) = b(t+1)$, takže posloupnost b je stacionární. □

Poznámka 5. Z důkazu první části Věty 4 plyne

$$\Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) \tag{1.19}$$

pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}$ a indexy $t, t_0 \in \operatorname{Dom} a$.

Druhou část věty 4 lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\Delta(\alpha a) = \alpha\Delta a, \quad \Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b, \tag{1.20}$$

$\Delta a = o$ právě tehdy, když posloupnost a je stacionární.

Z rovností (1.20) bezprostředně plyne

$$\Delta(a-b) = \Delta a - \Delta b.$$

Máme tedy formule pro diferenci součtu a rozdílu posloupností.

Věta 5 (Diference součinu a podílu posloupností)**.** *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $a, b \in \mathcal{P}_\tau$. Pak platí*

$$\Delta ab = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b = \frac{b + b^\sigma}{2}\Delta a + \frac{a + a^\sigma}{2}\Delta b. \tag{1.21}$$

Pokud $b(t) \neq 0$ pro každý index $t \in \operatorname{Dom} b$, pak platí

$$\Delta \frac{1}{b} = -\frac{\Delta b}{bb^\sigma}, \tag{1.22}$$

$$\Delta \frac{a}{b} = \frac{a^\sigma b - ab^\sigma}{bb^\sigma} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma} = \frac{b^\sigma\Delta a - a^\sigma\Delta b}{bb^\sigma} = \frac{(b + b^\sigma)\Delta a - (a + a^\sigma)\Delta b}{2bb^\sigma}. \tag{1.23}$$

Důkaz: První rovnost v (1.21) plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t+1)b(t) + a(t+1)b(t) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)\big(b(t+1) - b(t)\big) + b(t)\big(a(t+1) - a(t)\big),\end{aligned}$$

druhá z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t+1) + a(t)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= \big(a(t+1) - a(t)\big)b(t+1) + a(t)\big(b(t+1) - b(t)\big)\end{aligned}$$

a třetí je důsledkem prvních dvou.

Nechť všechny členy posloupnosti b jsou nenulové. Pak

$$\left(\Delta\frac{a}{b}\right)(t) = \frac{a(t+1)}{b(t+1)} - \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a(t+1)b(t) - a(t)b(t+1)}{b(t+1)b(t)},$$

což je první rovnost (1.23). Z ní plyne rovnost (1.22); z té a z rovností (1.21) plynou zbývající rovnosti (1.23). □

Poznámka 6. Pro zjednodušení zápisu můžeme zavést (nestandardní) *operátor průměrování* $\cdot^\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ vztahem

$$a^\pi(t) = \tfrac{1}{2}\left(a + a^\sigma\right)(t) = \tfrac{1}{2}\big(a(t) + a(t+1)\big).$$

Při tomto označení můžeme zapsat formule pro diferenci součinu a rozdílu posloupností ve tvaru

$$\Delta ab = (\Delta a)\, b^\pi + a^\pi\, (\Delta b)\,, \qquad \Delta\frac{a}{b} = \frac{(\Delta a)\, b^\pi - a^\pi\, (\Delta b)}{bb^\sigma}.$$

1.2.3 Sumace

Definice 12. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. *Operátor sumace od* t_0 $\sum_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ posloupnost $\sum_{t_0} a$ definovanou vztahem

$$\sum\nolimits_{t_0} a(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Věta 6. *Buď* $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *a* $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ *libovolný index. Operátor sumace* $\sum_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ *je lineární prosté zobrazení, které není surjektivní.*

Důkaz: Buďte $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ libovolné posloupnosti a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla. Pak

$$\sum\nolimits_{t_0}(\alpha a + \beta b)(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1}\big(\alpha a(i) + \beta b(i)\big) = \alpha\sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) + \beta\sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) = \alpha\sum\nolimits_{t_0} a(t) + \beta\sum\nolimits_{t_0} b(t)$$

pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$. To znamená, že zobrazení $\sum_{t_0}$ je lineární.

Připusťme, že zobrazení $\sum_{t_0}$ není prosté, tj. existují různé posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ takové, že $\sum_{t_0} a(t) = \sum_{t_0} b(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}_\tau$. Poněvadž $a \neq b$, existuje index $t_1 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ takový, že $a(t_1) \neq b(t_1)$. To znamená, že

$$0 = \sum\nolimits_{t_0} a(t_1+1) - \sum\nolimits_{t_0} b(t_1+1) = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) = \sum_{i=t_0}^{t_1-1} a(i) + a(t_1) - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) - b(t_1) =$$
$$= \sum\nolimits_{t_0} a(t_1) + a(t_1) - \sum\nolimits_{t_0} b(t_1) - b(t_1) = a(t_1) - b(t_1) \neq 0,$$

což je spor.

Pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}_\tau$ platí $\sum_{t_0} a(t_0) = \sum\limits_{i=t_0}^{t_0-1} a(i) = 0$, takže posloupnost $b \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $b(t_0) \neq 0$ není obrazem žádné posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ při zobrazení $\sum_{t_0}$. □

Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. Pak platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(a(i+1) - a(i)\big) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) - a(t_0),$$

stručně

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = a(t) - a(t_0), \tag{1.24}$$

Rovnosti (1.19) a (1.24) můžeme bezprostředně přepsat na tvar

$$\Delta \sum\nolimits_{t_0} a(t) = a(t), \qquad \sum\nolimits_{t_0} \Delta a(t) = [a]_{t_0}^{t}. \tag{1.25}$$

Abychom ještě zestručnili zápis, zavedeme operátor $|_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ předpisem

$$a|_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0).$$

Operátor $|_{t_0}$ lze interpretovat jako odečtení t_0-tého členu posloupnosti. Pokud posloupnost $a \in \mathcal{P}_\tau$ je taková, že $a(t_0) \neq 0$, pak

$$a|_{t_0}(t_0) = a(t_0) - a(t_0) = 0 \neq a(t_0) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} a(t_0),$$

což znamená, že $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} \neq |_{t_0}$. Porovnáním rovností (1.19) a (1.24) nyní vidíme, že

$$\Delta \sum\nolimits_{t_0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} \neq |_{t_0} = \sum\nolimits_{t_0} \Delta.$$

To zejména znamená, že operátory diference a sumace nejsou vzájemně inversní na množině $\mathcal{P}_\tau$.

Poznámka 7 (**antidiference**). Na množině posloupností $\mathcal{P}_\tau$ definujme relaci $\equiv_\Delta$ vztahem

$$a \equiv_\Delta b \text{ právě tehdy, když } \Delta a = \Delta b.$$

Bezprostředně vidíme, že tato relace je ekvivalencí na množině $\mathcal{P}_\tau$. Můžeme tedy uvažovat faktorovou množinu $\mathcal{P}_\tau/_{\equiv_\Delta}$. Zobrazení $\Sigma : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau/_{\equiv_\Delta}$ definované vztahem

$$\Sigma a = \{x \in \mathcal{P}_\tau : \Delta x = a\} = \Big\{\sum\nolimits_{t_0} a : t_0 \in \mathrm{Dom}\, a\Big\}$$

nazveme *antidiference* posloupnosti a. Obvykle (ale méně přesně) za antidiferenci považujeme nějaký prvek z této třídy rozkladu.

Antidiference Σ je bijekcí množiny $\mathcal{P}_\tau$ na množinu $\mathcal{P}_\tau/_{\equiv_\Delta}$.

Operátory posunu a sumace od t_0 na prostoru posloupností obecně nekomutují, tj. existuje posloupnost $a \in \mathcal{P}$ taková, že

$$\Big(\sum\nolimits_{t_0} a\Big)^\sigma \neq \sum\nolimits_{t_0} a^\sigma.$$

Jedná se např. o geometrickou posloupnost $a(t) = \kappa^t$ s kvocientem $\kappa \neq 1$; pro ni totiž platí

$$\Big(\sum\nolimits_1 a\Big)^\sigma (t) = \sum_{i=1}^{t} \kappa^i = \kappa \frac{1-\kappa^t}{1-\kappa}, \quad \Big(\sum\nolimits_1 a^\sigma\Big)(t) = \sum_{i=1}^{t-1} \kappa^{i+1} = \kappa^2 \frac{1-\kappa^{t-1}}{1-\kappa} = \kappa \frac{\kappa-\kappa^t}{1-\kappa}.$$

Operátory $\sum_{t_0}$ a $\cdot^\sigma$ však komutují na podprostoru $\{a \in \mathcal{P} : a(t_0) = 0\}$. Pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ totiž platí

$$\Big(\sum\nolimits_{t_0} a\Big)^\sigma (t) = \sum\nolimits_{t_0} a(t+1) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i),$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a^\sigma(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a^\sigma(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i+1) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i).$$

Tvrzení o linearitě operátoru sumace lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\sum\nolimits_{t_0} \alpha a = \alpha \sum\nolimits_{t_0} a, \quad \sum\nolimits_{t_0} (a+b) = \sum\nolimits_{t_0} a + \sum\nolimits_{t_0} b.$$

Z těchto rovností bezprostředně plyne

$$\sum\nolimits_{t_0} (a-b) = \sum\nolimits_{t_0} a - \sum\nolimits_{t_0} b.$$

Máme tedy formule pro sumaci součtu a rozdílu posloupností. Jisté vyjádření sumace součinu posloupností vyjadřuje následující věta.

Věta 7 (Sumace „per partes“). *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ a $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

$$\sum\nolimits_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} b^\sigma \Delta a, \tag{1.26}$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} b\Delta a. \tag{1.27}$$

Důkaz: Podle (1.24) platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0)$$

a podle druhé z rovností (1.21) a Věty 6 platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(b(i+1)\Delta a(i) + a(i)\Delta b(i)\big) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i+1)\Delta a(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)\Delta b(i).$$

Odtud již plyne rovnost (1.26). Rovnost (1.27) odvodíme analogicky s využitím první z rovností (1.21). □

1.2.4 Diference a posun vyššího řádu

Operátory $\cdot^\sigma$, Δ a $\sum_{t_0}$ jakožto zobrazení z množiny $\mathcal{P}$ do sebe můžeme skládat. Složený operátor $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, tj. operátor, který posloupnosti a přiřadí posloupnost definovanou vztahem

$$\Delta^2 a(t) = \Delta\big(\Delta a(t)\big) = \Delta a(t+1) - \Delta a(t) = \big(a(t+2) - a(t+1)\big) - \big(a(t+1) - a(t)\big) = \\ = a(t+2) - 2a(t+1) + a(t)$$

nazýváme *druhá diference (vpřed)*. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ a tento operátor nazýváme *n-tá diference (vpřed)*. Pro $n = 0$ můžeme psát $\Delta^0 a(t) = a(t)$, tj. $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Složený operátor $\cdot^{\sigma^2} = \cdot^{\sigma} \circ \cdot^{\sigma}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost definovanou vztahem $a^{\sigma^2}(t) = a(t+2)$. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\cdot^{\sigma^n} = \cdot^{\sigma} \circ \cdot^{\sigma^{n-1}}$, tedy $a^{\sigma^n}(t) = a(t+n)$, a $a^{\sigma^0}(t) = a(t+0) = a(t)$, tj. $\cdot^{\sigma^0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Tvrzení 8. Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\Delta^n a(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{\sigma^{n-i}}(t),$$

$$a^{\sigma^n}(t) = a(t+n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a(t).$$

Důkaz: Úplnou indukcí.

$$\Delta^0 a(t) = a(t) = (-1)^0 \binom{0}{0} a(t+0-0).$$

$$\Delta^1 a(t) = \Delta a(t) = a(t+1) - a(t) = (-1)^0 \binom{1}{0} a(t+1-0) + (-1)^1 \binom{1}{1} a(t+1-1).$$

Indukční krok pro první formuli:

$$\begin{aligned}
\Delta^n a(t) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} a(t)\right) = \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} a(t+n-i) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i \binom{n-1}{i} - (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) - (-1)^{n-1} a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) + (-1)^n a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) + (-1)^n a(t).
\end{aligned}$$

Indukční krok pro druhou formuli:

$$
\begin{aligned}
a(t+n) &= \Delta a(t+n-1) + a(t+n-1) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \\
&= \Delta \left(\Delta^{n-1} a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1} \right) \Delta^i a(t) \right) + a(t) = \\
&= \Delta^n a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \Delta^n a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \Delta^i a(t) + a(t).
\end{aligned}
$$

□

Poznámka 8. Tvrzení Věty 8 můžeme zapsat v operátorovém tvaru

$$
\Delta^n = (\cdot^\sigma - \mathrm{id}_{\mathcal{P}})^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot^{\sigma^{n-i}}, \qquad \cdot^{\sigma^n} = (\Delta + \mathrm{id}_{\mathcal{P}})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i.
$$

Poznámka 9. Poněvadž složení lineárních zobrazení dává lineární zobrazení, je n-tá diference lineární zobrazení množiny posloupností $\mathcal{P}_\tau$ na sebe pro libovolné $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

1.3 Diferenční a sumační počet

Následující tři věty plynou přímo z Definic 3, 4 a 11.

Věta 8. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a nechť celá čísla m, n splňují podmínky $m \in \operatorname{Dom} a$, $n > m$. Pak platí*

- *a je rostoucí na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když pro každý index $t \in [m, n)$ platí nerovnost $\Delta a(t) \geq 0$, tj.*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \geq 0;$$
- *a je ryze rostoucí na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) > 0;$$
- *a je klesající na intervalu $[m.n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \leq 0;$$
- *a je ryze klesající na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) < 0;$$

- *a je monotonní na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když posloupnost Δa na intervalu $[m, n)$ nemění znaménko, tj.*

$$(\forall t) t \in [m, n-1) \ \Rightarrow \ \Delta a(t)\Delta a(t+1) \geq 0;$$

- *a je ryze monotonní na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když mezi indexy $t \in [m, n)$ není uzel posloupnosti Δa, tj.*

$$(\forall t) t \in [m, n-1) \ \Rightarrow \ \Delta a(t)\Delta a(t+1) > 0.$$

Věta 9. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

- *t je argumentem ostrého lokálního maxima právě tehdy, když $\Delta a(t) < 0$ a pokud t není počáteční index, pak $\Delta a(t-1) > 0$, tj.*

$$\Delta a(t) < 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) > 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního maxima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \leq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \geq 0\big).$$

- *t je argumentem ostrého lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) > 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) < 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \geq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \leq 0\big).$$

Věta 10. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost, index $t \in \operatorname{Dom} a$ není počáteční a $t-1$ je uzlem posloupnosti Δa. Pak index t je argumentem lokálního extrému. V případě $\Delta^2 a(t-1) \leq 0$ se jedná se o maximum, v případě $\Delta^2 a(t-1) \geq 0$ se jedná se o minimum. Pokud je přitom $\Delta a(t-1) \neq 0$, pak je tento extrém ostrý.*

Věta 11 (Rolleova)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2$ a $a(t_1) = a(t_2)$. Pak existuje index $s \in [t_1, t_2 - 1]$, který je uzlem posloupnosti Δa.*

Důkaz: Kdyby žádný index z intervalu $[t_1, t_2 - 1]$ nebyl uzlem, posloupnost a by podle Věty 8 byla ryze monotonní na intervalu $[t_1, t_2 + 1]$ a proto by nemohlo platit $a(t_1) = a(t_2)$. □

Věta 12 (Lagrangeova o střední hodnotě)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2 - 1$. Pak existuje index $s \in [t_1 + 1, t_2 - 1]$ takový, že platí aspoň jedna z dvojic nerovností*

$$\Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s-1), \qquad \Delta a(s-1) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s).$$

Důkaz: Položme
$$b(t) = a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$
Pak $b(t_1) = a(t_1)$, $b(t_2) = a(t_2) - \big(a(t_2) - a(t_1)\big) = a(t_1)$, což znamená. že posloupnost b splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy $c \in [t_1, t_2 - 1]$ takový index, že $\Delta b(c) = 0$ nebo $\Delta b(c)\Delta b(c+1) < 0$. Položme $s = c + 1$. Pak je $s \in [t_1 + 1, t_1 - 1]$ a platí
$$\Delta b(s-1) = 0 \quad \text{nebo} \quad \Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0.$$
Dále podle Věty 4 je
$$\Delta b(t) = \Delta a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$
pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$, takže
$$\Delta a(s-1) - \Delta b(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s) - \Delta b(s).$$
Pokud $\Delta b(s-1) = 0$, pak
$$\Delta a(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \le \Delta a(s) \quad \text{nebo} \quad \Delta a(s) \le \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s-1).$$
Pokud $\Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0$, pak v případě $\Delta b(s-1) > 0$, $\Delta b(s) < 0$ je
$$\Delta a(s) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s-1),$$
a v případě $\Delta b(s-1) < 0$, $\Delta b(s) > 0$ je
$$\Delta a(s-1) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s).$$
□

Věta 13 (de l'Hôpitalovo pravidlo, Stolzova-Cesàrova věta)**.** *Buďte $a, b \in \mathcal{P}$ posloupnosti a nechť je posloupnost b od jistého indexu ryze monotonní, tj.*
$$(\exists \tau \in \operatorname{Dom} b)(\forall t \in \operatorname{Dom} b)\ t \ge \tau \ \Rightarrow\ \operatorname{sgn} \Delta b(t) = \operatorname{sgn} \Delta b(\tau) \ne 0.$$
Jestliže $\left|\lim\limits_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$ a existuje limita $\lim \dfrac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \dfrac{a}{b}$ a platí
$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.28}$$
Jestliže $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} b(t)$ pak platí
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.29}$$
Zejména pokud existuje limita $\lim \dfrac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \dfrac{a}{b}$ a opět platí rovnost (1.28).

Důkaz: Nechť pro určitost $\Delta b(t) < 0$ pro $t \geq \tau$. V případě ryze rostoucí posloupnosti b bychom postupovali analogicky.

Nechť $\left|\lim\limits_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$. Poněvadž posloupnost b je klesající, musí být $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = -\infty$ podle Věty 2 a tedy od jistého indexu ϱ jsou všechny členy posloupnosti b záporné

$$b(t) < 0 \text{ pro každý index } t \geq \varrho.$$

Nechť $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index σ takový, že

$$c - \varepsilon < \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < c + \varepsilon$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Pro $t \geq \max\{\sigma, \tau\}$ tedy platí

$$(c-\varepsilon)\Delta b(t) > \Delta a(t) > (c+\varepsilon)\Delta b(t).$$

Vezmeme libovolné indexy $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma, \varrho\}$, $t_2 > t_1$ a sečteme předchozí rovnosti od t_1 do $t_2 - 1$. Podle (1.24) dostaneme

$$(c-\varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big) > a(t_2) - a(t_1) > (c+\varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big).$$

Tyto nerovnosti upravíme na tvar

$$(c-\varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)} < \frac{a(t_2)}{b(t_2)} < (c+\varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)}.$$

Limitním přechodem $t_2 \to \infty$ nyní dostaneme nerovnosti

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq c + \varepsilon.$$

Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí

$$c \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq c,$$

což znamená, že ve všech nerovnostech nastane rovnost a tedy $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = c$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, pak pro libovolné $h \in \mathbb{R}$ existuje index σ takový, že

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < h$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Nyní můžeme zopakovat předchozí úvahy s tím, že budeme používat pouze „pravou část“ nerovností, v nichž místo $c + \varepsilon$ budeme psát h. Dostaneme

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq h,$$

což vzhledem k tomu, že číslo h bylo libovolné, znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = -\infty$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \infty$, provedeme důkaz analogicky.

Nechť nyní $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} b(t)$. Poněvadž pro $t \geq \tau$ platí $\Delta b(t) < 0$, podle Věty 8 je posloupnost b na intervalu $[\tau, \infty)$ klesající a poněvadž $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$, platí $b(t) > 0$ pro každý index $t \geq \tau$.

Prostřední nerovnost v (1.29) je triviální. Pokud $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, je triviální i první nerovnost. Nechť tedy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R},$$

tj. existuje index σ takový, že pro libovolné kladné číslo ε a pro všechny indexy $t \geq \sigma$ platí

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \geq c - \varepsilon.$$

Pro všechny indexy $t \geq \max\{\tau, \sigma\}$ tedy máme nerovnost

$$\Delta a(t) \leq (c - \varepsilon)\Delta b(t).$$

Nechť t_1, t_2 jsou libovolné indexy takové, že $t_2 > t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$. Sečtením předchozích nerovností od t_1 do t_2 dostaneme podle (1.24) nerovnost

$$a(t_2) - a(t_1) \leq (c - \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big)$$

ze které limitním přechodem $t_2 \to \infty$ plyne

$$a(t_1) \geq (c - \varepsilon)b(t_1).$$

Poněvadž index $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$ byl libovolný, pro každý index index $t \geq \max\{\tau, \sigma\}$ platí

$$\frac{a(t)}{b(t)} \geq c - \varepsilon,$$

což znamená, že $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} \geq c + \varepsilon$. Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí první nerovnost v (1.29).

Poslední nerovnost v (1.29) dokážeme analogicky. □

Poznámka 10. Předpoklad o ryzí monotonnosti posloupnosti b je podstatný. Uvažujme například posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = t, \quad b(t) = \left(1 + (-1)^t\right) t^2 + \left(1 - (-1)^t\right) t = \begin{cases} 2t^2, & t \text{ sudé}, \\ 2t, & t \text{ liché}. \end{cases}$$

Pak je $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \infty$, $\Delta a(t) = (t + 1) - t = 1$ a

$$\begin{aligned}\Delta b(t) = \left(1 + (-1)^{t+1}\right)(t+1)^2 + \left(1 - (-1)^{t+1}\right)(t+1) - \left(1 + (-1)^t\right) t^2 - \left(1 - (-1)^t\right) t = \\ = 2\left((-1)^{t+1} t^2 + t + 1\right),\end{aligned}$$

takže

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\big((-1)^{t+1}t^2+t+1\big)} = 0,$$

avšak

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{1}{\big(1+(-1)^t\big)t+1-(-1)^t} = \begin{cases}\frac{1}{2t}, & t \text{ sudé},\\ \frac{1}{2}, & t \text{ liché},\end{cases}$$

což znamená, že

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} = 0 < \frac{1}{2} = \limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)}$$

a limita podílu posloupností a, b neexistuje.

Pro případ limity typu $\frac{0}{0}$ uvažujme posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = \frac{1}{t}, \qquad b(t) = \frac{(-1)^t}{t}.$$

Pak

$$\Delta a(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{t-(t+1)}{t(t+1)} = \frac{-1}{t(t+1)},$$

$$\Delta b(t) = (-1)^{t+1}\frac{1}{t+1} - (-1)^t\frac{1}{t} = (-1)^{t+1}\frac{t+(t+1)}{t(t+1)} = (-1)^{t+1}\frac{2t+1}{t(t+1)},$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} b(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{2t+1} = 0$$

avšak limita podílu posloupností a, b neexistuje, neboť $\dfrac{a(t)}{b(t)} = (-1)^t$.

Věta 14 (o střední hodnotě sumačního počtu)**.** *Buďte a, b posloupnosti a nechť existují celá čísla m, n taková, že $m < n$, $m \in \operatorname{Dom} a \cap \operatorname{Dom} b$ a pro každý index $t \in [m, n]$ je $b(t) \geq 0$. Pak ke každé dvojici indexů $t_0, t_1 \in [m, n]$ existuje číslo c takové, že*

$$\min\{a(t) : m \leq t \leq n\} \leq c \leq \max\{a(t) : m \leq t \leq n\} \quad a \quad \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = c\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i).$$

Důkaz: Označme $\alpha = \min\{a(t) : m \leq t \leq n\}$, $A = \max\{a(t) : m \leq t \leq n\}$.

Je-li $t_1 \geq t_0$, pak

$$\alpha\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) \leq \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \leq A\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 < t_0 - 1$, pak

$$\alpha\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) = -\alpha\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) \geq -\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i) \geq -A\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) = A\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 = t_0 - 1$, pak

$$0 = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i).$$

Odtud plyne, že v každém případě, kdy $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i) = 0$, je také $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = 0$ a za číslo c lze vzít libovolné číslo z intervalu $[\alpha, A]$.

Je-li $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \neq 0$, pak v případě $t_1 \geq t_0$ je

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq \frac{A \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = A,$$

a v případě $t_1 < t_0 - 1$ je také

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} \leq \frac{\sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq A.$$

Stačí tedy položit

$$c = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) \frac{b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)}.$$

□

1.3.1 Přehled vzorců pro diferenci a sumaci

Tvrzení Vět 4, 6, 5, 7 a relace (1.19), (1.24) můžeme shrnout:

- $\Delta a = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \mathbb{R}) a \equiv \gamma$
- $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$
- $\Delta(\alpha a) = \alpha \Delta a$
- $\Delta(ab) = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b$
- $\Delta \dfrac{1}{b} = -\dfrac{\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\Delta \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\sum_{t_0}(a + b) = \sum_{t_0} a + \sum_{t_0} b$
- $\sum_{t_0}(\alpha a) = \alpha \sum_{t_0} a$
- $\Delta \sum_{t_0} a = a$
- $\sum_{t_0} \Delta a = a|_{t_0}$
- $\sum_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b^\sigma \Delta a, \quad \sum_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b\Delta a$

Uvedené vzorce platí pro posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ se stejným definičním oborem, jejich index $t_0 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Diference a sumy některých posloupností

1. Geometrická posloupnost $a(t) = \kappa^t$:

   $\Delta\kappa^t = (\kappa-1)\kappa^t, \quad \sum_{t_0} \kappa^t = \dfrac{\kappa^{t_0}\left(\kappa^{t-t_0}-1\right)}{\kappa-1}$ pro $\kappa \neq 1$;

   zejména $\Delta 2^t = 2^t, \quad \sum_0 2^t = 2^t - 1$.

   Důkaz: $\Delta\kappa^t = \kappa^{t+1} - \kappa^t = \kappa^t\,(\kappa-1)$,
   $\sum_{t_0} \kappa^t = \dfrac{1}{\kappa-1}\sum_{t_0}(\kappa-1)\kappa^t = \dfrac{1}{\kappa-1}\sum_{t_0}\Delta\kappa^t = \dfrac{1}{\kappa-1}\kappa^t|_{t_0} = \dfrac{\kappa^t-\kappa^{t_0}}{\kappa-1}$. □

2. Aritmetická posloupnost $a(t) = t$:

   $\Delta t = 1, \quad \sum_{t_0} t = \frac{1}{2}(t-1+t_0)(t-t_0)$;

   zejména $\sum_1 t = 1+2+3+\cdots+(t-1) = \frac{1}{2}t(t-1)$.

   Důkaz: $\Delta t = (t+1) - t = 1$.
   Dále platí $\Delta\left(\frac{1}{2}t(t-1)\right) = \frac{1}{2}\big((t+1)t - t(t-1)\big) = t$, takže podle (1.24) platí
   $\sum_{t_0} t = \sum_{t_0}\Delta\left(\frac{1}{2}t(t-1)\right) = \frac{1}{2}t(t-1) - \frac{1}{2}t_0(t_0-1) = \frac{1}{2}\left(t^2 - t - t_0^2 + t_0\right) =$
   $= \frac{1}{2}\left((t-t_0)(t+t_0) - (t-t_0)\right) = \frac{1}{2}(t-t_0)(t+t_0-1)$. □

3. Aritmetická posloupnost k-tého stupně $a(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$:

   $\Delta t^k = \sum\limits_{i=1}^{k}\binom{k}{i}t^{k-i}$,

   $\sum_{t_0} t^k = \dfrac{1}{k+1}\left[t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - \sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}\sum_{t_0} t^{k-i}\right]$,

   zejména pro $t_0 = 1$ je $\sum_1 t^k = \dfrac{1}{k+1}\left[t^k(t-1) - \sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}\sum_1 t^{k-i}\right]$.

   Důkaz:

   $$\Delta t^k = (t+1)^k - t^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}t^{k-i} - t^k = t^k + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}t^{k-i} - t^k.$$

   V následujícím výpočtu využijeme sumaci „per partes“, již odvozenou formuli pro diferenci aritmetické posloupnosti k-tého stupně a rovnost (1.24).

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{t_0} t^k = \sum\nolimits_{t_0} t^k \Delta t = t^{k+1}|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} (t+1)\Delta t^k = \\ = t^{k+1} - t_0^{k+1} - \sum\nolimits_{t_0} t\Delta t^k - \sum\nolimits_{t_0} \Delta t^k = \\ = t^{k+1} - t_0^{k+1} - \sum\nolimits_{t_0} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} t^{k-i+1} - (t^k - t_0^k) = \\ = t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \sum\nolimits_{t_0} t^{k-i+1} = \\ = t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - k\sum\nolimits_{t_0} t^k - \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \sum\nolimits_{t_0} t^{k-i+1} = \\ = t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - k\sum\nolimits_{t_0} t^k - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i+1} \sum\nolimits_{t_0} t^{k-i}.\end{aligned}$$

z této rovnosti již plyne druhá dokazovaná formule. □

Tento výsledek můžeme díky linearitě diference a sumace přeformulovat: Je-li člen posloupnosti dán polynomem k-tého stupně v indexu posloupnosti (tj. v proměnné t), pak jeho diference je dána polynomem stupně $k-1$ a jeho sumace polynomem stupně $k+1$.

4. Faktoriálová posloupnost je definována pro libovolné celé číslo r a nezáporný index t vztahem

$$t^{(r)} = \prod_{i=t-r+1}^{t} i$$

pro $t < 0$ klademe $t^{(r)} = 0$. Pro $t \geq 0$ a $r \leq t$ je

$$t^{(r)} = \frac{t!}{(t-r)!};$$

tímto vyjádřením je motivován název posloupnosti.

Pro diferenci a sumaci faktoriálové posloupnosti platí:

$\Delta t^{(r)} = rt^{(r-1)}, \quad \sum\nolimits_{t_0} = \dfrac{t^{(r+1)}}{r+1} - \dfrac{t_0^{(r+1)}}{r+1}$, pokud $r \neq -1$.

Důkaz:

$$\begin{aligned}\Delta t^{(r)} = (t+1)^{(r)} - t^{(r)} = \left(\prod_{i=t-r+2}^{t+1} i\right) - \left(\prod_{i=t-r+1}^{t} i\right) = \\ = \big(t+1-(t-r+1)\big)\left(\prod_{i=t-r+2}^{t} i\right) = r\left(\prod_{i=t-(r-1)+1}^{t} i\right) = rt^{(r-1)}.\end{aligned}$$

$\sum\nolimits_{t_0} i^{(r)} = \sum\nolimits_{t_0} \left(\dfrac{1}{r+1}\Delta i^{(r+1)}\right) = \frac{1}{r+1}\left(t^{(r+1)} - t_0^{(r+1)}\right)$ □

5. Goniometrické posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$, $\sin(\alpha t+\beta)$:

$$\Delta\cos(\alpha t+\beta) = -2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\sum\nolimits_{t_0}\cos(\alpha t+\beta) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\left[\sin\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)-\sin\left(\alpha t_0+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right],$$
$$\text{pokud } \alpha\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\Delta\sin(\alpha t+\beta) = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\sum\nolimits_{t_0}\sin(\alpha t+\beta) = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\left[\cos\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)-\cos\left(\alpha t_0+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right],$$
$$\text{pokud } \alpha\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Důkaz: Platí

$$\Delta e^{i(\alpha t+\beta)} = e^{i\left(\alpha(t+1)+\beta\right)} - e^{i(\alpha t+\beta)} = e^{i(\alpha t+\beta)}\left(e^{i\alpha}-1\right) =$$
$$= e^{i(\alpha t+\beta)}e^{i\frac{1}{2}\alpha}\left(e^{i\frac{1}{2}\alpha}-e^{-ij\frac{1}{2}\alpha}\right) = e^{i(\alpha t+\beta)}e^{i\frac{1}{2}\alpha}2i\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2i\sin\tfrac{1}{2}\alpha e^{i\left(\alpha t+\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)} =$$
$$= 2i\sin\tfrac{1}{2}\alpha\Big(i\cos\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right)-\sin\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right)\Big).$$

Formule pro diferenci posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$ je reálná část této rovnosti, formule pro diferenci posloupnosti $\sin(\alpha t+\beta)$ je její imaginární část.
Formule pro sumaci posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$ nyní plyne z rovnosti (1.24) a vztahu

$$\cos(\alpha t+\beta) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\Delta\sin\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$

který platí pro libovolné α, které není celým násobkem 2π. Formuli pro sumaci posloupnosti $\sin(\alpha t+\beta)$ odvodíme analogicky. □

Příklady.

1. Vypočítáme sumu $\sum_1 \dfrac{t^2}{2^t}$.

Hledanou sumu upravíme na tvar $\sum_1 t^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a označíme $a(t)=t^2$ a $\Delta b(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Pak

$$\Delta a(t) = 2t+1,\quad b = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}.$$

Sumace „per partes“ tedy dává

$$\sum\nolimits_1 t^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = t^2\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right)\Big|_1 - \sum\nolimits_1\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^t\right)(2t+1) =$$
$$= t^2-\frac{t^2}{2^{t-1}}-\sum\nolimits_1\left(1+2t-\left(\tfrac{1}{2}\right)^t-t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right) =$$
$$= t^2-\frac{t^2}{2^{t-1}}-(t-1)-t(t-1)+\sum\nolimits_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t+\sum\nolimits_1 t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} =$$
$$= 1-\frac{t^2}{2^{t-1}}+\sum\nolimits_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t+2\sum\nolimits_1 t\left(\tfrac{1}{2}\right)^t.$$

Poslední sumu opět upravíme „per partes“:

$$\sum_1 t\left(\tfrac{1}{2}\right)^t = t\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right)\Big|_1 - \sum_1\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^t\right) =$$
$$= t - t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} - (t-1) + \sum_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t = 1 - t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} + \sum_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t.$$

Dosazením do předchozí rovnosti dostaneme výsledek

$$\sum_1 \frac{t^2}{2^t} = 1 - \frac{t^2}{2^{t-1}} + \sum_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + 2 - 2t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} + 2\sum_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t =$$
$$= 3 - \frac{t(t+2)}{2^{t-1}} + 3\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right) = 6 - \frac{t(t+2)+3}{2^{t-1}}.$$

2. Vypočítáme součet $\sum\limits_{k=1}^{t-1} \dfrac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

   Při výpočtu využijeme rozklad na parciální zlomky a vzorce pro sumaci faktoriálové posloupnosti.

$$\sum_{k=1}^{t-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{t-1}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{t-1}\left(\frac{k!}{(k+2)!} - 3\frac{k!}{(k+3)!}\right) = \sum_{k=1}^{t-1}\left(k^{(-2)} - 3k^{(-3)}\right) =$$
$$= \frac{t^{(-1)}}{-1} - \frac{1^{(-1)}}{-1} - 3\left(\frac{t^{(-2)}}{-2} - \frac{1^{(-2)}}{-2}\right) = -\frac{t!}{(t+1)!} + \frac{1!}{2!} + \frac{3}{2}\left(\frac{t!}{(t+2)!} - \frac{1!}{3!}\right) =$$
$$= -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{t(t-1)}{4(t+1)(t+2)}.$$

3. Vypočítáme součet $\sum\limits_{k=-n}^{0} (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

   Nejprve si povšimneme, že $(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} = \sqrt{2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Pak s využitím vzorce pro sumaci goniometrických funkcí dostaneme

$$\sum_{k=-n}^{0} (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{-n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

■

1.4 Cvičení

1. Rozhodněte, zda je ohraničená posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $1 - \left(\cos\frac{\pi}{t}\right)^t$, b) $\dfrac{t^t}{t!}$, c) $\sum\limits_{i=1}^{t} \dfrac{1}{t}$.

2. Rozhodněte, zda je na množině $\mathbb{Z}_1$ monotonní posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $\dfrac{t^2+1}{t+1}$, b) $\dfrac{2^t}{t!}$, c) $t - \log t$.

3. Dokažte, že následující posloupnosti jsou konvergentní:

   a) $\dfrac{(t!)^2}{(2t)!}$, b) $\sum\limits_{i=0}^{t} \dfrac{1}{t+i}$, c) $\sum\limits_{i=0}^{t} \dfrac{1}{i!}$.

4. Vypočítejte limity posloupností

   a) $\dfrac{2t^2-t+3}{3t^2+t-5}$, b) $\dfrac{t^4+t-1}{t^3+t-1}$, c) $\dfrac{t^2-2t+3}{t^3-4t+5}$,

   d) $\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k} b_i t^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} c_i t^i}$, $c_m \neq 0 \neq b_k$, e) $\sqrt[t]{3^{2t+1}}$, f) $\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$.

   g) $\dfrac{\sqrt[3]{t^2}}{t+1}$, h) $\dfrac{t-(-1)^t}{t}$, i) $\dfrac{3^t+(-2)^t}{3^{t+1}+(-2)^{t+1}}$,

   j) $\dfrac{t!}{t^t}$, k) $\sqrt[t]{t!}$, l) $\dfrac{\alpha^t}{t!}$,

   m) $\left|\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{t} - \cdots + \dfrac{(-1)^{t-1}t}{t}\right|$, n) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{t(t+1)}$,

   o) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} + \cdots + \dfrac{2t-1}{2^t}$, p) $\dfrac{1}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{t+3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$,

   q) tq^t, $|q|<1$, r) $\dfrac{(t!)^2}{(2t)!}$, s) $\dfrac{1}{t^{p+1}} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p$, $p \in \mathbb{N}$,

   t) $\dfrac{1}{t^p} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p - \dfrac{t}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$, u) $\dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \dfrac{12}{5} \cdots \dfrac{t+9}{2t-1}$.

5. Najděte všechny hromadné body posloupnosti

   a) $(-1)^{t+1}\left(2+\dfrac{3}{t}\right)$, b) $1 + \dfrac{1}{t+1}\cos\dfrac{t\pi}{2}$, c) $\frac{1}{2}\big((a+b)+(-1)^t(a-b)\big)$,

   d) $\left(\cos\dfrac{2\pi t}{3}\right)^t$, e) $\left(-1-\dfrac{1}{t}\right)^t + \sin\dfrac{t\pi}{4}$, f) $\dfrac{1}{t}\sum\limits_{i=1}^{t}(-1)^{i-1}i$.

6. Najděte extrémní hodnotu posloupnosti na intervalu $[1, \infty)$

a) $a(t) = \dfrac{t^2}{2^t}$, b) $a(t) = t^2 - 9t - 10$, c) $a(t) = \prod_{i=1}^{t} \dfrac{i+9}{2i-1}$.

7. Na základě výsledků 1.3.2(2. a 3.) odvoďte vzorce pro $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$, $\sum_{i=1}^{n} i^3$, $\sum_{i=1}^{n} i^4$.

Výsledky:

1. a) ano, $0 \le a(t) \le 2$, b) ne, $a(2t) > 2^t$, c) ne, $a(2^t) > 1 + \frac{1}{2}t$.
2. a) ryze rostoucí, b) klesající, c) ryze rostoucí,
3. klesající, zdola ohraničená nulou, b) klesající, zdola ohraničená nulou, c) rostoucí, shora ohraničená např. $1 + \frac{3}{4}$.
4. a) $\frac{2}{3}$, b) ∞, c) 0 d) $\begin{cases} 0, & k < m \\ b_k/c_m, & k = m, \\ \infty, & k > m,\ c_m b_k > 0, \\ -\infty, & k > m,\ c_m b_k < 0, \end{cases}$ e) 9, f) 0, g) 0, h) 1, i) $\frac{1}{2}$, j) 0, k) ∞, l) 0, m) $\frac{1}{2}$, n) 1, o) 3, p) ∞, q) 0, r) 0, s) $\frac{1}{p+1}$, t) $\frac{1}{2}$, u) 0.
5. a) $-2, 2$, b) $0, 1, 2$, c) a, b, d) $0, 1$, e) $-\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\mathrm{e} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \mathrm{e} - 1, \mathrm{e}, \mathrm{e} + 1$, f) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
6. a) $a_{\max} = a(3) = \frac{9}{8}$, b) $a_{\min} = a(4) = a(5) = -30$, c) $a_{\max} = a(0) = a(10) = 512$.
7. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,
   $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$

Kapitola 2

Diferenční rovnice

V úvodu předchozí kapitoly jsme modelovali růst populace v omezeném prostředí. Dospěli jsme ke třem různým modelům (1.14), (1.16) a (1.17). Hodnoty $x(t)$ vyjadřují velikost populace v čase t. Všechny tři rovnice (1.14), (1.16), (1.17) modelují, adekvátně do jisté míry, stejný proces. Ovšem jejich tvar je na první pohled dosti odlišný. Pokusíme se tuto „vadu na kráse“ odstranit.

Pravou stranu rovnice (1.14) přepíšeme ve tvaru

$$rx(t) - \frac{r-1}{K}x(t)^2 = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) + x(t)$$

a člen $x(t)$ převedeme na levou stranu. Dostaneme

$$x(t+1) - x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

Na levé straně je diference posloupnosti x, rovnici proto můžeme přepsat ve tvaru

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$

nebo stručně

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.1}$$

Rovnici (1.16) postupně upravíme.

$$\begin{aligned}
Kx(t+1) + (r-1)x(t)x(t+1) &= rKx(t),\\
Kx(t+1) - Kx(t) &= rKx(t) - Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
K\big(x(t+1) - x(t)\big) &= (r-1)Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
\Delta x(t) &= (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t+1)}{K}\right).
\end{aligned}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme tuto rovnici zapsat ve stručnějším tvaru

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x^\sigma}{K}\right). \tag{2.2}$$

Rovnice (2.1) a (2.2) jsou „téměř stejné“, liší se pouze posunem posloupnosti na pravé straně; na levé straně mají relativní změnu velikosti populace.

Rovnici (1.17) také upravíme:

$$\ln \frac{x(t+1)}{x(t)} = \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \ln r,$$

$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \ln r,$$

takže pomocí operátoru diference dostaneme rovnici ve stručném tvaru

$$\Delta \ln x = (\ln r)\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.3}$$

Výrazy na pravých stranách rovnic (2.1) a (2.3) se liší pouze ve faktorech $r-1$ a $\ln r$. Ovšem pro „nepříliš velká“ r je podle Taylorovy věty

$$\ln r = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(r-1)^n}{n} = r - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(r-1)^n}{n},$$

takže hodnota $r-1$ je první aproximací hodnoty $\ln r$. Pravé strany rovnic (2.1) a (2.3) jsou opět „téměř stejné“. Na levé straně rovnice (2.3) je absolutní změna velikosti populace vyjádřená na logaritmické stupnici.

Levou stranu rovnice (2.3) také aproximujeme Taylorovým polynomem prvního stupně. Dostaneme

$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \ln \frac{x(t+1)}{x(t)} \approx \frac{x(t+1)}{x(t)} - 1 = \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta x(t)}{x(t)}.$$

Vidíme, že také levou stranu rovnice (2.1) lze považovat za první aproximaci levé strany rovnice (2.3).

Poznamenejme ještě, že dvojice rovnic (1.14) a (2.1), (1.16) a (2.2), (1.17) a (2.3) nejsou ekvivalentní. Ty původní (1.14), (1.16) a (1.17) připouštějí jako své řešení nulovou posloupnost, tvar upravených rovnic (2.1), (2.2) a (2.3) nulové řešení nepřipouští.

Provedené manipulace s rovnicemi (1.14), (1.16) a (1.17) ukazují hlubší souvislost těchto rovnic – modelů růstu populace s vnitrodruhovou konkurencí. Rovnice (1.14) je mezním případem rovnice (1.17), rovnice (1.16) ve tvaru (2.2) je drobnou modifikací rovnice (1.14) zapsané ve tvaru (2.1).

Parametr K interpretujeme jako úživnost prostředí, tj. jako velikost populace, která je se svým životním prostředím v dynamické rovnováze. Poměr x/K lze chápat jako míru porušení této rovnovážné velikosti, rozdíl $1 - x/K$ jako vzdálenost od rovnováhy. Všechny tři rovnice (2.1), (2.2) a (2.3) lze nyní přečíst jednotným způsobem: Změna velikosti populace je úměrná její vzdálenosti od rovnovážného stavu.

Ještě si všimněme jedné zajímavosti. Model (2.2), který má na pravé straně posunutou hledanou posloupnost, lze interpretovat tak, že současná změna stavu je způsobena stavem budoucím, tj. že populace anticipuje budoucnost. Ovšem ekvivalence rovnic (2.2) a (1.16) ukazuje, že ani přijetí rovnice (2.2) za správný model růstu populace nás ještě nenutí opustit Laplaceův determinismus.

Ukázali jsme, že jeden model nějakého procesu lze zapisovat různými způsoby. Tyto rozmanité možnosti zápisu jednoho modelu mohou nabízet jeho různé intepretace. Vhodný zápis různých modelů může naopak ukázat nějakou obecnou nebo společnou vlastnost modelované reality.

Jedna společná vlastnost tří uvedených modelů růstu populace byla však vidět již z jejich vyjádření (1.14), (1.16) a (1.17) – na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že model růstu populace je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na modelovaný růst populace v omezeném prostředí; jinak řečeno, populaci s jejím prostředím si představujeme jako izolovanou od okolního světa. Populaci a její prostředí považujeme za uzavřený systém, který se vyvíjí podle svých vlastních (ΑΥΤΟΣ) zákonů (ΝΟΜΟΙ). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a také (2.1), (2.2), (2.3) nazýváme *autonomní.*

Obsahem této kapitoly budou nejprve různé způsoby zápisu rovnic, v nichž vystupuje neznámá posloupnost, její diference a/nebo posun. Tato diference nebo posun nemusí být nutně prvního řádu, jako v dosud uvedených příkladech. To umožní, mimo jiné, zformulovat alternativní model růstu populace, v němž je specifikován charakter vnitrodruhové konkurence.

Ve druhé sekci se nejprve podíváme na model růstu populace z jiného hlediska. Nebudeme se na populaci a její prostředí dívat jako na jeden uzavřený systém, ale populaci budeme chápat jako otevřený systém, na který působí okolní prostředí. Pokud i prostředí budeme považovat za systém, dojdeme k soustavě dvou rovnic. Dojdeme tak k soustavám (systémům[1]) více rovnic a ukážeme, že takové systémy můžeme chápat jako rovnice pro posloupnosti, jejíž členy jsou tvořeny více složkami, tj. jejichž členy nejsou čísla ale vektory.

V poslední sekci této kapitoly uvedeme možné zobecnění zaváděných rovnic a budeme ho ilustrovat na další možnosti, jak modelovat růst populace s vnitrodruhovou konkurencí.

2.1 Diferenční rovnice a počáteční úlohy

Definice 13. Nechť Φ je funkce $2k+2$ proměnných, která je nekonstantní v $k+2$-hé proměnné nebo ve druhé a v $2k+2$-hé proměnné[2]. *Diferenční rovnice k-tého řádu* je rovnice tvaru

$$\Phi\big(t, x(t), \Delta x(t), \Delta^2 x(t), \dots, \Delta^k x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+k)\big) = 0.$$

Pokud je funkce Φ konstantní v první proměnné, nazývá se rovnice *autonomní.*

Speciální případy diferenčních rovnic:

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu nerozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*implicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = 0, \tag{2.4}$$

kde F je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní v poslední proměnné.

[1]Slovo „systém“ obecně označuje nějaký výsek reality, který je tvořen nějakými prvky, mezi kterými existují nějaké vazby. Proto můžeme i několik provázaných rovnic nazývat stejným slovem. Nebo jinak: slovo „soustava“ je ekvivalentem řeckého ΣΥΣΤΗΜΑ.

[2]Pokud je funkce $\Phi = \Phi(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x, x^\sigma, x^{\sigma^2}, \dots, x^{\sigma^k})$ diferencovatelná, můžeme předpoklad o nezávislosti na příslušných proměnných zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta^k x} \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\sigma^k}} \neq 0.$$

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu rozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*explicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$\Delta^k x = f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots, \Delta^{k-1} x\right), \tag{2.5}$$

kde f je reálná funkce $k+1$ proměnných.

Diferenční rovnice k-tého řádu druhého typu je rovnice tvaru

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k)\big) = 0, \tag{2.6}$$

kde G je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní ve druhé a v poslední proměnné.

Rekurentní formule k-tého řádu je rovnice tvaru

$$x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big), \tag{2.7}$$

kde g je reálná funkce $k+1$ proměnných, která není konstantní ve druhé proměnné.

Poznámka 11. S pomocí operátoru posunu můžeme diferenční rovnici k-tého řádu, resp, diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\Phi\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots, \Delta^k x, x^\sigma, \ldots, x^{\sigma^k}\right) = 0, \text{ resp. } G\left(t, x, x^\sigma, \ldots, x^{\sigma^k}\right) = 0.$$

Každou diferenční rovnici lze převést na diferenční rovnici prvního nebo druhého typu.

Každou implicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na diferenční rovnici druhého typu stejného řádu a naopak.

Každou explicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na rekurentní formuli stejného řádu a naopak.

Vzhledem k Tvrzení 8 v Kapitole 1 totiž můžeme položit

$$F\big(t, x(t), \Delta x(t), \ldots, \Delta^k x(t)\big) =$$
$$= \Phi\left(t, x(t), \Delta x(t), \ldots, \Delta^k x(t), \Delta x(t) + x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right),$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k)\big) =$$
$$= \Phi\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i), x(t+1), \ldots, x(t+k)\right).$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k)\big) =$$
$$= F\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), x(t+2) - 2x(t+1) + x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i)\right),$$

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots, \Delta^k x\right) = G\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right).$$

$$
\begin{aligned}
&g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big) = \\
&\qquad = f\left(t, x(t), x(t+1)-x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} x(t+k-i+1)\right) - \\
&\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots, \Delta^{k-1} x\right) = \\
&\qquad = g\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\Delta^i x(t)\right) - \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\Delta^i x(t).
\end{aligned}
$$

Definice 14. Nechť $t_0 \in \mathbb{Z}$ a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že

$$(t_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \operatorname{Dom} g.$$

Rovnosti

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ x(t_0+2) = \xi_2, \ldots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1} \tag{2.8}$$

nazveme *počáteční podmínky pro rekurentní formuli* (2.7).

Pokud ekvivalentně předpokládáme, že

$$\left(t_0, \xi_0, \xi_1 - \xi_0, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} \xi_{k-1}\right) \in \operatorname{Dom} f,$$

nazýváme rovnosti (2.8) *počáteční podmínky pro diferenční rovnici* (2.5). Rovnici (2.5) s počátečními podmínkami (2.8) nazýváme *počáteční úloha (problém) pro diferenční rovnici* (2.5).

Definice 15. Libovolná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že pro každý index $t \in \operatorname{Dom} x$ splňuje některou z rovností (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) se nazývá *partikulární řešení příslušné diferenční rovnice.*

Množina všech posloupností, které jsou partikulárním řešením některé diferenční rovnice (2.4), (2.5), (2.6) nebo (2.7), se nazývá *obecné řešení příslušné diferenční rovnice.*

Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku (2.8) se nazývá *řešení počáteční úlohy.*

Pokud lze obecné řešení zapsat ve tvaru $\{x(t) = u(t, \boldsymbol{c}) : \boldsymbol{c} \in A \subseteq \mathbb{R}^m\}$, budeme také o posloupnosti $u(\,\cdot\,, \boldsymbol{c})$ závislé na (vektorovém) parametru c (na m-tici konstant) mluvit jako o obecném řešení příslušné rovnice.

Příklad. Uvažujme rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost s kvocientem 2, tj.

$$x(t+1) = 2x(t)$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = \xi_0$. Tuto formuli můžeme ekvivalentně zapsat jako explicitní nebo implicitní diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = x,\ \text{nebo}\ x - \Delta x = 0,$$

nebo jako diferenční rovnici druhého typu

$$x(t+1) - 2x(t) = 0.$$

Libovolná posloupnost definovaná vztahem $x(t) = a2^t$, kde a je nějaké reálné číslo, je partikulárním řešením rovnice.

Množina $\{x \in \mathcal{P} : x(t) = a2^t, a \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením rovnice. Obecné řešení lze také zapsat stručně (a méně přesně) jako $x(t) = a2^t$.

Posloupnost definovaná vztahem $x(t) = \xi_0 2^{t-t_0}$ je řešením počáteční úlohy. ■

Příklad. *Logistická rovnice se zpožděním*

Logistickou rovnici (1.14) vývoje velikosti populace jsme odvodili z předpokladu, že populace svou velikostí, tj. silou vnitrodruhové konkurence, bezprostředně zmenšuje svůj růstový koeficient, zmenšuje porodnost nebo zvětšuje úmrtnost. Vliv velikosti populace na její růst však nemusí být bezprostřední, může k němu docházet s jistým zpožděním.

Uvažujme např. populaci, v níž v jednom období dospělí jedinci produkují nějaká nedospělá stadia (např. plazi kladou vejce) a spotřebovávají zdroje prostředí. Úživnost prostředí nemá na nedospělé jedince (nakladená vejce) žádný vliv. Teprve až nedospělci dospějí (z vajec se vylíhnou noví jedinci), závisí jejich přežívání a/nebo plodnost na množství potravy, které jejich prostředí poskytuje. To znamená, že růstový koeficient závisí na velikosti populace v předchozí generaci. Tyto úvahy vedou k tomu, že výraz

$$r - \frac{r-1}{K}x(t)$$

z rovnice (1.14) nahradíme výrazem $r - \dfrac{r-1}{K}x(t-1)$ a dostaneme rovnici

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t-1)\right).$$

Budeme-li místo indexu t psát $t+1$, dostaneme diferenční rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x(t+2) = x(t+1)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{2.9}$$

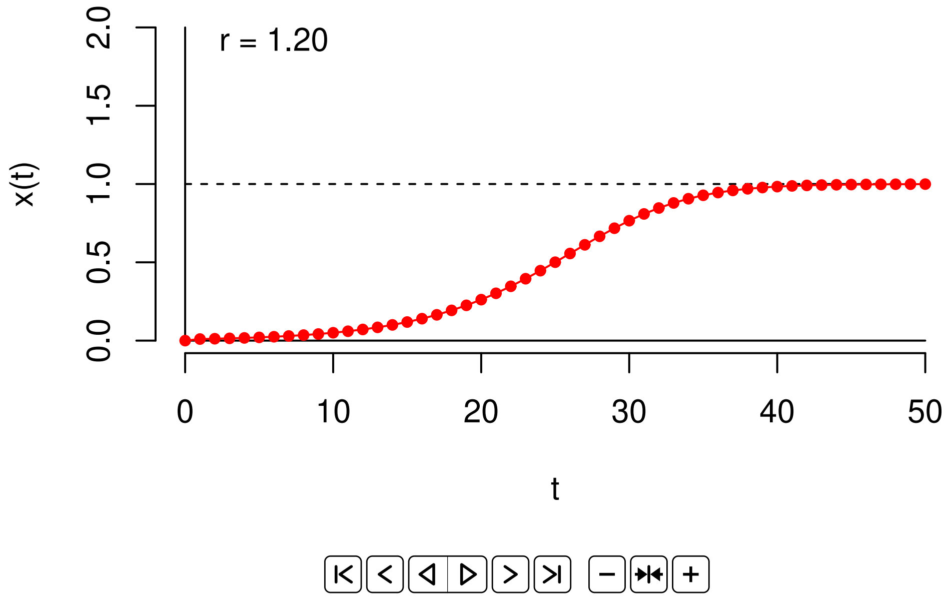
Abychom mohli z této rekurentní formule počítat hodnoty posloupnosti x (velikost populace v jednotlivých časových okamžicích), musíme znát její hodnoty ve dvou po sobě následujících indexech. Potřebujeme tedy počáteční podmínky

$$x(0) = \xi_0,\ x(1) = \xi_1. \tag{2.10}$$

Z počátečních podmínek můžeme vypočítat hodnoty velikosti populace v libovolném čase $t > 0$. Takové simulace můžeme udělat pro různé hodnoty parametrů r a K. Pak uvidíme, že pro malou hodnotu r se velikost populace ustálí na hodnotě kapacity prostředí. Později budeme umět ukázat, že posloupnost x konverguje k hodnotě K monotonně pro $1 < r < \frac{5}{4}$, s tlumenými oscilacemi pro $\frac{5}{4} < r < \frac{3}{2}$. Pro větší hodnoty růstového koeficientu budou hodnoty $x(t)$ kolísat kolem hodnoty K. Rovnice (2.9) tedy podobně jako rovnice (1.14) může modelovat růst populace K-stratégů i r-stratégů.

Pokud by však počáteční hodnoty ξ_0 a ξ_1 byly takové, že

$$\frac{\xi_0}{\xi_1} > \frac{Kr}{r-1},$$



Obrázek 2.1: Řešení logistické rovnice se zpožděním $x(t+2) = x(t+1)\big(r - (r-1)x(t)\big)$ s počátečními podmínkami $x(0) = 0$, $x(1) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

pak by $x(2) < 0$; model (2.9) růstu populace má stejný nedostatek, jako logistická rovnice (1.14). V případě rovnice se zpožděním je situace ještě horší – v důsledku kolísání velikosti pro velké hodnoty růstového koeficientu r může dojít k tomu, že

$$\frac{x(t-1)}{x(t)} > \frac{Kr}{r-1}$$

a simulovaná velikost populace klesne do záporných hodnot.

Na obr. 2.1 jsou zobrazeny výsledky simulací pro $K = 1$, hodnoty r v rozpětí od 1,2 do 1,32 a počáteční hodnoty $x(0) = 0$, $x(1) = 0{,}01$. ■

2.2 Systémy diferenčních rovnic

Definice 16. Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k$ a $g_1, g_2, \ldots, g_k$ jsou funkce $k+1$ proměnných se stejným definičním oborem. *Systém k explicitních diferenčních rovnic prvního řádu* je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= f_1\big(t, x_1, x_2, \ldots, x_k\big), \\ \Delta x_2 &= f_2\big(t, x_1, x_2, \ldots, x_k\big), \\ &\vdots \\ \Delta x_k &= f_k\big(t, x_1, x_2, \ldots, x_k\big), \end{aligned} \tag{2.11}$$

systém k rekurentních formulí prvního řádu je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= g_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ x_2(t+1) &= g_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ &\vdots\\ x_k(t+1) &= g_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Poznámka 12. Systém explicitních diferenčních rovnic prvního řádu lze převést na systém rekurentních formulí prvního řádu a naopak. Stačí totiž položit

$$g_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) = f_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) + x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Vektorovou posloupnost $\boldsymbol{x}$ a její hodnotu v indexu t definujeme vztahy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

jako vektor (k-tici) posloupností. Označíme dále

$$\boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \boldsymbol{f}\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big)\\ f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ f_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}$$

a podobně

$$\boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \begin{pmatrix} g_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ g_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ g_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}.$$

Diferenci a posun vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$ v indexu t definujeme vztahy

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t+1) - \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \vdots\\ \Delta x_k(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1^\sigma(t)\\ x_2^\sigma(t)\\ \vdots\\ x_k^\sigma(t) \end{pmatrix}.$$

Při tomto označení můžeme systém explicitních diferenčních rovnic zapsat jako rovnici vektorovou

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \quad \text{nebo stručněji } \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}\big),$$

a systém rekurentních formulí jako formuli vektorovou

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big).$$

Počáteční podmínky pro systém (2.11) nebo (2.12) jsou tvaru

$$x_1(t_0) = \xi_1,\ x_2(t_0) = \xi_2,\ \dots,\ x_k(t_0) = \xi_k \quad \text{nebo vektorově} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi} \tag{2.13}$$

Rovnice (2.11), resp. (2.12) s počáteční podmínkou (2.13) se nazývá *počáteční úloha pro systém* (2.11), resp. (2.12).

Nechť posloupnost x je řešením počáteční úlohy (2.7), (2.8). Položme

$$x_i(t) = x(t+i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Pak $x_i(t+1) = x(t+1+i-1) = x(t+i)$, pro $i = 1, 2, \ldots, k$, tedy

$$x_i(t+1) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

a

$$x_k(t+1) = x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big).$$

Dále

$$x_i(t_0) = x(t_0+i-1) = \xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Posloupnost x je tedy první složkou řešení systému

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= \qquad x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= \qquad\qquad x_k(t) \\ x_k(t+1) &= g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{2.15}$$

s počáteční podmínkou (2.14). Naopak, je-li posloupnost x_1 první složkou řešení počáteční úlohy (2.15), (2.14), pak je také řešením úlohy (2.7), (2.8), neboť

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_1(t+2) &= x_2(t+1) = x_3(t), \\ x_1(t+3) &= x_2(t+2) = x_3(t+1) = x_4(t), \\ &\vdots \\ x_1(t+k-1) &= x_k(t), \\ x_1(t+k) &= x_k(t+1) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{k-1}(t)\big) = \\ &= g\big(t, x_1(t), x_1(t+1), \ldots, x_1(t+k-1)\big). \end{aligned}$$

Systém rekurentních formulí (2.15) můžeme přepsat ve tvaru ekvivalentního systému explicitních diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= -x_1 + x_2 \\ \Delta x_2 &= \qquad -x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ \Delta x_{k-1} &= \qquad\qquad -x_{k-1} + x_k \\ \Delta x_k &= g(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) - x_k \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak

Tvrzení 9. Rekurentní formule, resp. explicitní diferenční rovnice, k-tého řádu je ekvivalentní s nějakým systémem k rekurentních formulí, resp. k explicitních rovnic, prvního řádu.

2.3 Operátorově-diferenční rovnice

Povšimněme si ještě jednou explicitní diferenční rovnice prvního řádu, resp. rekurentní formule prvního řádu, ve tvaru

$$\Delta x(t) = f(t,x), \quad \text{resp.} \quad x^\sigma(t) = g(t,x). \tag{2.16}$$

V obou případech je na pravé straně reálná funkce dvou reálných proměnných. Dalekosáhlé zobecnění těchto rovnic můžeme získat pouhou změnou interpretace těchto pravých stran. Symbol f, resp. g, nebudeme chápat jako funkci, tj. zobrazení $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ale jako operátor, tj. zobrazení $\mathbb{R}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, které reálnému číslu t a posloupnosti x přiřadí posloupnost.

Základní rozdíl operátorově-diferenčních rovnic oproti diferenčním rovnicím (2.16) je ten, že pro výpočet hodnoty $x(t+1)$ nestačí znát jen „bezprostředně předcházející“ hodnotu $x(t)$, ale je nutné „nějak znát celou posloupnost“ x.

Příklad. *Růst populace produkující toxické odpady*

Výraz

$$r - \frac{r-1}{K}x$$

vyskytující se na pravé straně rovnice (1.14), která modeluje vývoj populace, interpretujeme jako růstový koeficient, který je zmenšován působením populace o velikosti x. Budeme modelovat jednu z možností, jak k tomuto zmenšování dochází.

Předpokládejme, že zvětšení úmrtnosti, a tedy zmenšení růstového koeficientu, je způsobeno tím, že populace produkuje nějaké škodlivé odpady. Tyto odpady zamořují prostředí, ale postupně se v něm rozkládají. Označme b množství odpadů, které vyprodukuje jedinec (nebo přesněji populace jednotkové velikosti) za časovou jednotku. V časovém intervalu $[t, t+1)$, stručně řekneme v čase t, se tedy do prostředí dostanou odpady v množství $bx(t)$. Dále označme symbolem p podíl odpadu, který se rozloží za jednotku času; parametr p samozřejmě splňuje nerovnosti

$$0 < p < 1.$$

Z odpadu vyprodukovaného v čase t tedy v prostředí zůstane v čase $t+1$ množství

$$(1-p)bx(t)$$

odpadu. Nebo jinak, v čase t bude v prostředí zůstávat množství

$$(1-p)bx(t-1)$$

z odpadu vyprodukovaného v čase $t-1$. Populace kontaminovala prostředí po celou dobu své existence, proto celkové množství $B(t)$ odpadu v čase t je rovno

$$B(t) = bx(t) + (1-p)bx(t-1) + (1-p)\big((1-p)bx(t-2)\big) + \cdots = b\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j).$$

Je přirozené předpokládat, že s rostoucím množstvím odpadu v prostředí se zmenšuje růstový koeficient populace; čím více je prostředí kontaminováno, tím větší je úmrtnost. Pro první model tohoto typu zvolíme nejjednodušší možnost — lineární závislost. Růstový koeficient populace závislý na celkovém množství B toxického odpadu vyjádříme jako

$$r - \alpha B,$$

kde α je vhodná kladná konstanta; α vyjadřuje citlivost populace na znečištění.

Provedenými úvahami jsme dospěli k modelu vývoje populace ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \alpha b \sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j)\right) \tag{2.17}$$

Abychom podle tohoto modelu vypočítali velikost populace v následujícím časovém okamžiku $t+1$, potřebujeme znát velikost populace ve všech předchozích časech $t, t-1, t-2, \dots$. Množina počátečních podmínek

$$x(0) = \xi_0,\ x(-1) = \xi_{-1},\ x(-2) = \xi_{-2}, \dots \tag{2.18}$$

pro operátorově-diferenční rovnici (2.17) je tedy nekonečná.

Můžeme se ptát, zda i populace, jejíž velikost se vyvíjí podle modelu (2.17) může být v dynamické rovnováze se svým prostředím. Ptáme se tedy, zda existuje velikost populace, kterou označíme x^* tak, aby $x(t) = x^*$ pro každou hodnotu t, tj. zda existuje kladné řešení algebraické rovnice

$$x^* = x^*\left(r - \alpha b \sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x^*\right).$$

Poněvadž $|p| < 1$, můžeme geometrickou řadu na pravé straně této rovnice sečíst. Po snadné úpravě dostaneme

$$x^* = \frac{p(r-1)}{\alpha b}.$$

Toto číslo je kladné, pokud $r > 1$. Již víme, že populace s růstovým koeficientem $r > 1$, jejíž růst by nebyl omezován znečišťovaným prostředím, roste nade všechny meze. Produkce odpadu tedy může stabilizovat velikost populace.

Opět můžeme rovnovážnou velikost x^* označit symbolem K. Pak bude

$$\alpha b = \frac{p(r-1)}{K}$$

a rovnici (2.17) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j)\right). \tag{2.19}$$

Růst populace je nyní charakterizován třemi parametry — vnitřním koeficientem růstu r, kapacitou prostředí K a rychlostí rozkladu odpadních produktů p. Povšimněme si, že v limitním případě $p \to 1$, tj. v případě, že všechny odpadní produkty se rozloží hned během jednotkového času, rovnice (2.19) přejde v rovnici (1.14).

Řešení úlohy (2.19), (2.18) nemůžeme bezprostředně simulovat na počítači, neznáme a nemůžeme zadat nekonečnou množinu počátečních hodnot. Budeme proto uvažovat jednodušší úlohu. Představme si, že v čase $t = 0$ do neobsazeného prostředí pronikla populace o velikosti ξ_0. Pak se počáteční podmínky (2.18) redukují na

$$x(0) = \xi_0, \quad x(t) = 0 \text{ pro } t < 0.$$

V tomto případě je také

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j) = \sum_{j=0}^{t}(1-p)^j x(t-j) =$$
$$= x(t) + (1-p)x(t-1) + (1-p)^2 x(t-2) + \cdots + (1-p)^{t-1}x(1) + (1-p)^t x(0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j}x(j).$$

Rovnici (2.19) proto můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K}\sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j}x(j)\right). \tag{2.20}$$

Ještě poznamenejme, že operátorově-diferenční rovnice tohoto tvaru se nazývá *diferenční rovnice s distribuovaným zpožděním* nebo *diferenční rovnice konvolučního typu.* ■

2.4 Cvičení

V úlohách 1–5 převeďte obecnou diferenční rovnici na explicitní rovnici prvního typu a na rekurentní formuli.

1. $3\big(x(t+1) - 2x(t)\big) + x(t)x(t+1) = 0$
2. $x(t+1)x(t) + x(t+1) - 2x(t) = t^2$
3. $\Delta x(t) = \big(2 - x(t)\big)x(t+1)$
4. $\Delta x(t) = \big(1 - 2x(t)\big)x(t+1)$
5. $\Delta^2 x(t) - 3\Delta x(t) = t$
6. Rekurentní formuli (2.9) přepište ve tvaru explicitní diferenční rovnice druhého řádu.
7. Odvoďte model vývoje velikosti populace za následujících předpokladů: Časová jednotka je zvolena tak, že v laboratorních podmínkách (v naprosto čistém prostředí) se velikost populace za tuto jednotku zdvojnásobí. V přirozeném a omezeném prostředí tata populace vytváří nějaké produkty svého metabolismu. Tyto látky jsou tak toxické, že v prostředí jimi nasyceném je populace za časovou jednotku zdecimována (její velikost se zmenší na desetinu původní). Odpadní produkty metabolismu se však rozkládají tak rychle, že za zvolenou časovou jednotku z nich zbyde polovina.
   Určete kapacitu prostředí (velikost populace, která je s prostředím v dynamické rovnováze).

Výsledky:

1. $\Delta x(t) = \dfrac{3 - x(t)}{3 + x(t)}x(t),\ x(t+1) = \dfrac{6x(t)}{3 + x(t)}$

2. $\Delta x(t) = \dfrac{t^2 + x(t) + x(t)^2}{1 + x(t)}$, $x(t+1) = \dfrac{t^2 + 2x(t)}{1 + x(t)}$

3. $\Delta x = -\dfrac{x^2}{x+1}$, $x(t+1) = 1 - \dfrac{1}{1 + x(t)}$

4. $\Delta x = 1 - x$, $x(t+1) = 1$

5. $\Delta^2 x(t) = 3\Delta x(t) + t$, $x(t+2) = 5x(t+1) - 4x(t) + t$

6. $\Delta^2 x = \left(r - 2 - \dfrac{r-1}{K}x\right)\Delta x + \left(r - 1 - \dfrac{r-1}{K}x\right)x$

7. $x(t+1) = 2x(t) f\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)\right)$, kde f je libovolná klesající funkce taková, že $f(0) = 1$, $\lim\limits_{B\to\infty} f(B) = \frac{1}{20}$.
   Se svým prostředím je v dynamické rovnováze populace, jejíž velikost je $x^* = \frac{1}{2}y$, kde y je jediné kladné řešení rovnice $yf(y) = 1$.
   Konkrétní možná volba: $f(y) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{19}{19y + 20}$, pak

$$x(t+1) = \frac{1}{10}x(t)\left(1 + \frac{380}{20 + 19\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)}\right), \qquad x^* = 2{,}046$$

Kapitola 3

Lineární rovnice

V úvodu ke kapitole 1 jsme odvodili nejjednodušší možný model vývoje populace ve tvaru rekurentní formule prvního řádu (1.7). Je-li růstový koeficient $r > 1$, pak jejím řešením je ryze rostoucí neohraničená geometrická posloupnost, což nemá rozumnou ekologickou interpretaci v delším časovém období. Abychom tento nedostatek odstranili, zahrnuli jsme do úvahy skutečnost, že populace se vyvíjí v nějakém omezeném prostředí, které svým působením na velkou populaci zmenšuje její růstový koeficient. Tímto způsobem jsme získali několik variant logistické rovnice (1.14), (1.16), (1.17), nebo po úpravách v jednotnějších tvarech (2.1), (2.2), (2.3). Růst populace byl regulován omezenou úživností prostředí, kterou jsme v uvedených případech považovali za konstantní, v čase se neměnící charakteristiku.

Nerealistický neomezený růst populace předpovídaný modelem (1.7) však může být redukován i jiným způsobem. Nemusí jít o samoregulaci populace, ale o cílené zásahy do jejího růstu. Představme si například hospodářský les, ve kterém majitel chce mít srnce. Nemůže jich tam ale mít zdaleka tolik, kolik by odpovídalo úživnosti lesa; taková populace by les ničila. Proto při „přemnožení“ srnců provádí jejich odstřel. „Menežment odstřelu“ může mít nepřeberné množství podob. Ukážeme dvě možnosti, které pracovně nazveme prvního a druhého řádu; tato terminologie odráží fakt, že první možnost povede k popisu regulovaného růstu populace diferenční rovnicí prvního řádu, druhá k rovnici druhého řádu.

Model prvního řádu

Uvažme nejprve možnost, že majitel plánuje odstřel srnců na každou sezónu jinak; může se rozhodovat podle počtu lovuchtivých přátel, podle aktuální ceny srnčího masa a podobně. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit tak, že úmrtnost populace d může být v každé sezóně jiná, její hodnota závisí na čase, $d = d(t)$. Růstový koeficient $r = 1 + b - d$ (kde b označuje porodnost) tedy také závisí na čase, $r = r(t)$. Touto úvahou dostáváme modifikaci modelu (1.7) růstu populace ve tvaru

$$x(t+1) = r(t)x(t). \tag{3.1}$$

Opět se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Známe-li růstový koeficient r v každém čase $t = 0, 1, 2, \dots$ a počáteční velikost populace $x(0) = \xi_0$, můžeme postupně vypočítat velikost populace $x(t)$ v libovolném následujícím časovém okamžiku:

$$
\begin{aligned}
x(1) &= r(0)x(0) = r(0)\xi_0,\\
x(2) &= r(1)x(1) = r(1)r(0)\xi_0,\\
x(3) &= r(2)x(2) = r(2)r(1)r(0)\xi_0,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

atd. Obecně dostaneme velikost populace v čase t vyjádřenu vztahem

$$x(t) = \xi_0 \prod_{j=0}^{t-1} r(j).$$

O vlastnostech posloupnosti dané tímto obecným předpisem však nemůžeme bezprostředně mnoho říci.

Regulaci populace (střílení srnců) si můžeme představit i jinak. Majitel lesa má nějakou kýženou velikost populace η a „přespočetné“ srnce vystřílí, tj. v čase t (v t-té sezóně) zlikviduje populaci o velikosti $x(t) - \eta$. Pokud odstřel provádí na závěr sezóny a počet ulovených zvířat stanoví na základě velikosti populace zjištěné na začátku sezóny, bude velikost populace v následující sezóně dána rovností

$$x(t+1) = rx(t) - \big(x(t) - \eta\big),$$

nebo po snadné úpravě

$$x(t+1) = (r-1)x(t) + \eta. \tag{3.2}$$

Znovu se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Ze znalosti počáteční velikosti populace $x(0) = \xi_0$ můžeme nyní postupně vypočítat

$$
\begin{aligned}
x(1) &= (r-1)x(0) + \eta,\\
x(2) &= (r-1)x(1) + \eta = (r-1)\big((r-1)x(0) + \eta\big) + \eta = (r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta,\\
x(3) &= (r-1)x(2) + \eta = (r-1)\Big((r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta\Big) + \eta =\\
&= (r-1)^3\xi_0 + \big((r-1)^2 + (r-1) + 1\big)\eta,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

atd. Obecně dostaneme

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \eta\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j.$$

Na pravé straně této rovnosti se objevuje součet prvních t členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem $r-1$. Pokud tedy $r \neq 2$, platí

$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \frac{1-(r-1)^t}{1-(r-1)} = \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}$$

a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}\eta = (r-1)^t\left(\xi_0 + \frac{\eta}{r-2}\right) - \frac{\eta}{r-2};$$

pokud $r = 2$, platí

$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \sum_{j=0}^{t-1} 1 = t$$

a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno

$$x(t) = (r-1)^t \xi_0 + \eta t = \xi_0 + \eta t.$$

Vidíme tedy, že v případě $r \geq 2$ je posloupnost x ryze rostoucí a neohraničená, v případě $1 < r < 2$ je posloupnost x monotonní a platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\eta}{2-r}.$$

Metoda „odstřelu přespočetných srnců“ tedy nevede k žádoucímu cíli; buď není schopna populaci zregulovat (při velkém růstovém koeficientu) nebo ji zreguluje na hodnotu větší, než byla hodnota stanovená. Ovšem v případě růstového koeficientu $r \in (1,2)$ lze metodu snadno modifikovat; za velikost „populace k odstřelu“ v t-té sezóně lze stanovit hodnotu $x(t)-(2-r)\eta$ a celková velikost populace se při této volbě bude vyvíjet k potřebné hodnotě η; vývoj velikosti populace je popsán rovnicí

$$x(t+1) = (r-1)x(t) + (2-r)\eta.$$

Majitel lesa (honitby) může stanovit přesný počet ulovených srnců. Ve skutečnosti se ne každý střelec vždycky trefí nebo naopak v lovecké euforii postřílí srnců více, než měl přiděleno. V každé sezóně tedy bude odstřelen jiný počet srnců. Člen $(2-r)\eta$ na pravé straně předchozí rovnice tedy nahradíme nějakým výrazem závislým na čase, řekněme $b(t)$. Navíc v každé sezóně jinak prší a svítí slunce, takže je jiné množství potravy pro srnce, v různých sezónách mají srnci různou kondici. To znamená, že i růstový koeficient je v každé sezóně jiný, závisí na čase, $r = r(t)$. Tato úvaha vede k tomu, že předchozí rovnici nahradíme poněkud obecnější rovnicí

$$x(t+1) = \big(r(t)-1\big)x(t) + b(t). \tag{3.3}$$

Předchozí modely (3.1) a (3.2) lze považovat za speciální případy modelu (3.3). Rekurentní formuli (3.3) lze přepsat jako diferenční rovnici

$$\Delta x = \big(r(t)-2)\big)x + b(t). \tag{3.4}$$

V diferenční rovnici (3.4) i rekurentní formuli (3.3) je podstatné, že na jejich pravých stranách jsou hodnoty hledané posloupnosti v první mocnině, tj. funkce na pravé straně rovnic (3.3) a (3.4) je lineární funkcí proměnné $x(t)$. Z tohoto důvodu se diferenční rovnice tvarů (3.3), (3.4) nebo tvarů s nimi ekvivalentních nazývají lineární.

Model druhého řádu

Vraťme se k představě majitele lesa, který reguluje velikost populace srnců jejich odstřelem. Představme si, že kvótu ulovených zvířat v jedné sezóně stanoví podle přírůstku populace od sezóny předchozí, konkrétně jako přímo úměrnou tomuto přírůstku. V t-té sezóně se tedy lovem zlikviduje populace srnců o velikosti

$$\alpha\big(x(t) - x(t-1)\big),$$

kde α je nějaké kladné číslo. V následující, tj. $t+1$-ní sezóně bude mít populace velikost

$$x(t+1) = rx(t) - \alpha\big(x(t) - x(t-1)\big);$$

parametr r stále označuje přirozený růstový koeficient populace. Uvedená rovnost má platit pro libovolnou hodnotu t, můžeme v ní tedy psát $t+1$ místo t. Po snadné úpravě dostaneme

$$x(t+2) - (r-\alpha)x(t+1) - \alpha x(t) = 0. \tag{3.5}$$

To je diferenční rovnice druhého typu, kterou můžeme přepsat ve tvaru rovnice prvního typu

$$\Delta^2 x + (2 - r + \alpha)\Delta x - (r-1)x = 0. \tag{3.6}$$

Hodnoty posloupnosti x jsou v rovnici (3.5) v první mocnině, diference této posloupnosti v rovnici (3.6) jsou také v první mocnině. Nebo jinak řečeno, na levé straně rovnice (3.5) je lineární kombinace tří po sobě jdoucích členů posloupnosti x, na levé straně rovnice (3.6) je lineární kombinace hodnoty posloupnosti x a její první a druhé diference. Toto pozorování nás opravňuje k tomu, abychom diferenční rovnice (3.5) a (3.6) opět nazvali lineární.

V části 2.2 jsme ukázali souvislost rovnic vyššího řádu a systému rovnic, konkrétně ekvivalenci rovnice (2.7) a systému (2.15). Odvozené rovnice (3.5), resp. (3.6), můžeme také přepsat ve tvaru soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= & & x_2(t), \\ x_2(t+1) &= \alpha x_1(t) &+& (r-\alpha)x_2(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

resp.

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= & & x_2, \\ \Delta x_2 &= (r-1)x_1 &+& (r-\alpha-2)x_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zavedeme-li označení

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & r-\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r-1 & r-\alpha-2 \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu (3.7) přepsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t),$$

tedy ve tvaru formálně shodném s (3.1), a soustavu (3.8) ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}.$$

3.1 Lineární rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t). \tag{3.9}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní*, pokud $b \equiv 0$, a *nehomogenní* v opačném případě. Lineární homogenní rovnice

$$\Delta x = a(t)x \tag{3.10}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici* (3.9).

Rovnici prvního typu (3.9) můžeme přepsat jako rekurentní formuli ve tvaru

$$x(t+1) = \big(1 + a(t)\big)x(t) + b(t). \tag{3.11}$$

Zavedeme-li posloupnost q vztahem $q(t) = 1 + a(t)$, dostaneme rekurentní formuli v nepatrně kratším tvaru

$$x(t+1) = q(t)x(t) + b(t). \tag{3.12}$$

3.1.1 Princip superpozice

Nulová posloupnost $x \equiv 0$ je evidentně řešením rovnice (3.10). Pokud jsou posloupnosti x_1, x_2 řešením rovnice (3.10) a γ_1, γ_2 jsou libovolné konstanty, pak lineární kombinace posloupností $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ je také řešením homogenní rovnice, neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\big)(t) = \gamma_1 \Delta x_1(t) + \gamma_2 \Delta x_2(t) = \gamma_1 a(t)x_1(t) + \gamma_2 a(t)x_2(t) = \\ = a(t)\big(\gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t)\big).\end{aligned}$$

Jinak řečeno, množina řešení lineární homogenní rovnice tvoří vektorový prostor.

Jsou-li posloupnosti x_1, x_2 řešením nehomogenní rovnice (3.9), pak jejich rozdíl je řešením přidružené homogenní rovnice (3.10), neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(x_1 - x_2\big)(t) = \Delta x_1(t) - \Delta x_2(t) = a(t)x_1(t) + b(t) - \big(a(t)x_2(t) + b(t)\big) = \\ = a(t)\big(x_1(t) - x_2(t)\big) = a(t)\big(x_1 - x_2\big)(t).\end{aligned}$$

Jinak řečeno, množina řešení nehomogenní rovnice (3.9) tvoří afinní prostor, jehož zaměřením je prostor řešení přidružené homogenní rovnice. To také znamená, že obecné řešení nehomogenní rovnice (3.9) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (3.10) a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice (3.9).

Jsou-li b_1, b_2 posloupnosti se stejným definičním oborem jako posloupnost a, γ_1, γ_2 jsou konstanty a x_1, resp. x_2, je řešením rovnice

$$\Delta x = a(t)x + b_1(t), \quad \text{resp.} \quad \Delta x = a(t)x + b_2(t),$$

pak posloupnost $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ je řešením rovnice

$$\Delta x = a(t)x + \gamma_1 b_1(t) + \gamma_2 b_2(t),$$

neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\big)(t) = \gamma_1 \Delta x_1(t) + \Delta \gamma_2 x_2(t) = \\ = \gamma_1\big(a(t)x_1(t) + b_1(t)\big) + \gamma_2\big(a(t)x_2(t) + b_2(t)\big) = \\ = a(t)\big(\gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t)\big) + \gamma_1 b_1(t) + \gamma_2 b_2(t).\end{aligned}$$

3.1.2 Homogenní rovnice a exponenciální posloupnost

Známe-li hodnotu řešení rovnice (3.9) v indexu t, tj. hodnotu $x(t)$, můžeme z rekurentní formule (3.11) vždy vypočítat hodnotu následujícího členu řešení $x(t+1)$. Naopak, známe-li $x(t+1)$ a přitom je $a(t)+1 \neq 0$, můžeme z (3.11) vypočítat hodnotu předchozího členu $x(t)$. Vidíme, že hodnoty řešení rovnice (3.11), a ekvivalentně rovnice (3.9), můžeme počítat „dozadu" pouze tehdy, pokud $a(t) \neq -1$. Toto pozorování inspiruje zavedení následujícího pojmu.

Definice 17. Řekneme, že posloupnost $p \in \mathcal{P}$ je *regresivní,* pokud $p(t) \neq -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$. Množinu regresivních posloupností označíme $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathcal{P} : \, (\forall t \in \operatorname{Dom} p)\; 1 + p(t) \neq 0\} .$$

Podobně jako v případě obecných posloupností můžeme zdůraznit definiční obor posloupnosti dolním indexem, tj.

$$\mathcal{R}_{t_0} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{t_0}, \text{ pro } t_0 \in \mathbb{Z}, \qquad \mathcal{R}_{-\infty} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Na množině regresivních posloupností definujeme binární operaci $\oplus$ a unární operaci $\ominus$ vztahy

$$p \oplus q\,(t) = p(t) + q(t) + p(t)q(t), \qquad \ominus p(t) = \frac{-p(t)}{1+p(t)}.$$

Snadno ověříme, že množina regresivních posloupností s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu, nulová posloupnost $o \equiv 0$ je neutrálním prvkem této grupy a $\ominus p$ je opačným prvkem k prvku p.

Tvrzení 10. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Pak pro každou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje jediná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že $\operatorname{Dom} x = \operatorname{Dom} p$, $x(t_0) = x_0$ a $\Delta x(t) = p(t)x(t)$.

Důkaz: Poněvadž $x(t+1) = \big(1+p(t)\big)x(t)$, je posloupnost x definována pro každé $t \geq t_0$. Dále pro každý index t takový, že $t-1 \in \operatorname{Dom} p$ platí $x(t) = \big(1+p(t-1)\big)x(t-1)$ a tedy

$$x(t-1) = \frac{x(t)}{1+p(t-1)},$$

což znamená, že posloupnost x je definována také pro $t \leq t_0$ takové, že $t \in \operatorname{Dom} p$. □

Definice 18. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. *Exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti p s počátkem t_0* $\in \operatorname{Dom} p$ definujeme jako jediné řešení diferenční rovnice

$$\Delta x = p(t)x \tag{3.13}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = 1$. Její t-tý člen značíme $e_p(t, t_0)$.

Věta 15 (Vlastnosti exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť* $p, q \in \mathcal{R}$ *takové, že* $\operatorname{Dom} p = \operatorname{Dom} q$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom} p$. *Pak platí*

1. $e_p(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) \neq 0,$

2. $e_0(t,t_0) \equiv 1$, $e_1(t,t_0) = 2^{t-t_0}$,
3. $e_p(t,t_0)e_q(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0)$,
4. $\big(e_p(t,t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus p}(t,t_0)$,
5. $e_p(t,s) = e_{\ominus p}(s,t)$,
6. $e_p(t,s)e_p(s,t_0) = e_p(t,t_0)$,
7. *Je-li* $p(t) > -1$ *pro všechny indexy* $t \in \operatorname{Dom} p$, *pak* $e_p(\,\cdot\,,t_0) = \mathrm{e}^{\sum_{t_0}\ln(1+p)} > 0$.

Důkaz: Podle Tvrzení 7 platí $\prod\limits_{i=t_0}^{t_0-1}\big(1+p(i)\big) = 1$ a

$$\Delta \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t}\big(1+p(i)\big) - \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \big(1+p(t)-1\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \\ = p(t)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big).$$

Z jednoznačnosti řešení rovnice (3.13) nyní plyne platnost rovnosti v první části věty, nerovnost plyne z vyjádření exponenciální posloupnosti pomocí součinu a z regresivnosti posloupnosti p. Z dokázaného prvního tvrzení věty nyní plyne

$$e_0(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+0) = 1, \quad e_1(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+1) = 2^{(t-1)-(t_0-1)} = 2^{t-t_0},$$

což je druhé tvrzení věty. Třetí tvrzení plyne z následujícího výpočtu

$$e_p(t,t_0)e_q(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+q(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)+q(i)+p(i)q(i)\big) = \\ = e_{p+q+pq}(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0).$$

Díky již dokázané platnosti třetího a druhého tvrzení můžeme psát

$$e_p(t,t_0)e_{\ominus p}(t,t_0) = e_{p+\ominus p}(t,t_0) = e_0(t,t_0) = 1,$$

což je čtvrté tvrzení dokazované věty. Z něho s využitím Tvrzení 7 dále plyne

$$e_p(t,s) = \prod_{i=s}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \left(\prod_{i=t}^{s-1}\big(1+p(i)\big)\right)^{-1} = e_{\ominus p}(s,t),$$

což je páté tvrzení.

Podle Tvrzení 7 dále platí

$$e_p(t,s)e_p(s,t_0) = \prod_{i=s}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{s-1}\big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)$$

a to je šesté tvrzení dokazované věty. Rovnost v posledním tvrzení je ekvivalentní s rovnostmi

$$\ln e_p(t,t_0) = \ln \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \ln \big(1+p(i)\big).$$

□

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici

$$\Delta x = p(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

je dáno rovností

$$x(t) = x_0 e_p(t,t_0) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big), \tag{3.14}$$

neboť

$$x(t_0) = x_0 e_p(t_0,t_0) = x_0 1 = x_0$$

a podle Vět 4 a 15 platí

$$\Delta x(t) = x_0 \Delta e_p(t,t_0) = x_0 p(t) e_p(t,t_0) = p(t)\big(x_0 e_p(t,t_0)\big).$$

3.1.3 Nehomogenní rovnice a Duhamelův princip

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost a $b \in \mathcal{P}$ posloupnost se stejným definičním oborem. Uvažujme počáteční úlohu pro lineární nehomogenní rovnici ve tvaru

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.15}$$

Nejprve se zaměříme na poněkud jednodušší úlohu

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = 0 \tag{3.16}$$

s nulovou počáteční podmínkou. Můžeme si představit, že tato úloha modeluje nějaký proces, jehož chování „samo o sobě“, bez „vnějších vlivů“, je popsáno homogenní rovnicí přidruženou k rovnici v úloze (3.16). Nehomogenita b pak představuje nějaké „řízení“ bebo „zásahy zvnějšku“. Systém přitom byl na počátku v klidu, v nulovém stavu, a vnější vlivy přicházející v průběhu času ho z tohoto stavu vychylují. Stav systému v čase $t > t_0$ je tedy výsledkem – součtem – vlivů v předchozích časových okamžicích. Trochu přesněji řečeno: řešení úlohy (3.16) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(t,i), \tag{3.17}$$

kde w je nějaká, zatím neznámá, funkce dvou celočíselných proměnných. Tato myšlenka je známa jako *Duhamelův princip*; lze ji aplikovat i v mnoha jiných situacích při řešení časově závislých nehomogenních (tj. afinních) systémů.

Diference hledané posloupnosti x je při volbě (3.17) rovna

$$\Delta x(t) = \sum_{i=t_0}^{t} w(t+1,i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} w(t,i) = w(t+1,t) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(w(t+1,i) - w(t,i)\big).$$

Po dosazení posledního výrazu za levou stranu stranu rovnice v úloze (3.16), dosazení (3.17) do její pravé strany a po jednoduché úpravě dostaneme

$$\sum_{i=t_0}^{t-1}\big(w(t+1,i)-w(t,i)-p(t)w(t,i)\big)=b(t)-w(t+1,t).$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když obě její strany budou nulové. A to, specielně, nastane tehdy, když všechny sčítance v sumě na levé straně budou nulové. Tedy když

$$w(t+1,i)-w(t,i)=p(t)w(t,i),\quad w(i+1,i)=b(i),\quad i=t_0,t_0+1,\dots,t-1,t.$$

Tyto rovnosti nůžeme chápat jako systém $t-t_0+1$ počátečních úloh pro neznámé posloupnosti $w(\,\cdot\,,i)$ s parametrem i, tj za úlohy

$$\Delta w(\,\cdot\,,t)=p(t)w(\,\cdot\,,i),\quad w(i+1,i)=b(i).$$

To je ovšem počáteční úloha pro lineární homogenní rovnici s regresivním koeficientem p. Její řešení je podle výsledků oddílu 3.1.2 dáno výrazem

$$w(t,i)=b(i)e_p(t,i+1).$$

Dosazením tohoto vyjádření do rovnosti (3.17) dostaneme řešení úlohy (3.16) ve tvaru

$$x(t)=\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)e_p(t,i+1).$$

Z předchozího oddílu 3.1.1 již víme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Použijeme řešení nalezené pomocí Duhamelova principu a obecné řešení rovnice z úlohy (3.15) vyjádříme formulí

$$x(t)=ce_p(t,t_0)+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)e_p(t,i+1)$$

se zatím neurčenou konstantou c. Po dosazení počáteční podmínky z úlohy (3.15) dostaneme rovnost $x_0=ce_p(t_0,t_0)=c$, takže řešení počáteční úlohy (3.15) je

$$x(t)=x_0e_p(t,t_0)+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)e_p(t,i+1).$$

S využitím formulí z Věty 15 tento výsledek ještě upravíme:

$$x(t)=\left(x_0+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)e_{\ominus p}(i+1,t)e_{\ominus p}(t,t_0)\right)e_p(t,t_0)=\left(x_0+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)e_{\ominus p}(i+1,t_0)\right)e_p(t,t_0).$$

Exponenciální posloupnost přepíšeme jako součin podle Věty 15.1. Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní lineární rovnici s regresivní posloupností v lineárním členu, tj. řešení úlohy (3.15), tedy dostáváme ve tvaru

$$x(t)=x_0\prod_{i=t_0}^{t-1}(1+p(i))+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)\prod_{j=i+1}^{t-1}(1+p(j))=\left(x_0+\sum_{i=t_0}^{t-1}b(i)\prod_{j=t_0}^{i}\frac{1}{1+p(j)}\right)\prod_{i=t_0}^{t-1}(1+p(i)).$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že řešení počáteční úlohy pro obecnou lineární diferenční rovnici (3.9) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ je stejného tvaru. Jediný rozdíl je v tom, že definiční obor řešení může být menší než definiční obor posloupnosti a.

Věta 16. *Nechť* $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Položme*

$$\tau = \sup\{t \in \operatorname{Dom} a : t \le t_0, a(t) = -1\}.$$

Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici,

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.18}$$

je posloupnost $x \in \mathcal{P}_\tau$ *definovaná vztahem*

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + a(j)\big) =$$

$$= \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=t_0}^{i} \frac{1}{1 + a(j)} \right) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big).$$

Ještě explicitně vypíšeme tvar řešení lineární rovnice (3.9) v některých speciálních případech.

Důsledek 1. *Řešení rovnice* (3.9) *v případech, kdy některá z posloupností* a, b *je stacionární:*

- $\Delta x = \alpha x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} (1+\alpha)^{t-i-1} b(i)$.
- $\Delta x = a(t)x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0 \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) + \beta \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} \prod\limits_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + a(j)\big)$.
- $\Delta x = \alpha x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \beta \dfrac{(1+\alpha)^{t-t_0} - 1}{\alpha} = \left(x_0 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^{t-t_0} - \dfrac{\beta}{\alpha}$.

3.1.4 Kvalitativní vlastnosti řešení lineární rovnice ve zvláštních případech

Rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme počáteční úlohu

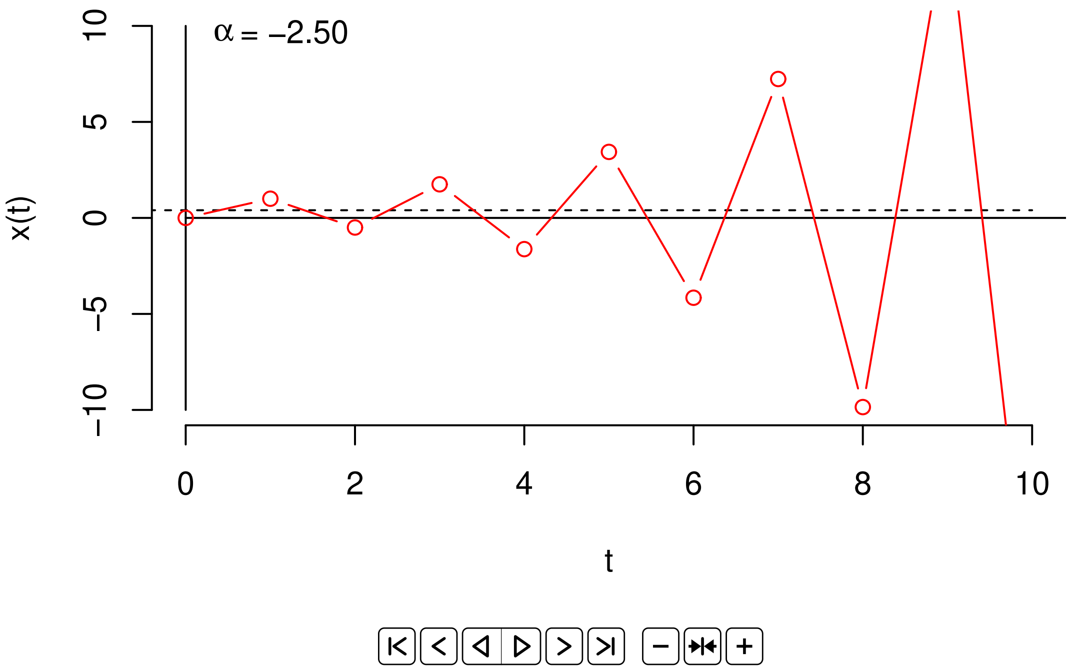
$$\Delta x = \alpha x + \beta, \quad x(0) = x_0 \tag{3.19}$$

s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$. Řešení uvažujeme v prostoru posloupností $\mathcal{P}_0$.

Je-li $-1 \ne \alpha \ne 0$, pak má tato úloha řešení tvaru

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^t - \frac{\beta}{\alpha},$$

které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $1 + \alpha$, od níž je odečtena konstanta β/α.



Obrázek 3.1: Řešení počáteční úlohy pro lineární rovnici (3.19) s počáteční hodnotou $x_0 = 0$, parametrem $\beta = 1$ a parametrem α v rozpětí od $-2{,}5$ do $0{,}5$. Tečkovanou přímkou je znázorněna hodnota $-\beta/\alpha$.

Je-li $\alpha = 0$, pak má úloha (3.19) řešení tvaru

$$x(t) = x_0 + \beta t,$$

jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí β.

Počáteční úloha (3.19) s dosud neuvažovaným parametrem $\alpha = -1$ se redukuje na tvar

$$x(t+1) = \beta, \quad x(0) = x_0,$$

takže $x(t) = \beta$ pro každé $t > 0$, řešení je od $t = 1$ konstantní.

Pokud počáteční hodnota x_0 vyhovuje relaci $\alpha x_0 \neq -\beta$, pak je řešení úlohy (3.19) nekonstantní, v opačném případě je řešení konstantní.

Z uvedených vyjádření řešení je vidět, že monotonnost, ohraničenost a konvergence posloupnosti x závisí na hodnotě parametru α. Tyto vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 3.1. Na obrázku 3.1 jsou zobrazeny grafy řešení úlohy (3.19) pro hodnoty $\beta = 1$, $x_0 = 0$ a různé hodnoty parametru α.

Rovnice s periodickými koeficienty

Řešení lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem

$$\Delta x = \alpha x$$

$0 \leq \alpha$	ryze monotonní, neohraničená	$\lim\limits_{t\to\infty} \lvert x(t)\rvert = \infty$
$-1 < \alpha < 0$	ryze monotonní, konvergentní	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
$\alpha = -1$	monotonní, konvergentní	
$-2 < \alpha < -1$	konvergentní	
$\alpha = -2$	ohraničená	$x(2k+1) = -x_0 - \dfrac{2\beta}{\alpha}$, $x(2k) = x_0, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\alpha < -2$	neohraničená	$\liminf\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty,\ \limsup\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$

Tabulka 3.1: Vlastnosti řešení x počáteční úlohy (3.19) pro lineární rovnici s konstantními koeficienty v závislosti na hodnotách parametru α; pro počáteční hodnotu platí $\alpha x_0 \neq -\beta$.

je geometrická posloupnost s kvocientem $1+\alpha$, tj. $x(t) = x_0(1+\alpha)^t$. Pokud koeficient rovnice není konstantní, ale nějak pravidelně kolísá kolem nějaké pevné hodnoty, lze očekávat, že řešení bude pravidelně kolísat kolem nějaké geometrické posloupnosti. Tuto myšlenku nyní vyjádříme přesněji.

Nechť ω je kladné celé číslo a $a \in \mathcal{R}_{-\infty}$ je ω-periodická regresivní posloupnost, tj. pro každé $t \in \mathbb{Z}$ platí $a(t+\omega) = a(t) \neq -1$. Uvažujme homogenní rovnici (3.10) a označme

$$\bar{a} = \left(\prod_{i=0}^{\omega-1} (1 + a(i))\right)^{1/\omega} - 1, \tag{3.20}$$

tzn. že číslo $1+\bar{a}$ je geometrickým průměrem hodnot posloupnosti $1+a$ na intervalu délky periody. Podle výsledků uvedených v 3.1.2 můžeme řešení rovnice (3.10) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ psát ve tvaru

$$x(t) = x_0 e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{\ominus\bar{a}}(t,0) e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{a\ominus\bar{a}}(t,0).$$

Označme nyní

$$\varphi(t) = e_{a\ominus\bar{a}}(t,0) = \prod_{i=0}^{t-1}\left(1 + a(i) - \frac{\bar{a}}{1+\bar{a}} - \frac{\bar{a}a(i)}{1+\bar{a}}\right) =$$
$$= \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1 + \bar{a} + a(i) + \bar{a}a(i) - \bar{a} - \bar{a}a(i)}{1+\bar{a}} = \frac{1}{(1+\bar{a})^t} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + a(i)).$$

Posloupnost φ je jednoznačným řešením počáteční úlohy

$$\Delta\varphi = (a \ominus \bar{a})\,\varphi, \quad \varphi(0) = 1,$$

neboli

$$\Delta\varphi(t) = \frac{a(t) - \bar{a}}{1+\bar{a}}\varphi(t), \quad \varphi(0) = 1. \tag{3.21}$$

Poněvadž posloupnost a je ω-periodická, platí

$$\begin{aligned}\varphi(t+\omega) &= \frac{1}{(1+\bar{a})^{t+\omega}}\prod_{i=0}^{t+\omega-1}\big(1+a(i)\big) = \\ &= \left(\frac{1}{(1+\bar{a})^{t}}\prod_{i=0}^{t-1}\big(1+a(i)\big)\right)\left(\frac{1}{(1+\bar{a})^{\omega}}\prod_{i=t}^{t+\omega-1}\big(1+a(i)\big)\right) = \\ &= \varphi(t)\frac{1}{(1+\bar{a})^{\omega}}\prod_{i=0}^{\omega-1}\big(1+a(i)\big) = \varphi(t),\end{aligned}$$

takže posloupnost φ je také ω-periodická. Můžeme ji tedy také vyjádřit jako ω-periodickou posloupnost, pro jejíž počáteční hodnoty platí

$$\varphi(j) = \prod_{i=0}^{j-1}\big(1+a(i)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, \omega-1.$$

Z provedených výpočtů plyne výsledek:

Věta 17. *Nechť a je regresivní ω-periodická posloupnost. Pak řešení lineární homogenní rovnice (3.10) je tvaru*

$$x(t) = x_0\,(1+\bar{a})^t\,\varphi(t),$$

kde $x_0 = x(0)$, hodnota $\bar{a}$ je dána výrazem (3.20) a φ je ω-periodická posloupnost, která je řešením počáteční úlohy (3.21).

Řešení homogenní lineární rovnice s periodickým koeficientem je tedy součinem geometrické posloupnosti a ω-periodické posloupnosti. Toto vyjádření lze považovat za rozklad řešení na trend a sezónní složku v multiplikativním tvaru.

Poněvadž ω-periodická posloupnost je ohraničená, dostáváme

Důsledek 2. *Řešení x homogenní lineární rovnice (3.10) s periodickým koeficientem a je ohraničená právě tehdy, když $-2 \le \bar{a} \le 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-2 < \bar{a} < 0$.*

Rovnici (3.20) můžeme přepsat do tvaru rekurentní formule (3.11). Při označení $q = 1+a$ můžeme pro tuto rekurentní formuli napsat počáteční úlohu

$$x(t+1) = q(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{3.22}$$

Přepsáním věty 17 a jejího prvního důsledku dostaneme

Důsledek 3. *Nechť q je ω-periodická posloupnost taková, že $q(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pak řešení úlohy (3.22) je tvaru*

$$x(t) = x_0(\bar{q})^t\prod_{i=0}^{\tau-1}\frac{q(i)}{\bar{q}} = x_0(\bar{q})^{t-\tau}\prod_{i=0}^{\tau-1}q(i),$$

kde

$$\bar{q} = \sqrt[\omega]{\prod_{i=0}^{\omega-1}q(i)}\,, \qquad \tau = t-\omega\left[\frac{t}{\omega}\right],$$

tj. $\bar{q}$ je geometrický průměr hodnot posloupnosti q na intervalu délky periody a τ je zbytek po dělení čísla t číslem ω.

Důsledek 4. *Posloupnost x daná rekurentní formulí v úloze (3.22) s periodickou posloupností q je ohraničená právě tehdy, když $-1 \leq \bar{q} \leq 1$; $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-1 < \bar{q} < 1$.*

3.2 Systémy lineárních rovnic prvního řádu

Nechť všechny posloupnosti a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2, \dots, k$ mají stejný definiční obor. *Systém k lineárních diferenčních rovnic (k-rozměrný lineární systém) prvního řádu* je soustava rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1k}(t)x_k + b_1(t), \\ \Delta x_2 &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2k}(t)x_k + b_2(t), \\ &\vdots \\ \Delta x_k &= a_{k1}(t)x_1 + a_{k2}(t)x_2 + \cdots + a_{kk}(t)x_k + b_k(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pokud jsou všechny posloupnosti b_i, $i = 1, 2, \dots, k$ nulové, systém se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Zavedeme vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ a maticovou posloupnost A,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_k(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1k}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(t) & a_{k2}(t) & \dots & a_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

Systém rovnice (3.23) můžeme nyní stručně zapsat jako jednu vektorovou rovnici ve tvaru

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.24}$$

Tuto explicitní diferenční rovnici (systém explicitních diferenčních rovnic) prvního typu můžeme zapsat ve tvaru vektorové rekurentní formule (systému rekurentních formulí)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.25}$$

Označíme-li $\mathsf{Q}(t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}(t)$, můžeme systém rekurentních formulí (3.25) přepsat v kratším tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.26}$$

Vektorová rovnice (3.24) je k-rozměrnou analogií lineární diferenční rovnice prvního řádu (3.9), vektorová rekurentní formule (3.25), resp. (3.26), je k-rozměrnou analogií rekurentní formule (3.11), resp. (3.12). Toto pozorování ukazuje, že teorie systémů lineárních diferenčních rovnic je zobecněním teorie lineárních diferenčních rovnic; nebo naopak, teorie lineárních rovnic je speciálním případem teorie lineárních systémů pro $k = 1$.

Teorii lineárních systémů (vektorové rovnice) lze dokonce považovat za svým způsobem jednodušší, než je teorie (skalární) rovnice. Nehomogenní lineární vektorovou rovnici (3.24) totiž můžeme přepsat do (blokového) tvaru

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že řešení nehomogenní k-rozměrné rovnice (3.23) můžeme převádět na řešení homogenní $(k+1)$-rozměrné rovnice

$$\Delta \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{o}^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t). \tag{3.27}$$

Přesněji: je-li vektorová posloupnost $\boldsymbol{x}$ řešením nehomogenní k-rozměrné rovnice (3.23), pak je posloupnost

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

řešením rovnice (3.27); je-li vektorová posloupnost $\boldsymbol{y}$ řešením homogenní $(k+1)$-rozměrné rovnice (3.27) a má poslední složku identicky rovnu 1, pak je jejich k prvních složek řešením nehomogenní rovnice (3.24). Analogicky nahlédneme, že řešení k-rozměrné nehomogenní lineární rekurentní formule (3.26) lze převádět na řešení $(k+1)$-rozměrné homogenní lineární rekurentní formule

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}(t) & \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{o}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t). \tag{3.28}$$

Teoreticky tedy není nutné se zabývat rovnicemi nehomogenními. Ovšem někdy je jednodušší vyšetřovat rovnici nehomogenní než rovnici homogenní vyššího řádu.

Stejně jako v jednorozměrném případě, rovnice

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{3.29}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k rovnici* (3.24).

3.2.1 Princip superpozice a fundamentální matice

Formálně stejně jako v oddílu 3.1.1 ukážeme, že vektorová posloupnost, jejíž všechny složky jsou nulové je řešením homogenní rovnice (3.29) a že lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Tedy že množina řešení rovnice (3.29) tvoří vektorový prostor. Určíme jeho dimenzi.

Nechť t_0 je libovolný index z definičního oboru maticové posloupnosti A. Rovnice (3.29) s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi} \tag{3.30}$$

má pro každý vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ řešení definované (přinejmenším) pro $t \in \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots\}$ a toto řešení je jednoznačně dáno součinem

$$\boldsymbol{x}(t) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t-1)\big)\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t-2)\big)\cdots\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t_0)\big)\boldsymbol{\xi} = \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{\xi};$$

to nahlédneme stejným výpočtem jako v úvodu této kapitoly na str. 54.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^k$ má bázi tvořenou lineárně nezávislými vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$. Nechť každá z posloupností $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, je řešením rovnice (3.29) s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e_i}. \tag{3.31}$$

Kdyby vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$ byly lineárně závislé, existovaly by konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ne všechny rovny 0, takové, že

$$\alpha_1 \boldsymbol{z_1} + \alpha_2 \boldsymbol{z_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{z_k} = \boldsymbol{o}.$$

Pak by zejména platilo

$$\boldsymbol{o} = \alpha_1 \boldsymbol{z_1}(t_0) + \alpha_2 \boldsymbol{z_2}(t_0) + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{z_k}(t_0) = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \alpha_2 \boldsymbol{e_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{e_k},$$

což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$. Existuje tedy alespoň k lineárně nezávislých řešení rovnice (3.29) a dimenze prostoru jejích řešení je alespoň k.

Nechť nyní $\boldsymbol{x}$ je libovolné řešení rovnice (3.29). Poněvadž vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^k$, existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_k$ takové, že

$$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{e_k}.$$

Lineární kombinace řešení $c_1\boldsymbol{z_1} + c_2\boldsymbol{z_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{z_k}$ je podle principu superpozice také řešením rovnice (3.29). Toto řešení splňuje počáteční podmínku

$$\big(c_1\boldsymbol{z_1} + c_2\boldsymbol{z_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{z_k}\big)(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0).$$

Řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.29) je však jednoznačně dáno počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0)$ a součinem matic $\prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)$. To ovšem znamená, že řešení $\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací řešení $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$. Dimenze prostoru řešení rovnice (3.29) nemůže být větší než k.

Dostáváme tak závěr:

Věta 18. *Množina všech řešení lineárního homogenního k-rozměrného systému* (3.29) *tvoří vektorový prostor dimenze k.*

Skutečnost, že prostor řešení rovnice (3.29) je konečnědimenzionální, umožňuje zavést následující pojem.

Definice 19. Báze prostoru řešení lineárního homogenního systému (3.29) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Již jsme ukázali, že vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, které jsou řešením rovnice (3.29) s počáteční podmínkou (3.31) jsou lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (3.29). Vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$ tvořící fundamentální systém řešení můžeme uspořádat do maticové posloupnosti definované vztahem

$$\mathsf{Z}(t) = \big(\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)\big);$$

sloupce matice $\mathsf{Z}(t)$ jsou vektory $\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)$. Poněvadž každá z vektorových posloupností $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, splňuje počáteční úlohu

$$\Delta\boldsymbol{z_i} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{z_i}, \quad \boldsymbol{z_i}(t_0) = \boldsymbol{e_i},$$

splňuje maticová posloupnost Z maticovou diferenční rovnici

$$\Delta\mathsf{Z} = \mathsf{A}(t)\mathsf{Z}. \tag{3.32}$$

Poněvadž navíc počáteční hodnota $\mathsf{Z}(t_0)$ splňuje rovnost $\mathsf{Z}(t_0) = \big(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}\big)$ a bázové vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ jsou lineárně nezávislé, platí

$$\det\mathsf{Z}(t_0) \neq 0, \tag{3.33}$$

tj. počáteční matice $\mathsf{Z}(t_0)$ je regulární. Zejména bývá výhodné volit počáteční hodnotu jako jednotkovou matici, $\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}$.

Definice 20. Řešení Z počáteční úlohy (3.32), (3.33) se nazývá *fundamentální matice systému* (3.29).

Opět snadno nahlédneme (odvodíme neúplnou indukcí a dokážeme úplnou indukcí), že fundamentální matice systému je dána rovností

$$\mathsf{Z}(t) = \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} (\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)) \right) \mathsf{Z}(t_0). \tag{3.34}$$

Příklad. Najdeme fundamentální matici systému

$$\begin{aligned} \Delta x &= -x + \tfrac{1}{t} y, \\ \Delta y &= -\tfrac{1}{t} x - y. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}.$$

Maticová posloupnost A je definována pro $t \geq 1$. Fundamentální matici systému budeme proto hledat jako řešení počáteční úlohy pro maticovou diferenční rovnici

$$\Delta \mathsf{X} = \mathsf{A}(t)\mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(1) = \mathsf{I}.$$

Označme

$$\mathsf{J} = \mathsf{I} + \mathsf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathsf{I} + \mathsf{A}(t) = \frac{1}{t}\mathsf{J}$ a fundamentální matice daného systému je

$$\mathsf{Z}(t) = \prod_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} \mathsf{J} = \frac{1}{(t-1)!} \mathsf{J}^{t-1}$$

Poněvadž

$$\mathsf{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathsf{I},$$

můžeme dále počítat

$$\mathsf{J}^3 = \mathsf{J}(-\mathsf{I}) = -\mathsf{J},\ \mathsf{J}^4 = \mathsf{J}(-\mathsf{J}) = \mathsf{I},\ \mathsf{J}^5 = \mathsf{J}\mathsf{I} = \mathsf{J},\ \mathsf{J}^6 = \mathsf{J}\mathsf{J} = -\mathsf{I},\ \mathsf{J}^7 = \mathsf{J}(-\mathsf{I}) = -\mathsf{J} \text{atd.}$$

Z tohoto výpočtu uhodneme, že

$$\mathsf{J}^i = (-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)} \left(\frac{1}{2}(1 + (-1)^i)\mathsf{I} + \frac{1}{2}(1 - (-1)^i)\mathsf{J} \right) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \left(\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{I} - \mathsf{J})\right) \tag{3.35}$$

a tento výsledek ověříme úplnou indukcí. Indukční krok je

$$\begin{aligned} \mathsf{J}^{i+1} = \mathsf{J}\mathsf{J}^i = \mathsf{J} \left(\frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} (\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{I} - \mathsf{J})) \right) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \left(\mathsf{J}\mathsf{I} + \mathsf{J}\mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{J}\mathsf{I} - \mathsf{J}\mathsf{I})\right) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \left(\mathsf{J} - \mathsf{I} + (-1)^i(\mathsf{J} - \mathsf{I})\right) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}}{2} \left(\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^{i+1}(\mathsf{I} - \mathsf{J})\right). \end{aligned}$$

Matice J^i je tedy skutečně dána výrazem (3.35) a fundamentální matice daného systému je

$$\mathsf{Z}(t) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(t-1)(t-2)}}{2(t-1)!}\big(\mathsf{I} + \mathsf{J} - (-1)^t(\mathsf{I} - \mathsf{J})\big).$$

■

Každé řešení rovnice (3.29) je lineární kombinací posloupností tvořících fundamentální systém řešení této rovnice, tj. sloupců fundamentální matice Z. Jinak řečeno, obecné řešení rovnice (3.29) je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}. \tag{3.36}$$

kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor.

Nakonec ještě najdeme partikulární řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku (3.30). Z regularity matice $\mathsf{Z}(t_0)$ plyne existence inversní matice $\mathsf{Z}(t_0)^{-1}$. Proto má (algebraická) rovnice

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Z}(t_0)\boldsymbol{c}$$

pro neznámý vektor $\boldsymbol{c}$ jednoznačně určené řešení $\boldsymbol{c} = \mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{\xi}$. Dostáváme tak výsledek: Řešení počáteční úlohy (3.29), (3.30) je dáno rovností

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{\xi}, \tag{3.37}$$

kde Z je fundamentální matice systému (3.29). Toto řešení je definováno (přinejmenším) pro $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots\}$.

Diferenční rovnici (3.32) lze přepsat jako rekurentní formuli

$$\mathsf{Z}(t+1) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big)\mathsf{Z}(t). \tag{3.38}$$

Pokud je matice $\mathsf{I}+\mathsf{A}(t)$ v každém indexu $t \in \operatorname{Dom} A$ invertibilní, lze z počáteční hodnoty $\mathsf{Z}(t_0)$ jednoznačně vypočítat hodnotu $\mathsf{Z}(t)$ řešení rovnice (3.38) pro libovolnou hodnotu $t \in \operatorname{Dom} \mathsf{A}$. Tato skutečnost motivuje zavedení následujících pojmů.

Definice 21. Řekneme, že maticová posloupnost P je *regresivní,* pokud $\det\big(\mathsf{I} + \mathsf{P}(t)\big) \neq 0$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} \mathsf{P}$.

Podobně jako v 3.1.2 zavedeme na množině regresivních maticových posloupností operace $\oplus$ a $\ominus$ vztahy

$$\mathsf{P} \oplus \mathsf{Q}(t) = \mathsf{P}(t) + \mathsf{Q}(t) + \mathsf{P}(t)\mathsf{Q}(t), \quad \ominus\mathsf{P}(t) = -\mathsf{P}(t)\big(\mathsf{I} + \mathsf{P}(t)\big)^{-1}.$$

Množina regresivních posloupností s těmito operacemi opět tvoří grupu, která však již není komutativní.

Definice 22. Nechť maticová posloupnost P je regresivní. *Maticovou exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti* P *s počátkem* $t_0 \in \operatorname{Dom} \mathsf{P}$ definujeme jako jediné řešení počáteční úlohy pro maticovou lineární rovnici (systém)

$$\Delta\mathsf{X} = \mathsf{P}(t)\mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(t_0) = \mathsf{I}. \tag{3.39}$$

Její t-tý člen označíme $e_{\mathsf{P}}(t, t_0)$.

Pro maticovou exponenciální posloupnost platí:

Věta 19 (Vlastnosti maticové exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť maticové posloupnosti* P, Q *jsou takové, že* $\operatorname{Dom}\mathsf{P} = \operatorname{Dom}\mathsf{Q}$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom}\mathsf{P}$. *Pak platí:*

1. $e_{\mathsf{P}}(t,t_0) = \big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t-1)\big)\big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t-2)\big)\cdots\big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t_0)\big) = \prod\limits_{i=t_0}^{t-1}\big(1+\mathsf{P}(i)\big)$ *je regulární,*
2. $e_{\mathsf{O}}(t,t_0) \equiv \mathsf{I}$, $e_{\mathsf{P}}(t,t) \equiv \mathsf{I}$, $e_{\mathsf{I}}(t,t_0) = 2^{t-t_0}\mathsf{I}$,
3. $e_{\mathsf{P}}(t,t_0)e_{\mathsf{Q}}(t,t_0) = e_{\mathsf{P}\oplus\mathsf{Q}}(t,t_0)$,
4. $\big(e_{\mathsf{P}}(t,t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus\mathsf{P}}(t,t_0)$,
5. $e_{\mathsf{P}}(t,s) = e_{\ominus\mathsf{P}}(s,t)$,
6. $e_{\mathsf{P}}(t,s)e_{\mathsf{P}}(s,t_0) = e_{\mathsf{P}}(t,t_0)$.

Důkaz je formálně stejný jako důkaz Věty 15. Při výpočtech je potřebné dávat pozor na pořadí násobení matic. □

3.2.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Uvažujme nyní nehomogenní vektorovou rovnici (systém) (3.24). Nehomogenitu $\boldsymbol{b}$ můžeme interpretovat jako jakési „porušení“ (perturbaci) homogenní rovnice (3.29). Řešení nehomogenní rovnice by tedy mohlo být nějak „podobné“ řešení přidružené homogenní rovnice, tedy tvaru podobnému vyjádření (3.36). Tuto „podobnost“ budeme chápat tak, že perturbace se projevuje jako neustálá „deformace“ vektoru $\boldsymbol{c}$. Trochu přesněji, vektor $\boldsymbol{c}$ nebude konstantní, ale bude záviset na indexu t. Tato myšlenka se nazývá *(Eulerova-Lagrangeova) metoda variace konstant.*

Řešení rovnice (3.24) tedy hledejme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t), \tag{3.40}$$

kde Z je fundamentální matice systému (3.29), tj. řešení počáteční úlohy (3.32), (3.33). Pak platí

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \big(\Delta\mathsf{Z}(t)\big)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Z}(t+1)\big(\Delta\boldsymbol{c}(t)\big) = \big(\mathsf{A}(t)\mathsf{Z}(t)\big)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Z}(t+1)\big(\Delta\boldsymbol{c}(t)\big).$$

Současně, aby posloupnost $\boldsymbol{x}$ byla řešením rovnice (3.24), musí platit

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{A}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

Porovnáním těchto vyjádření vidíme, že

$$\mathsf{Z}(t+1)\Delta\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{b}(t).$$

Za předpokladu, že matice $\mathsf{Z}(t+1)$ je regulární, z poslední rovnosti vyjádříme

$$\Delta\boldsymbol{c}(t) = \mathsf{Z}(t+1)^{-1}\boldsymbol{b}(t)$$

a sumací obou stran této rovnosti v mezích od t_0 do $t-1$ dostaneme

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j).$$

Konstantní vektor $\boldsymbol{c}(t_0)$ pro stručnost označíme $\boldsymbol{\eta}$ a vypočítanou posloupnost $\boldsymbol{c}$ dosadíme do předpokládaného tvaru (3.40)řešení rovnice (3.24):

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\left(\boldsymbol{\eta} + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j)\right) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{\eta} + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j).$$

První sčítanec posledního výrazu je vlastně obecným řešením přidružené homogenní rovnice (3.29). Současně vidíme, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Z}(t_0)\boldsymbol{\eta}$, tj. $\boldsymbol{\eta} = \mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}(t_0)$. Fundamentální matici Z vyjádříme pomocí součinu (3.34) a řešení rovnice (3.24) zapíšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1}\left(\prod_{i=j+1}^{t-1}\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{b}(j). \tag{3.41}$$

Poslední výraz je již definován pro každý index $t \geq t_0$ ze společného definičního oboru maticové posloupnosti A a vektorové posloupnosti $\boldsymbol{b}$; pracovní předpoklad o regularitě matice Z tedy nebyl podstatný. Přímým dosazením se nyní lze přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení rovnice (3.24).

Odvodili jsme:

Věta 20. *Obecné řešení rovnice (3.24) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (3.29) a partikulárního řešení rovnice (3.24). Toto řešení lze vyjádřit ve tvaru*

$$\boldsymbol{x}(t) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1}\left(\prod_{i=j+1}^{t-1}\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{b}(j),$$

kde t_0 je nějaký index ze společného definičního oboru maticové posloupnosti A a vektorové posloupnosti $\boldsymbol{b}$.

Pokud pro každý index $t \in \mathrm{Dom}\,\mathsf{A} \cap \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{b}$, $t < t_0$ je $\det\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(t)\big) \neq 0$, je řešení definováno na celém $\mathrm{Dom}\,\mathsf{A} \cap \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{b}$; v opačném případě je definováno na množině $\{\tau, \tau+1, \dots\}$, kde

$$\tau = t_0 - \min\left\{i \in \mathbb{N} : \det\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t_0 - i)\big) = 0\right\}.$$

Pokud je maticová posloupnost A regresivní, lze rovnost (3.41), tj. vyjádření řešení rovnice (3.24), přepsat pomocí maticové exponenciální funkce,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t, j+1)\boldsymbol{b}(j) &= \\ = \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t, t_0)\left(\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t_0, j+1)\boldsymbol{b}(j)\right) &= \\ = \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t, t_0)\left(\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} \mathrm{e}_{\ominus\mathsf{A}}(j+1, t_0)\boldsymbol{b}(j)\right)&.\end{aligned}$$

3.2.3 Systém s konstantní maticí

Nechť A je čtvercová matice řádu k. Uvažujme lineární homogenní systém (vektorovou rovnici)

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}. \tag{3.42}$$

Můžeme ho také přepsat jako systém rekurentních formulí

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t), \tag{3.43}$$

kde $\mathsf{Q} = \mathsf{I} + \mathsf{A}$. Je-li tato matice regulární, pak má rovnice (3.42) pro libovolnou počáteční hodnotu $\boldsymbol{x}(t_0)$ podle Věty 20 jediné řešení definované na celé množině $\mathbb{Z}$. Toto řešení je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Q}^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.44}$$

Poznamenejme, že v případě $t < t_0$ označuje symbol Q^{t-t_0} matici $\left(\mathsf{Q}^{-1}\right)^{t_0-t}$. Fundamentální matice systému (3.42) a ekvivalentního systému (3.43), která splňuje počáteční podmínku $\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}$, je dáno formulí

$$\mathsf{Z}(t) = (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0} = \mathsf{Q}^{t-t_0}.$$

Abychom získali nějaký použitelnější tvar řešení systému (3.42), potřebujeme vyjádřit mocniny matice $\mathsf{I} + \mathsf{A} = \mathsf{Q}$. Z lineární algebry víme, že tuto matici můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1},$$

kde P je regulární čtvercová matice dimenze k a J je Jordanův kanonický tvar matice, tj. J je blokově diagonální matice

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_1 & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J}_2 & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J}_\mathsf{m} \end{pmatrix},$$

blok J_i je čtvercová matice dimenze k_i; přitom $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. Jednotlivé bloky jsou tvaru

$$\mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je vlastní číslo matice Q. Poznamenejme, že z předpokládané regularity matice Q plyne, že všechna její vlastní čísla jsou nenulová. Je-li blok J_i diagonální, tj. je prvního z uvedených tvarů, řekneme, že vlastní číslo λ je *jednoduchého typu*.

Pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\mathsf{J}^n = \begin{pmatrix} {\mathsf{J}_1}^n & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & {\mathsf{J}_2}^n & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & {\mathsf{J}_\mathsf{m}}^n \end{pmatrix}.$$

Je-li blok $\mathsf{J_i}$ diagonální, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix},$$

má-li blok $\mathsf{J_i}$ v horní vedlejší diagonále jedničky, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} & \dots & \dfrac{n^{(k_i-1)}}{(k_i-1)!}\lambda^{n-k_i+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dfrac{n^{(k_i-2)}}{(k_i-2)!}\lambda^{n-k_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & \dfrac{n^{(k_i-3)}}{(k_i-3)!}\lambda^{n-k_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix};$$

přitom $n^{(\nu)}$, $\nu = k_i - 1, k_i - 2, \dots, 1$ označuje faktoriálovou posloupnost, viz 1.3.2.4. Platnost těchto formulí lze ověřit úplnou indukcí.

Příklad. Uvažujme systém rovnic (vektorovou rovnici)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad \text{tj.} \quad \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

s počátečním indexem $t_0 = 0$. V tomto případě je

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathsf{J}^t = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t(t-1) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daný systém má tedy řešení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t(t-1) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2 & t & \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 & 1 - t & \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2 & -t & 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}\big(3x_1 + 2x_2 + x_3\big)t + \frac{1}{2}\big(x_1 + x_3\big)t^2 \\ x_2 - \frac{1}{2}\big(x_1 + 2x_2 - x_3\big)t - \frac{1}{2}\big(x_1 + x_3\big)t^2 \\ x_3 - \frac{1}{2}\big(3x_1 + 2x_2 + x_3\big)t - \frac{1}{2}\big(x_1 + x_3\big)t^2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

přitom x_1, x_2 a x_3 označují souřadnice počátečního vektoru $\boldsymbol{x}(0)$. ■

Řešení rovnice (3.42) s maticí A takovou, že matice $\mathsf{Q} = \mathsf{I} + \mathsf{A}$ je regulární a má Jordanův kanonický tvar PJP^{-1}, je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.45}$$

Složky vektoru řešení jsou lineární kombinace vlastních čísel matice Q v nejvýše $(t - t_0)$-té mocnině, případně vynásobená nějakým polynomem v proměnné t. Odtud můžeme (mimo jiné) odvodit závěr:

Tvrzení 11. Mají-li všechna vlastní čísla regulární matice Q modul (absolutní hodnotu) menší než 1, pak pro každé řešení $\boldsymbol{x}$ systému (3.43) platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}.$$

Nehomogenní lineární systém s konstantní maticí A

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \tag{3.46}$$

má podle Věty 20 jediné řešení dané formulí

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-i-1}\,\boldsymbol{b}(i).$$

Zejména, pokud je nehomogenita $\boldsymbol{b}$ konstantní a matice A je regulární, pak systém

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{3.47}$$

má řešení tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \left(\sum_{i=0}^{t-1-t_0} (\mathsf{I} + \mathsf{A})^i\right)\boldsymbol{b} = (\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \mathsf{A}^{-1}\left[(\mathsf{I} + \mathsf{A})^{t-t_0} - \mathsf{I}\right]\boldsymbol{b}.$$

Pokud všechna vlastní čísla matice $\mathsf{I} + \mathsf{A}$ mají modul menší než 1, pak $\lim\limits_{t\to\infty} (\mathsf{I} + \mathsf{A})^t = \mathsf{O}$, což znamená, že pro řešení systému (3.47) v takovém případě platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = -\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}; \tag{3.48}$$

chování řešení systému (3.47) pro $t \to \infty$ (po uplynutí dlouhého času) nezávisí na počátečních podmínkách, vliv počátečního stavu postupně vymizí, systém „zapomene“ svůj výchozí stav. Systém s touto vlastností se nazývá *ergodický*.

Pokud je matice A regulární, pak lineární systém (3.47) s konstantní nehomogenitou $\boldsymbol{b}$ má jediné konstantní řešení $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}^*$. Toto řešení je současně řešením soustavy algebraických rovnic $\boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b}$, tedy

$$\boldsymbol{x}^* = -\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Porovnáním s rovností (3.48) vidíme, že řešení ergodického systému (3.47) s regulární maticí A konvergují pro $t \to \infty$ k jedinému konstantnímu řešení tohoto systému.

Kapitola 4

Autonomní rovnice

Jedna společná vlastnost tří modelů růstu populace sestavených v Kapitole 1 je bezprostředně vidět z tvarů rovnic (1.14), (1.16) a (1.17) — na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že „přírodní zákon“ určující růst populace je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na růst populace. Jinak řečeno, populaci (charakterizovanou vnitřním koeficientem růstu r) s jejím prostředím (charakterizovanou kapacitou K) si představujeme jako izolovanou od „zbytku“ světa. Populaci a její prostředí tak chápeme jako uzavřený systém a tento systém se vyvíjí podle svých vlastních ($\alpha\upsilon\tau o\varsigma$) zákonů ($\nu o\mu o\iota$). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a obecně diferenční rovnice nebo jejich soustavy, v jejichž zápisu se čas t objevuje jen jako index hledaných posloupností, nazýváme *autonomní*.

Nějaký systém (slovo „systém“ nyní chápeme jako „nějak vymezená část reality“, nikoliv ve smyslu „systém rovnic“), na který nepůsobí vnější vlivy, se nemusí nijak chovat; jeho změna nebo vývoj mohou být vyvolávány teprve zásahy z jeho okolí. O takovém systému řekneme, že je v dynamické rovnováze. Pokud je v takovém případě stav systému popisován nějakou časově závislou veličinou (tj. posloupností) $x = x(t)$, posloupnost x je v takovém případě konstantní a dynamickou rovnováhu představuje nějaká hodnota x^*, pro niž platí $x \equiv x^*$. Je-li navíc systém modelován autonomní diferenční rovnicí $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$, pak musí platit $x^* = f(x^*)$; dynamicky rovnovážný stav x^* je dán řešením této (algebraické) rovnice.

Dynamická rovnováha samozřejmě neznamená, že „se nic neděje“. Považujeme-li za systém například populaci, kterou charakterizujeme její velikostí x, může být tato velikost konstantní a přitom může docházet k úhynu a rození jedinců, počet uhynulých však musí být stejný jako počet nově narozených.

Z hlediska modelované reality bývá zajímavou (nebo dokonce důležitou) otázkou, jak se systém chová, pokud v dynamické rovnováze není. Nebo z jiného hlediska: co se stane, když systém z rovnováhy vychýlíme? Budeme to nyní opět ilustrovat na příkladu populace. Za adekvátní model vývoje její velikosti budeme považovat logistickou rovnici (1.14).

Rovnovážný stav velikosti populace je dán řešením kvadratické rovnice

$$x^* = x^* \left(r - \frac{r-1}{K} x^* \right).$$

Jedním kořenem této rovnice je $x^* = 0$; to je nezajímavý triviální případ — žádná populace není a proto se nijak nevyvíjí. Zajímavější je druhý kořen $x^* = K$, tedy situace, kdy velikost populace je ustálena přesně na hodnotě úživnosti prostředí.

Z počítačových simulací, představených v Kapitole 1 na obr. 1.2, již víme, že modelovaná velikost populace se nemusí ustálit na hodnotě kapacity prostředí. Chování řešení rovnice (1.14), a tedy chování modelované populace, podstatně závisí na parametru r, na velikosti vnitřního koeficientu růstu populace. Ukážeme si možné chování řešení rovnice (1.14) při dvou, svým způsobem extrémních, hodnotách koeficientu r, konkrétně pro $r = 2$ a pro $r = 4$.

Pro $r = 2$ máme rovnici

$$x(t+1) = x(t)\left(2 - \frac{1}{K}x(t)\right)$$

a snadno se přímým výpočtem přesvědčíme, že řešení této rovnice je tvaru

$$x(t) = K\left(1 - \left(1 - \frac{\xi}{K}\right)^{2^t}\right),$$

kde ξ je nějaké reálné číslo; ξ vyjadřuje počáteční hodnotu $x(0)$. Pokud platí $0 < \xi < 2K$, pak

$$0 \le \left(1 - \frac{\xi}{K}\right)^2 < 1$$

a proto $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K$, tj. velikost populace se ustálí na hodnotě kapacity prostředí, pokud její počáteční velikost je nenulová a menší než dvojnásobek kapacity prostředí.

V případě $r = 4$ je situace naprosto jiná. Rovnice (1.14) nyní je

$$x(t+1) = x(t)\left(4 - \frac{3}{K}x(t)\right). \tag{4.1}$$

Opět se přímým výpoočtem můžeme přesvědčit, že posloupnosti dané formulemi

$$x_1(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^t\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2, \quad x_2(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^{n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2, \quad x_3(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^t\pi}{2^n}\right)^2$$

jsou řešeními této rovnice pro libovolné přirozené číslo n. Přitom platí

$$x_3(t) > 0 \text{ pro } t < n, \quad x_3(t) = 0 \text{ pro } t \ge n,$$

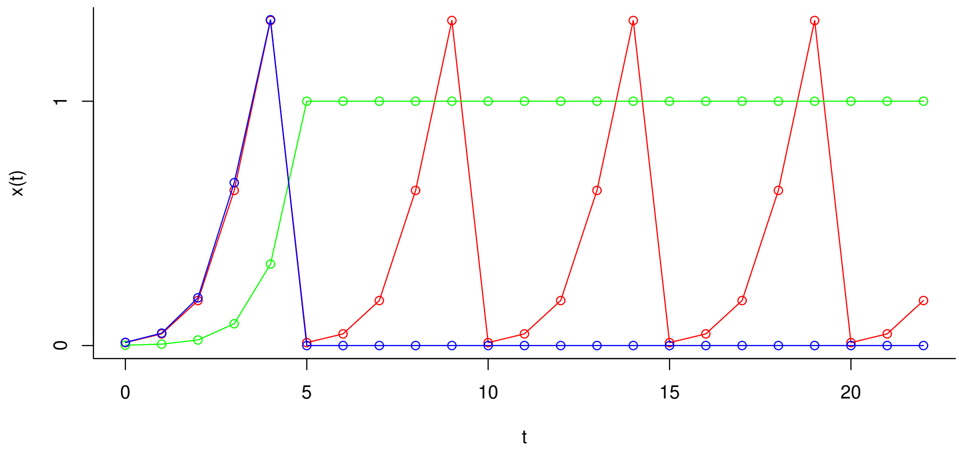
$$0 < x_1(t) < K \text{ pro } t < n, \quad x_1(t) = K \text{ pro } t \ge n,$$

$$x_2(t+n) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^{2n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2 = \frac{4K}{3}\left(\sin\left(\pi - \frac{2^{n+t}\pi}{2^n+1}\right)\right)^2 = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^{n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2 = x(t).$$

Vidíme tedy, že rovnice (4.1) má jednak řešení, které v konečném čase vymizí, dále řešení, které se v konečném čase ustálí na hodnotě kapacity prostředí, a také řešení periodické. Přitom platí

$$x_1(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2 < x_2(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)^2 < x_3(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)^2$$

a limita výrazu na pravé straně pro $n \to \infty$ je rovna 0. To znamená, že při dostatečně velkém n jsou počáteční hodnoty jednotlivých uvedených řešení „velice blízko nula“ a proto jsou „prakticky nerozlišitelné“. Jinak řečeno, při malé počáteční velikosti populace nelze predikovat vývoj její velikosti. Situace pro $n = 5$ je znázorněna na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Řešení logistické rovnice (1.14) s parametry $r = 4$, $K = 1$, tj. rovnice (4.1), se třemi různými počátečními hodnotami: $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{1}{96}\pi\right)^2 \doteq 0{,}00143$ (zelená – řešení po pěti krocích nabude hodnoty $K = 1$), $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{32}{33}\pi\right)^2 \doteq 0{,}01205$ (červená – řešení má periodu 5), $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{1}{32}\pi\right)^2 \doteq 0{,}01281$ (modrá – řešení po pěti krocích skončí na hodnotě 0). Počáteční hodnoty jsou prakticky nerozlišitelné, liší se od sebe o méně než 1,2% z hodnoty K, přitom průběhy řešení jsou kvalitativně odlišné.

Z tohoto příkladu vidíme, že chování systému může skutečně být charakterizováno rovnováhou – stav systému se ustálí v tomto dynamicky rovnovážném stavu. Ale nemusí tomu tak být, i systém popsaný téměř stejnou rovnicí, tj. lišící se jen v hodnotě jednoho parametru, se může chovat úplně jinak, jeho chování nelze jednoduše charakterizovat rovnováhou, jeho chování může být velice komplikované. Ještě závažnější je zjištění, že dokonce ani adekvátní matematický model nemusí být použitelný k predikci vývoje autonomně se chovajícího systému.

Také je dobré si uvědomit, že autonomnost revnice nebo soustavy rovnic vyjadřují jen jistý úhel pohledu na modelovanou realitu, nikoliv realitu samu. Tato vlastnost je totiž vymezena pouze tvarem zápisu. Ilustrujme si tuto skutečnost opět na modelu růstu populace.

To, že chápeme populaci spolu s jejím prostředím jako jeden izolovaný systém, není vynuceno nějakými objektivními zákonitostmi. Jedná se jen o jednu z možností popisu, o jeden možný úhel pohledu. Stejně dobře bychom si mohli představovat, že samotná populace představuje systém, na který působí jeho okolí. Nebo že populace a její prostředí jsou dva systémy, které se vzájemně ovlivňují. Tyto možnosti ukážeme na příkladu Bevertonovy-Holtovy rovnice (1.16).

Řešení rovnice (1.16) s počáteční podmínkou (1.9) je dáno formulí

$$x(t) = \frac{K\xi_0}{\xi_0 + (K - \xi_0)r^{-t}}, \tag{4.2}$$

jak se můžeme přesvědčit přímým výpočem. Odtud plyne, že

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} = \frac{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t-1}} = \frac{r}{1 + \dfrac{(r-1)\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}}.$$

Označíme-li tedy

$$y(t) = \frac{\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t}}, \tag{4.3}$$

můžeme psát

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)y(t)} x(t). \tag{4.4}$$

Vývoj velikosti populace je tedy také zapsán lineární homogenní rovnicí. Tato rovnice není autonomní, proměnná t se neobjevuje jen jako index hledané posloupnosti x, ale také ve výrazu $y(t)$; přitom posloupnost y považujeme za známou. Výraz

$$\frac{r}{1 + (r-1)y(t)}$$

lze interpretovat jako růstový koeficient populace, který se v čase mění; je-li $(r-1)y(t) > 0$, je tento růstový koeficient menší než vnitřní koeficient růstu populace, je-li $(r-1)y(t) < 0$, pak je větší. Veličinu $y(t)$ můžeme tedy interpretovat jako vliv prostředí na růst populace v čase t, jako jakousi charakteristiku proměnlivého prostředí. Z rovností (4.2) a (4.3) vidíme, že

$$y(t) = \frac{x(t)}{K}.$$

Bezrozměrná veličina y tedy vyjadřuje poměr velikosti populace k úživnosti prostředí, což lze také chápat jako relativní (vy)čerpání zdrojů prostředí, nebo z jiného pohledu jako jejich vzácnost.

Z rovnosti (4.3) plyne

$$\left(\frac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t} = \frac{1}{y(t)} - 1$$

a tedy

$$y(t+1) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t-1}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{y(t)} - 1\right) r^{-1}} = \frac{ry(t)}{1 + (r-1)y(t)}.$$

Posloupnost y je tedy řešením nelineární diferenční rovnice

$$y(t+1) = \frac{ry(t)}{1 + (r-1)y(t)}. \tag{4.5}$$

Model růstu populace máme nyní vyjádřený dvěma autonomními rovnicemi (4.4) a (4.5). Rovnice pro posloupnost y (charakterizující prostředí) nezávisí na posloupnosti x, proto nemluvíme o systému ale o dvojici rovnic. Tuto dvojici můžeme interpretovat jako model autonomně se vyvíjejícího prostředí, které ovlivňuje velikost populace. V rovnicích (4.4), (4.5) se nevyskytuje parametr K; úživnost prostředí by se objevila jako počáteční podmínka

$$y(0) = \frac{\xi_0}{K}.$$

Z relací (4.4) a (1.16) můžeme také odvodit

$$1 + (r-1)y(t) = r\frac{x(t)}{x(t+1)} = \frac{K + (r-1)x(t)}{K},$$

takže

$$(r-1)y(t) = \frac{(r-1)x(t)}{K}.$$

Dosadíme-li tento výraz do (4.5), dostaneme

$$y(t+1) = \frac{rK}{K + (r-1)x(t)}y(t). \tag{4.6}$$

Nyní nebudeme posloupnost y považovat za známou. Systém rovnic (4.4), (4.6) je autonomní, proměnná t se na pravých stranách objevuje pouze jako index hledaných posloupností. Systém (4.4), (4.6) můžeme tedy chápat jako model vývoje populace (charakterizované její velikostí x) a a jejího životního prostředí (charakterizované relativní vzácností zdrojů y); přitom se populace a prostředí vzájemně ovlivňují, ale nejsou ovlivňovány ničím jiným.

Označíme-li

$$\varphi(\eta) = \frac{r}{1 + (r-1)\eta}, \qquad \psi(\xi) = \frac{rK}{K + (r-1)\xi},$$

můžeme systém rovnic (4.4), (4.6) zapsat v „symetrickém“ tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \varphi\big(y(t)\big)x(t), \\ y(t+1) &= \psi\big(x(t)\big)y(t). \end{aligned}$$

Tvar rovnic naznačuje, že veličinu $\varphi(y)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient populace o velikosti x, a analogicky, veličinu $\psi(x)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient nějaké populace o velikosti y.

Triviální úprava modelu růstu populace v omezeném prostředí ukázala, že populaci a její prostředí můžeme chápat dynamicky jako vztah dvou vyvíjejících se populací; přitom růstový koeficient jedné z nich závisí na té druhé.

Pokud je populace životaschopná, tj. její vnitřní koeficient růstu r je větší než 1, pak

$$\varphi'(\eta) = -\frac{r(r-1)}{\big(1 + (r-1)\eta\big)^2} < 0, \qquad \psi'(\xi) = -\frac{rK(r-1)}{\big(K + (r-1)\xi\big)^2} < 0.$$

Zvětšení „populace y“ zmenšuje rychlost růstu „populace x“ a zvětšení „populace x“ zmenšuje rychlost růstu „populace y“. To v ekologické terminologii znamená, že uvažované interagující populace jsou ve vztahu konkurence (kompetice).

V této kapitole se budeme zabývat autonomními rovnicemi a jejich systémy. Nejprve ukážeme jednoduché vlastnosti autonomních rovnic prvního řádu. Z nich nejdůležitější je „invariance v čase“, která, zhruba řečeno, ukazuje, že nezáleží na tom, kdy se systém popsaný autonomní rovnicí začal vyvíjet, ale na tom, z jaké hodnoty tento vývoj začínal. Pak se budeme věnovat rovnovážným stavům a zejména jejich stabilitě, tj. schopnosti systému se po (malém) vychýlení z rovnováhy do rovnovážného stavu vrátit. V případě autonomních rovnic k tomuto zkoumání máme efektivní výpočetní i grafické metody.

Výsledky získané pro autonomní rovnice prvního řádu pak zobecníme na systémy rovnic a rovnice vyšších řádů; pro ně však již grafické metody nejsou k dispozici.

Kapitola 5

Transformace Z a její užití

Při dosavadních pokusech matematicky modelovat růst populace jsme se dopouštěli hrubého zjednodušení – všechny jedince jsme považovali za stejné. Tento nedostatek se pokusíme napravit, budeme si všímat pohlaví a věku jedinců.

Z hlediska reprodukce jsou samci naprosto bezvýznamní. Stačí, aby v populaci nějaký byl a oplodňoval samice. Proto budeme v populaci uvažovat pouze samice. U těch je důležitý věk. Příliš mladé samice ještě „neprodukují potomky“ (nekladou vejce, nerodí a podobně). Staré jsou již vyčerpané a unavené, proto rodí málo, pokud vůbec. Samice tedy roztřídíme podle věku. Věk budeme udávat v nějakých „přirozených“ jednotkách – u drobných hlodavců by šlo o týdny nebo měsíce, u velkých savců o desetiletí. Za věkovou třídu budeme považovat skupinu samic, které dosáhly jistého věku, ale nemají věk vyšší. Plynoucí čas budeme vyjadřovat ve stejných jednotkách jako věk.

Označme $n_i(t)$ počet samic i-té věkové třídy v čase t, tj. počet samic, které mají věk z intervalu $[i, i+1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 0$ označuje třídu novorozených samiček, nemáme nějakou apriorní horní mez věku. Umírání je nedílnou součástí života, umřít lze v libovolném věku. Je to ale jev náhodný, nevíme, kdy daná samice uhyne. Příjemnější je mluvit o přežívání, ne o umírání. Proto zavedeme pravděpodobnosti přežití (*survival probabilities*). Symbol s_i bude označovat pravděpodobnost, že samice z i-té věkové třídy bude žít i v následujícím období a tedy „postoupí“ do vyšší věkové třídy; odvozenou hodnotu $1 - s_i$ lze nazvat *věkově specifická úmrtnost.* Veličiny s_i a n_i tedy splňují relace

$$n_{i+1}(t+1) = s_i n_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.1}$$

Samice „dávají vzniknout“ dcerám (porodí je, vysedí je a podobně). Množství „vyprodukovaných“ dcer se mění s věkem. Označme proto f_i očekávané množství dcer samice z věkové třídy i za jednotkový čas; f_i lze nazvat *specifická plodnost ve věku* i (fertility). Číslo f_i samozřejmě nemusí být celé, lze ho interpretovat jako průměrný počet dcer samic z věkové třídy i, neboli jako střední (očekávanou) hodnotu náhodné veličiny „počet dcer samice věku i“. Počet novorozených samic splňuje relaci

$$n_0(t+1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_i n_i(t). \tag{5.2}$$

Povšimněme si, že apriori nevylučujeme, že by novorozené samičky nemohly být plodné; hodnota f_0 nemusí být nulová (i když v „rozumných“ aplikacích asi bude). Počet novorozených samiček je formálně dán nekonečnou řadou, ve skutečnosti půjde o konečný součet, neboť od jistého věku již budou všechny fertility nulové.

Model růstu věkově strukturované populace samic je dán rovnostmi (5.2) a (5.1). Z rovnice (5.1) vyjádříme množství samic věkové třídy i v čase t jako

$$n_i(t) = s_{i-1}n_{i-1}(t-1) = s_{i-1}s_{i-2}n_{i-2}(t-2) = \cdots = s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i-t}n_{i-t}(0)$$

po $i > t$ a

$$n_i(t) = s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_0(t-i)$$

pro $i \le t$. Tato vyjádření inspirují k zavedení nových parametrů

$$l_i = \prod_{j=0}^{i-1} s_j, \quad i = 1, 2, 3, \dots .$$

Tato veličina představuje pravděpodobnost, že se narozená samička dožije věku alespoň i. V tomto vyjádření je obsažen i předpoklad, že přežití v jednotlivých věkových třídách jsou nezávislé jevy. S pomocí veličin l_i vyjádříme

$$n_i(t) = \begin{cases} \dfrac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0), & i > t, \\ l_i n_0(t-i), & i \le t. \end{cases} \tag{5.3}$$

Strukturu populace tedy známe, pokud známe její počáteční strukturu, tj. veličiny

$$n_0(0), n_1(0), n_2(0), n_3(0), \dots ,$$

a pokud známe počet novorozených samiček v libovolném čase, tj. veličiny

$$n_0(1), n_0(2), n_0(3), \dots .$$

Veličiny $n_0(0), n_1(0), n_2(0), n_3(0), \dots$ můžeme považovat za počáteční podmínky k rovnicím (5.1), (5.2). Veličiny $n_0(1), n_0(2), n_0(3), \dots$ vyjadřují jakési krajní hodnoty populace, velikosti nejmladších věkových tříd v jednotlivých časech. Proto je budeme nazývat *okrajové podmínky.*

Problémem našeho modelu je skutečnost, že okrajové podmínky neznáme. Označme proto $x(t) = n_0(t)$. Vyjádříme je z rovnice (5.2) a využijeme vztahy (5.3):

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i n_i(t) = \sum_{i=0}^{t} f_i n_i(t) + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i n_i(t) = \sum_{i=0}^{t} f_i l_i x(t-i) + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i \frac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0).$$

Pro zjednodušení zápisu ještě označíme

$$b(i) = f_i l_i, \quad g(t) = \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i \frac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0).$$

Veličina $b(i)$ vyjadřuje očekávaný počet dcer, které ve věku i „vyprodukuje“ novorozená samička; $l_i n_0$ je totiž očekávané množství samiček, které se dožijí věku i, poté každá z nich „vyprodukuje“ f_i dcer. Veličina $b(i)$ je tedy jakási věkově specifická porodnost „diskontovaná“ pravděpodobností dožití tohoto věku. Veličina $g(t)$ závisí pouze na počátečních podmínkách, veličina $b(i)$ je vyjádřená pomocí parametrů modelu. Parametry i počáteční podmínky považujeme za známé.

Se zavedeným označením můžeme rovnici pro okrajové podmínky přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(i)x(t-i) + g(t),$$

a poněvadž platí

$$\sum_{i=0}^{t} b(i)x(t-i) = b(0)x(t) + b(1)x(t-1) + \cdots + b(t-1)x(1) + b(t)x(0) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i),$$

dostaneme rovnici

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i) + g(t). \tag{5.4}$$

To je slavná *Eulerova-Lotkova rovnice obnovy.* Ještě si můžeme všimnout, že pro dostatečně velké t, určitěji řečeno: pro čas větší než je plodný věk samic, je $g(t) = 0$. Pro velká t tedy dostaneme *homogenní rovnici obnovy*

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i). \tag{5.5}$$

Rovnice (5.4) a (5.5) jsou jakýmisi rekurentními formulemi. Ze znalosti $x(0)$ můžeme vypočítat $x(1)$, ze znalosti $x(0)$ a $x(1)$ můžeme vypočítat $x(2)$, ze znalosti $x(0)$, $x(1)$ a $x(2)$ vypočítáme $x(3)$ atd. Nejedná se ovšem o rekurentní formule, jak byly zavedeny v 2.1, ale o operátorově-diferenční rovnice, které byly zmíněny v 2.3. K výpočtu $x(t+1)$ je totiž potřebná znalost všech předchozích členů posloupnosti $x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots, x(0)$, nestačí znalost jen několika z nich. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit i optimističtěji: k výpočtu $x(t+1)$ stačí znát průběh procesu od počátku po přítomný okamžik t, nepotřebujeme nějaké informace z budoucnosti.

K řešení rovnic typu (5.4), které jsme v 2.3 nazvali diferenční rovnice konvolučního typu, potřebujeme vybudovat další teorii, nevystačíme již s diferenčním a sumačním počtem.

5.1 Transformace Z

Nejprve připomeneme některé pojmy a tvrzení týkající se mocninných řad. *Mocninná řada* je řada funkcí obecně komplexní proměnné ζ tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{5.6}$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nějaká komplexní posloupnost. *Poloměr konvergence* r řady (5.6) je definován vztahem

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|};$$

přitom klademe $r = 0$, pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, a $r = \infty$, pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Pro mocninné řady platí

Věta 21 (Cauchy-Hadamard)**.** *Mocninná řada* (5.6) *konverguje absolutně a stejnoměrně na množině* $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$*. Na množině* $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > r\}$ *řada* (5.6) *diverguje.*

Poloměr konvergence r mocninné řady (5.6) lze také vypočítat pomocí některého ze vztahů

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

pokud některá z těchto limit existuje.

Nyní již budeme směřovat k zavedení transformace jisté třídy reálných posloupností. Označme $\mathcal{F}$ množinu komplexních funkcí komplexní proměnné, tj.

$$\mathcal{F} = \{f : f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$$

a $\mathcal{K}$ množinu posloupností

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{P}_{-\infty} : x(t) = 0 \text{ pro } t < 0\}\,.$$

Posloupnosti z množiny $\mathcal{K}$ nazýváme *kauzální posloupnosti.*[1]

Definice 23. *Transformace* Z je zobrazení $Z : \mathcal{K} \to \mathcal{F}$, které kauzální posloupnosti x přiřadí komplexní funkci $Z(x) = \tilde{x}$ definovanou mocninnou řadou

$$\tilde{x}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x(j)}{z^j}.$$

Vzhledem k tomu, že definičním oborem transformace Z jsou kauzální posloupnosti, můžeme definiční vztah psát ve tvaru

$$\tilde{x}(z) = Z(x)(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)z^{-j}.$$

Označme nyní

$$R = \frac{1}{r} = \limsup_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|}.$$

Z Cauchyovy-Hadamardovy věty plyne, že řada definující obraz kauzální posloupnosti x konverguje absolutně a stejnoměrně na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ a diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Zejména pokud je $R = 0$, pak řada $\tilde{x}$ konverguje všude s výjimkou bodu $z = 0$; pokud $R = \infty$, pak řada $\tilde{x}$ diverguje všude. Hodnotu R lze také vyjádřit jako

$$R = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|}, \quad \text{nebo} \quad R = \lim_{t\to\infty} \left|\frac{x(t+1)}{x(t)}\right|,$$

pokud některá z uvedených limit existuje.

[1] Termín „kauzální posloupnost“ patrně vyjadřuje představu, že posloupnost před počátečním časem 0 neexistovala a v čase 0 z nějaké příčiny (latinsky *causa*) vznikla. Posloupnost, která existuje „od věčnosti“, žádnou příčinu nemá. Slabinou tohoto zdůvodnění je fakt, že nulovost není totéž co neexistence, nula není „nic“.

Transformace Z je prostá. Pokud totiž dvě posloupnosti $x, y \in \mathcal{K}$ mají stejný obraz, $\tilde{x} = \tilde{y}$, pak pro všechna $|z| > R$ platí

$$0 = \tilde{x}(z) - \tilde{y}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} - \sum_{j=0}^{\infty} y(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \big(x(j) - y(j)\big)z^{-j}.$$

Z věty o jednoznačnosti Laurentovy řady nyní plyne, že $x(j) = y(j)$ pro všechna $j = 0, 1, 2, \dots$ a tedy $x = y$.

Vlastnosti transformace Z, které budeme potřebovat, shrneme do následujícího

Tvrzení 12.

1. Transformace Z je lineární zobrazení na množině kauzálních posloupností, tj.

$$Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y), \qquad \widetilde{\alpha x + \beta y} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}$$

   pro libovolná čísla α, β a libovolné kauzální posloupnosti x, y.

2. Transformace Z převádí operátor posunu na aritmetické operace násobení a sčítání:

$$Z\left(x^{\sigma}\right)(z) = zZ\big(x\big)(z) - zx(0), \qquad \widetilde{x^{\sigma}}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0),$$

   obecně

$$Z\left(x^{\sigma^k}\right)(z) = z^k Z\big(x\big)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^{k-j}, \qquad \widetilde{x^{\sigma^k}}(z) = z^k\tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^{k-j}$$

   pro libovolnou kauzální posloupnost x a přirozené číslo k.

3. Limita obrazu kauzální posloupnosti x v nevlastním bodě je rovna počáteční hodnotě posloupnosti x,

$$\lim_{|z|\to\infty} \tilde{x}(z) = x(0).$$

4. Limitu kauzální posloupnosti x lze vyjádřit pomocí limity jejího obrazu ve vlastním bodě 1,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{x}(z),$$

   pokud je $R = \limsup\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|} \le 1$.

5. Nechť $a \neq 0$ a x je kauzální posloupnost. Je-li kauzální posloupnost y definovaná vztahem $y(t) = a^t x(t)$, pak

$$\tilde{y}(z) = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right).$$

6. Nechť x je kauzální posloupnost a posloupnost y je definovaná vztahem $y(t) = tx(t)$. Pak

$$\tilde{y}(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{x}(z).$$

Obecně: nechť $k \in \mathbb{N}$ a posloupnost y je definovaná vztahem $y(t) = t^k x(t)$. Pak

$$\tilde{y}(z) = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \tilde{x}(z);$$

přitom $\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k$ označuje k-krát iterovaný diferenciální operátor $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.

Důkaz:

1. $Z(\alpha x + \beta y)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \big(\alpha x(j) + \beta y(j)\big) z^{-j} = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} + \beta \sum_{j=0}^{\infty} y(j) z^{-j} =$

$$= \alpha Z(x)(z) + \beta Z(y)(z).$$

2. $\widetilde{x^\sigma}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x^\sigma(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} x(j+1) z^{-j} = z \sum_{j=0}^{\infty} x(j+1) z^{-(j+1)} =$

$$= z \sum_{j=1}^{\infty} x(j) z^{-j} = z \left(\sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} - x(0)\right) = z \sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} - z x(0).$$

Pro k-tý posun provedeme důkaz úplnou indukcí. Indukční krok je

$$Z\left(x^{\sigma^{k+1}}\right)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{\sigma^{k+1}}(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} x(j+k+1) z^{-j} = z \sum_{j=0}^{\infty} x(j+k+1) z^{-(j+1)} =$$

$$= z \sum_{j=1}^{\infty} x(j+k) z^{-j} = z \left(\sum_{j=0}^{\infty} x(j+k) z^{-j} - x(k)\right) = z \left(\widetilde{x^{\sigma^k}}(z) - x(k)\right) =$$

$$= z \left(z^k \tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j} - x(k)\right) = z^{k+1} \tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k} x(j) z^{k-j}.$$

3. $\lim_{|z|\to\infty} \tilde{x}(z) = \lim_{|z|\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j}\right) = x(0) + \lim_{|z|\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x(j) z^{-j}\right) =$

$$= x(0) + \sum_{j=1}^{\infty} x(j) \lim_{|z|\to\infty} z^{-j} = x(0).$$

4. Platí

$$Z(\Delta x)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta x(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \big(x(j+1) - x(j)\big) z^{-j}$$

a současně podle 2. je

$$Z(\Delta x)(z) = Z\left(x^\sigma - x\right)(z) = \widetilde{x^\sigma}(z) - \tilde{x}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0) - \tilde{x}(z) = (z-1)\tilde{x}(z) - zx(0).$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{x}(z) = \lim_{z\to 1}\left(zx(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\big(x(j+1)-x(j)\big)z^{-j}\right) =$$
$$= x(0) + \lim_{z\to 1}\left(\lim_{t\to\infty}\sum_{j=0}^{t}\big(x(j+1)-x(j)\big)z^{-j}\right) =$$
$$= x(0) + \lim_{t\to\infty}\left(\lim_{z\to 1}\sum_{j=0}^{t}\big(x(j+1)-x(j)\big)z^{-j}\right) =$$
$$= x(0) + \lim_{t\to\infty}\big(x(t+1)-x(0)\big) = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

5. $\tilde{y}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a^j x(j) z^{-j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j)\left(\frac{z}{a}\right)^{-j} = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right).$

6. Je-li $y(t) = tx(t)$ pak

$$\tilde{y}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} jx(j)z^{-j} = -z\sum_{j=0}^{\infty} x(j)(-j)z^{-j-1} = -z\sum_{j=0}^{\infty} x(j)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-j} =$$
$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{x}(z).$$

Pro kauzální posloupnost zavedenou vztahem $y(t) = t^k x(t)$ tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k exponentu k. Označíme $y(t) = t^{k+1}x(t)$, $\eta(t) = t^k x(t)$ a provedeme indukční krok:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j^{k+1}x(j)z^{-j} = -z\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)(-j)z^{-j-1} = -z\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-j} =$$
$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)z^{-j} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{\eta}(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k\tilde{x}(z) = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k+1}\tilde{x}(z).$$

□

Transformace Z některých posloupností lze spočítat explicitně. Několik výsledků je uvedeno v následujícím

Tvrzení 13 (Obrazy některých posloupností).

1. Nechť kauzální posloupnost x má nultý člen jednotkový a od prvního členu dále je geometrická s kvocientem $a \neq 0$, tj. $x(t) = a^t$ pro $t > 0$. Pak

$$\tilde{x}(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{s} \quad R = |a|.$$

Zejména pro $a = 1$, tj. pro posloupnost $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ platí $\tilde{x}(z) = \dfrac{z}{z-1}$, $R = 1$.

2. Pro posloupnost x definovanou vztahem
$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ q^{t-1}, & t \geq 1, \end{cases}$$
kde $q \neq 0$ platí $\tilde{x} = \dfrac{1}{z-q}$ a $R = |q|$.

3. Posloupnost „Kroneckerovo δ“ s indexem k je definována vztahem
$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & t = k, \\ 0, & t \neq k. \end{cases}$$
Tato posloupnost bývá také někdy nazývána *jednotkový impuls v čase k*. Její obraz je $\widetilde{\delta_k}(z) = z^{-k}$ s $R = 0$. Zejména platí $\widetilde{\delta_0}(z) = 1$ pro $z > 0$.

Důkaz:

1. Podle známého vzorce pro součet geometrické řady platí pro $|z| > |a|$
$$\tilde{x}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

2. Platí
$$x^\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ q^t, & t \geq 0, \end{cases}$$
takže podle předchozího výsledku je
$$\widetilde{x^\sigma}(z) = \frac{z}{z-q}.$$
Podle části 2. v Tvrzení 12 je současně $\widetilde{x^\sigma}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0) = z\tilde{x}(z)$. Porovnáním výrazů na pravých stranách těchto rovností dostaneme výsledek.

3. $\widetilde{\delta_k}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta_k(j) z^{-j} = z^{-k}$.

□

5.1.1 Konvoluce

Pro posloupnost $a \in \mathcal{P}_{-\infty}$ klademe
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a(j) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) + \sum_{j=1}^{\infty} a(-j),$$
pokud obě řady na pravé straně definiční rovnosti konvergují.

Definice 24. *Konvoluce* $*$ je parciální operace na množině posloupností $\mathcal{P}_{-\infty}$, tj. $*$ je zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{P}_{-\infty} \times \mathcal{P}_{-\infty}$ do množiny $\mathcal{P}_{-\infty}$, definované vztahem

$$x * y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

pro posloupnosti $x, y \in \mathcal{P}_{-\infty}$ takové, že obě řady

$$\sum_{j=0}^{\infty} x(t-j)y(j) \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} x(t+j)y(-j)$$

konvergují absolutně.

Jsou-li $x, y \in \mathcal{P}_{-\infty}$ takové posloupnosti, že existuje jejich konvoluce $x * y$, pak existuje také konvoluce $y * x$ a obě konvoluce se rovnají. Pro $t > 0$ totiž platí

$$\begin{aligned} x * y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \\ = \cdots + x(t+1)y(-1) + x(t)y(0) + \cdots + x(0)y(t) + x(-1)y(t+1) + \cdots = \\ = \cdots + y(t+1)x(-1) + y(t)x(0) + \cdots + y(0)x(t) + y(-1)x(t+1) + \cdots = \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(t-j)x(j); \end{aligned}$$

analogicky ukážeme platnost vztahu pro $t \leq 0$.

Jsou-li x a y kauzální posloupnosti, pak platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j).$$

Na pravé straně rovnosti je konečný součet, což znamená, že konvoluce kauzálních posloupností je vždy definována. Je-li $t < 1$, pak podle Tvrzení 7 platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j) = -\sum_{j=t+1}^{-1} x(t-j)y(j) = 0.$$

Odtud plyne, že konvoluce kauzálních posloupností je kauzální posloupnost. Stručně, pro libovolné posloupnosti $x, y \in \mathcal{K}$ existuje posloupnost $x * y \in \mathcal{K}$, pro jejíž členy platí

$$x * y(t) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j) = \sum_{j=-\infty}^{t} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j);$$

při konkrétních výpočtech používáme to vyjádření konvoluce, které je v dané situaci nejvhodnější.

Ještě si můžeme povšimnout, že na pravých stranách rovnic (5.4) a (5.5) je konvoluce posloupností b a x; tím je zdůvodněn název „rovnice konvolučního typu“.

Důležitou vlastností transformace Z je ta, že převádí konvoluci na součin.

Tvrzení 14. Nechť $x, y \in \mathcal{K}$. Pak platí

$$Z(x * y) = Z(x)Z(y), \quad \text{tj.} \quad \widetilde{x * y}(z) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).$$

Stručně: obraz konvoluce kauzálních posloupností x a y při transformaci Z je součinem obrazů jednotlivých posloupností.

Důkaz: Nekonečné řady, kterými jsou definovány obrazy kauzálních posloupností při transformaci Z, konvergují uvnitř svého oboru konvergence absolutně. Nekonečné řady, jimiž je definována konvoluce kauzálních posloupností jsou vlastně konečnými součty. Proto je následující výpočet korektní.

$$\begin{aligned}\widetilde{x * y}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} x * y(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(j-i)y(i)z^{-j} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x(j-i)y(i)z^{-j} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-i}^{\infty} x(k)y(i)z^{-i-k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i)z^{-i} \sum_{k=-i}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}\right) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).\end{aligned}$$

□

5.1.2 Užití transformace Z pro řešení speciální lineární diferenční rovnice

Uvažujme počáteční úlohu pro lineární diferenční rovnici s konstantním koeficientem

$$x(t+1) = qx(t) + b(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{5.7}$$

Její řešení budeme hledat ve třídě kauzálních posloupností. Rovnici přepíšeme na tvar

$$x^\sigma = qx + b$$

a obě její strany přetransformujeme. S využitím linearity transformace Z dostaneme

$$\widetilde{x^\sigma} = q\tilde{x} + \tilde{b}.$$

Levou stranu upravíme podle Tvrzení 12.2,

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = q\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z).$$

Z této rovnice vyjádříme obraz řešení úlohy (5.7),

$$\tilde{x}(z) = \frac{\tilde{b}(z) + zx(0)}{z-q} = x_0 \frac{z}{z-q} + \tilde{b}(z)\frac{1}{z-q}.$$

Podle Tvrzení 13.1 a 2 nyní můžeme psát

$$\tilde{x}(z) = x_0\tilde{a}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{c}(z),$$

kde posloupnosti a, b jsou dány předpisem

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ q^t, & t \geq 0, \end{cases} \qquad c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ q^{t-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Ještě využijeme vztah konvoluce a transformace Z podle Tvrzení 14. Pro obraz hledané posloupnosti x tak dostaneme

$$\tilde{x}(z) = x_0\tilde{a}(z) + \widetilde{b * c}(z),$$

nebo stručně $Z(x) = Z(x_0 a + b * c)$. Řešení počáteční úlohy je tedy dáno výrazem

$$x(t) = x_0 a(t) + b * c(t),$$

neboť transformace Z je prosté zobrazení. Tento výsledek ještě můžeme rozepsat do tvaru

$$x(t) = x_0 q^t + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)c(j) = x_0 q^t + \sum_{j=1}^{t} b(t-j)q^{j-1} =$$
$$= x_0 q^t + \sum_{i=0}^{t-1} b(i)q^{t-i-1} = \left(x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} b(i)q^{-i-1}\right) q^t,$$

což je stejný výsledek jako v Důsledku 1 Věty 16.

5.2 Volterrova diferenční rovnice konvolučního typu

Volterrova diferenční rovnice konvolučního typu je diferenční rovnice tvaru

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)x(j) + g(t), \tag{5.8}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $b, g \in \mathcal{K}$. Neznámou posloupnost x hledáme ve třídě kauzálních posloupností $\mathcal{K}$. Pokud je posloupnost g nulová, nazýváme rovnici *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Eulerova-Lotkova rovnice obnovy (5.4) nebo (5.5) je právě rovnicí tvaru (5.8) s parametrem $\alpha = 0$.

Homogenní Volterrovu diferenční rovnici konvolučního typu

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)x(j) \tag{5.9}$$

můžeme zapsat ve stručnějším tvaru

$$x^\sigma = \alpha x + b * x \quad \text{nebo} \quad \Delta x = (\alpha - 1)x + b * x.$$

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že rovnice (5.9) splňuje princip superpozice, tj. lineární kombinace jejich řešení je také jejím řešením. Nulová posloupnost $x \equiv 0$ je také řešením rovnice (5.9). To znamená, že množina řešení rovnice (5.9) tvoří vektorový prostor.

Na obě strany rovnice (5.9) aplikujeme transformaci Z. Ta je podle Tvrzení 12 lineární a podle Tvrzení 14 převádí konvoluci na součin. Transformovaná rovnice je tedy

$$\widetilde{x^\sigma} = \alpha\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{x}.$$

S využitím Tvrzení 12.2 dostaneme

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = \alpha\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{x}(z).$$

Z této rovnosti vyjádříme obraz řešení rovnice (5.9)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - \alpha - \tilde{b}(z)}. \tag{5.10}$$

Vidíme, že řešení Volterrovy rovnice (5.9) závisí vedle parametru α a posloupnosti b, pouze na počáteční hodnotě $x(0)$. To znamená, že řešení konkrétní homogenní Volterrovy diferenční rovnice konvolučního typu tvoří jednorozměrný podprostor v prostoru kauzálních posloupností.

Příklad.

Najdeme řešení rovnice

$$x(t+1) = 2x(t) + 2^t \sum_{j=0}^{t} \frac{x(j)}{2^j}. \tag{5.11}$$

V tomto případě je $\alpha = 2$ a $b(t) = 2^t$. Podle Tvrzení 13.1 je

$$\tilde{b}(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Po dosazení do obecného vyjádření (5.10) dostaneme obraz řešení dané rovnice (5.11)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - 2 - \dfrac{z}{z-2}} = x(0)\frac{z^2 - 2z}{z^2 - 5z + 4} = x(0)\left(1 + \frac{3z-4}{(z-4)(z-1)}\right) =$$

$$= x(0)\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{8}{z-4}\right)\right),$$

takže s využitím výsledků v Tvrzení 13 můžeme psát

$$\tilde{x}(z) = x(0)\left(\tilde{\delta}_0(z) + \tfrac{1}{3}\left(\tilde{c}(z) + 8\tilde{d}(z)\right)\right),$$

kde

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \qquad d(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4^{t-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Pro $t \ge 1$ tak dostáváme řešení rovnice (5.11) ve tvaru

$$x(t) = \tfrac{1}{3}x(0)\left(1 + 8 \cdot 4^{t-1}\right) = \tfrac{1}{3}x(0)\left(1 + 2^{2t+1}\right).$$

Snadno nahlédneme, že touto rovností je dáno řešení rovnice (5.11) i pro $t = 0$. ∎

Nehomogenní rovnici (5.8) můžeme opět zapsat stručně

$$x^\sigma = \alpha x + b * x + g.$$

Její transformací dostaneme rovnost

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = \alpha\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{x}(z) + \tilde{g}(z)$$

a z ní vyjádříme obraz řešení rovnice (5.8)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - \alpha - \tilde{b}(z)} + \tilde{g}(z)\frac{1}{z - \alpha - \tilde{b}(z)}.$$