# Stochastické procesy ve finanční matematice

**Doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.**

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

# Obsah


**1 Základy teorie pravděpodobnosti** **6**

1.1 Motivace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2 Pravděpodobnost . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.3 Opakování základních pojmů teorie pravděpodobnosti . . . . . 7

1.4 Diskrétní náhodné proměnné . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

1.5 Závislost a nezávislost náhodných veličin . . . . . . . . . . . . 10

1.6 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání . . . . . 13

1.7 Součty náhodných veličin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

1.8 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

**2 Náhodná procházka** **18**

2.1 Jednoduchá náhodná procházka . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

2.2 Základní vlastnosti náhodné procházky . . . . . . . . . . . . . 19

2.3 Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou . . . . 21

2.3.1 Technika podmínění 1. krokem . . . . . . . . . . . . . . 21

2.3.2 Technika počítání trajektorií . . . . . . . . . . . . . . . 22

2.3.3 Princip reflexe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.3.4 Generující funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2.3.5 Charakteristiky náhodných veličin a jejich generující funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.3.6 Součty náhodných veličin a konvoluce . . . . . . . . . . 29

2.3.7 Generující funkce a náhodná procházka . . . . . . . . . 30

2.3.8 Časy navštívení bodu $r$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

2.3.9 Maxima . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

2.4 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

**3 Zákony arcsinu a Pólyova věta** **41**
3.1 Zákony arcsinu pro symetrickou náhodnou procházku . . . . . 41
3.1.1 1. zákon arcsinu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
3.1.2 Stirlingova formule . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
3.1.3 2. zákon arcsinu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
3.2 Pólyova věta v $\mathbb{R}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
3.3 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

**4 Markovské řetězce** **49**
4.1 Diskrétní Markovské řetězce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
4.2 Klasifikace stavů . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
4.3 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

**5 Markovské řetězce ve spojitém čase** **54**
5.1 Základní vlastnosti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
5.2 Procesy zrodu a zániku . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
5.3 Kolmogorovova rovnice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

**6 Poissonův proces** **59**
6.1 Základní vlastnosti Poissonova procesu . . . . . . . . . . . . . 59
6.2 Cramér - Lundbergův model . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
6.3 Inspekční paradox . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**7 Složený Poissonův proces** **64**
7.1 Moment generující funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
7.2 Vlastnosti exponenciálního rozdělení . . . . . . . . . . . . . . 65
7.3 Vlastnost absence paměti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
7.4 Míra rizika . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
7.5 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

**8 Procesy obnovy** **71**
8.1 Rozdělení počtu příchodů . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

**9 Diskrétní modely ve finanční matematice** **74**
9.1 1-krokový model . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

9.2 Základní věta APT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
9.2.1 Jištění (Hedging) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
9.3 Model s více periodami . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
9.3.1 Trh se dvěma periodami . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
9.3.2 Vícekrokový model s $T$ kroky . . . . . . . . . . . . . . 84
9.4 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86

**10 Martingaly 87**
10.1 Férová hra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
10.2 Přirozená filtrace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
10.3 Martingal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
10.4 Samofinancující portfolia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
10.4.1 Dynamické portfolio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
10.4.2 Samofinancující portfolio . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
10.5 Martingalová transformace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
10.5.1 Podmíněná očekávání a martingalová transformace . . 92
10.6 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95

**11 Úplnost trhu 96**
11.1 Věta o úplnosti trhu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

**12 Wienerův proces 100**
12.1 Limita náhodné procházky . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
12.2 Wienerův proces pro cenu akcie . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
12.2.1 Itôovo lemma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
12.2.2 Odvození Black-Scholesovy rovnice . . . . . . . . . . . . 105
12.3 Příklady . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108

# Kapitola 1

# Základy teorie pravděpodobnosti

Matematické modely ve financích jsou z velké většiny stochastické. Základním nástrojem, který využívají, je teorie pravděpodobnosti. V této kapitole připomeneme některé základní pojmy a techniky z teorie pravděpodobnosti, tak jak je budeme v dalších kapitolách potřebovat.

## 1.1 Motivace

Uvažujme jako příklad cenu jedné akcie firmy Apple příští pondělí na konci obchodování. Dnes je pro nás tato cena neznámá a modelujeme ji tedy jako náhodnou veličinu. Ovšem příští týden v úterý již bude známou hodnotou (konstantou). Pro matematické modelování ve financích je typická tato interakce náhodných a známých veličin.

Vzájemnému působení náhodnosti a plynutí času se věnuje teorie stochastických procesů. Připomeňme, že posloupnost náhodných veličin $X_t$, $t \in I$, kde $I$ je indexová množina, se nazývá stochastický proces.

Je-li $X_t$ cena zvolené akcie v budoucím čase $t$, pak zřejmě $X_t$, $X_{t+1}$ nejsou nezávislé náhodné veličiny. Hodnota $X_t$ něco říká o pravděpodobnostním rozdělení náhodné veličiny $X_{t+1}$. Na druhé straně, přírustky $X_{t+2} - X_{t+1}$ a $X_{t+1} - X_t$ budou ve většině našich modelů nezávislé. To úzce souvisí s tzv. hypotézou efektivního trhu. Podle ní všechny informace dostupné v čase t jsou již obsaženy v ceně $X_t$. Jak uvidíme, je to také jedním z hlavních argumentů, proč je geometrický Brownův pohyb “přirozeným ” modelem vývoje cen akcií.

## 1.2 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je hlavním nástrojem modelování ve finanční matematice. Je dobré si uvědomit hned na začátku, že pojem pravděpodobnost má více možných interpretací.

1. Frekventistický přístup: Pravděpodobnost jevu je limita jeho relativní četnosti při velkém počtu opakování téhož experimentu. Nevýhodou této definice je omezení na opakovatelné jevy. Předpoklad opakovatelnosti konkrétní situace na trhu není ve financích úplně reálný.

2. Bayesovský přístup: Pravděpodobnost vyjadřuje míru naší nejistoty o pravdivosti nějakého tvrzení, založenou na informacích, které v danou chvíli máme. V tomto pojetí je každá pravděpodobnost ve skutečnosti podmíněná (informacemi, které právě máme). Například pravděpodobnost padnutí šestky na kostce je $P(X = 6) = \frac{1}{6}$, pokud nemáme žádnou informaci o tom, jak je kostka vyrobena. Budeme-li znát například přesné složení materiálu (nehomogennost dřeva), může se tato pravděpodobnost změnit.

Matematická technika výpočtů nicméně na interpretaci ve většině případů nezávisí a je stejná pro obě pojetí.

## 1.3 Opakování základních pojmů teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor (model) obvykle označujeme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde

– $\Omega$ je prostor elementárních jevů, t.j. všech možných stavů modelovaného systému, které chceme rozlišovat (např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u hodu kostkou).

– $\mathcal{A}$ je množina všech pozorovatelných jevů. Prvky$\mathcal{A}$ jsou podmnožiny $\Omega$. Jev je tedy formálně vzato množina elementárních jevů, které jsou s ním slučitelné. (Například jev "padne sudé číslo" je množina $\{2, 4, 6\}$)

Je-li $\Omega$ konečná nebo spočetná (tak tomu bude u všech diskrétních modelů), je $\mathcal{A}$ v definici pravděpodobnostního prostoru nadbytečné, neboť automaticky $\mathcal{A}$ je rovno $\exp \Omega$, množině všech podmnožin $\Omega$.

– $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnostní míra. V diskrétním případě stačí znát hodnoty této míry na elementárních jevech, tedy $P : \Omega \to \langle 0, 1\rangle$. $P(\omega)$ je pak pravděpodobnost elementárního jevu $\omega$ a pro obecný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Pokud je ale $\Omega$ nespočetná, pak $\exp \Omega$ má příliš velkou mohutnost, aby se na ní dala definovat pravděpodobnostní míra. Musíme se pak omezit na menší $\sigma$-algebru. S tím se setkáme až u spojitých modelů.

## 1.4 Diskrétní náhodné proměnné

Diskrétní náhodná proměnná (náhodná veličina) je funkce

$$X : \Omega \to \{x_1, x_2, ...\} \subseteq \mathbb{R},$$

kde $\{x_1, x_2, ...\}$ je diskrétní podmnožina $\mathbb{R}$.

**Definice 1.4.1.** Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $X$ je definována jako

$$f(x) = P(X = x).$$

**Definice 1.4.2.** Distribuční funkce náhodné veličiny $X$ je

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Připomeňme si ještě definici nezávislosti dvou jevů.

**Definice 1.4.3.** Jevy $A$, $B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, jestliže

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tedy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Jinak řečeno (podle prvního vztahu), víme-li, že nastal jev $B$, nezmění to pravděpodobnost jevu A.

**Definice 1.4.4.** Diskrétní náhodné veličiny $X$ a $Y$ jsou ***nezávislé***, jestliže jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ jsou nezávislé pro všechna $x$ a $y$. Jinými slovy, znalost hodnoty $X$ nedává žádnou informaci o hodnotě $Y$.

Pravděpodobnostní funkce obsahuje všechny informace o uvažované náhodné veličině. Často nám ale stačí její číselné charakteristiky.

**Definice 1.4.5.** ***Očekávání*** (střední hodnota) náhodné veličiny $X$ s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$ je definována jako

$$E(X) = \sum_{x:\, f(x)>0} x f(x),$$

je-li řada absolutně konvergentní.

Očekávání můžeme vypočítat také pomocí vztahu

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

**Definice 1.4.6.** Je-li $k$ přirozené číslo, ***k-tý moment*** $m_k$ náhodné veličiny $X$ je definován jako

$$m_k = E(X^k).$$

**Definice 1.4.7.** ***k-tý centrální moment*** $\sigma_k$ je definován jako

$$\sigma_k = E((X - m_1)^k).$$

Speciálně,

$$m_1 = E(X)$$

je střední hodnota a

$$\sigma_2 = E((X - E(X))^2)$$

je rozptyl (variance). Tedy $\sigma_2 = \sigma^2$, kde $\sigma = \sqrt{\sigma_2}$ je střední směrodatná odchylka.

**Definice 1.4.8.** Nechť $A$ je jev, tj. $A \subseteq \Omega$, a nechť $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina definovaná vztahem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A \end{cases}.$$

Pak $I_A$ se nazývá ***indikátorová funkce*** jevu $A$.

Libovolnou náhodnou veličinu můžeme zapsat pomocí indikátorových funkcí jevů $A_i = \{X = x_i\}$. Máme

$$X = \sum_i x_i I_{A_i}.$$

$I_A$ je příkladem Bernoulliovské náhodné veličiny. Nabývá pouze hodnot 0 a 1.

## 1.5 Závislost a nezávislost náhodných veličin

**Lemma 1.5.1.** *Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**Důkaz:** Označme $A_x = \{X = x\}$ a $B_y = \{Y = y\}$. Pak

$$XY = \sum_{x,y} xy I_{A_x \cap B_y},$$

tedy

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyE(I_{A_x \cap B_y}) = \sum_{x,y} xyP(A_x \cap B_y) =$$

$$\sum_{x,y} xyP(A_x)P(B_y) = (\sum_x xP(A_x))(\sum_y yP(B_y)) = E(X)E(Y).$$

Opak obecně neplatí.

**Definice 1.5.2.** Říkáme, že náhodné veličiny $X$ a $Y$ jsou ***nekorelované***, jestliže platí:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**Věta 1.5.3.** *Nechť $X$ a $Y$ jsou náhodné veličiny. Pak*

1. $Var(aX) = a^2 Var(X)$ *pro* $a \in \mathbb{R}$.
2. *Jsou-li $X$ a $Y$ nekorelované (speciálně nezávislé) náhodné veličiny, pak*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

**Důkaz:** První tvrzení plyne ihned z definice. Dokážeme druhé tvrzení.

$$Var(X+Y) = E\left([(X+Y) - E(X+Y)]^2\right) =$$

$$E\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E(X+Y) + (E(X+Y))^2\right] =$$

$$E((X+Y)^2) - 2E(X+Y)E(X+Y) + E((X+Y)^2) =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - 2\left[(E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\right]$$

$$+E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$$

$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$$

$$= \left(E(X^2) - (E(X))^2\right) + \left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) = Var(X) + Var(Y),$$

kde předposlední rovnost plyne z předpokladu, který implikuje $E(XY) = E(X)E(Y)$.

**Definice 1.5.4.** ***Kovariance*** náhodných veličin $X$ a $Y$ je definována jako

$$cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right].$$

***Korelační koeficient*** $X$ a $Y$ je

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Platí:

$$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow cov(X,Y) = 0$$

a

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Dále je

$$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

Klíčová otázka z praktického hlediska je, jak ověřit nezávislost dvou daných náhodných veličin. Definice k tomu většinou vhodná není.

**Definice 1.5.5.** Nechť $X$ a $Y$ jsou diskrétní náhodné veličiny (na stejném pravděpodobnostním prostoru). ***Sdružená distribuční funkce*** $X$ a $Y$ je definovaná vztahem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y).$$

**Definice 1.5.6.** ***Sdružená pravděpodobnostní funkce***: $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ je definovaná vztahem

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y).$$

Analogicky se definuje sdružená pravděpodobnostní funkce pro více náhodných veličin. Následující lemma dává dobře ověřitelné kriterium nezávislosti.

**Lemma 1.5.7.** *Diskrétní náhodné veličiny $X$ a $Y$ jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

*pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.*

**Důkaz:** cvičení.

Ze znalosti sdružené pravděpodobnostní funkce $f_{X,Y}$ můžeme vypočítat ***marginální pravděpodobnostní funkce*** $f_X$ a $f_Y$. Máme

$$f_X(x) = P(X = x) = P(\bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\}))$$
$$= \sum_y P(X = x \wedge Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x, y).$$

**Příklad 1.5.8.** Nechť $X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$a $Y : \Omega \to \{-1, 0, 2\}$ jsou náhodné veličiny a sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

| | $y = -1$ | $y = 0$ | $y = 2$ | $f_X$ |
|---|---|---|---|---|
| $x = 1$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{2}{18}$ | $\frac{6}{18}$ |
| $x = 2$ | $\frac{2}{18}$ | $0$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{5}{18}$ |
| $x = 3$ | $0$ | $\frac{4}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{7}{18}$ |
| $f_Y$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{8}{18}$ | $\frac{18}{18}$ |

Jsou $X$ a $Y$ nezávislé? Zřejmě ne, v tom případě by řádky tabulky musely být násobkem jeden druhého. Vypočteme kovarianci těchto dvou náhodných veličin. Máme

$$XY : \Omega \to \{-1, 0, -2, -3, 2, 4, 6\}.$$

Dále

$$E(X) = \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{37}{18}, \quad E(Y) = \frac{13}{18}$$

a

$$E(XY) = -1\frac{1}{18} + 2\frac{2}{18} - 2\frac{2}{18} + 4\frac{3}{18} + 6\frac{3}{18} = \frac{29}{18}$$

Celkem tedy

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{29}{18} - \frac{481}{324} = \frac{522 - 481}{324} = \frac{41}{324}.$$

## 1.6 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání

Připomeňme definici podmíněné pravděpodobnosti pro jevy,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ve finančních modelech je obvykle pravděpodobnost podmíněná informací, kterou máme v danou chvíli. Formálně to zachycuje následující definice.

**Definice 1.6.1.** Podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Y$ za podmínky $X = x$, kterou budeme označovat $f_{Y|X}(. \mid x)$, je definována jako

$$f_{Y|X}(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x),$$

pro každé $x$ takové, že $P(X = x) > 0$.

Z definice máme

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y \wedge X = x)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

tedy

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

což je analogický vztah jako platí pro podmíněné pravděpodobnosti jevů.

V předchozím příkladu máme pro $x = 1$

$$f_{Y|X}(y \mid 1) \sim \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}\right) = \frac{f_{X,Y}}{f_X}.$$

Víme-li, že $X = x$, pak $Y$ má novou pravděpodobnostní funkci $f_{Y|X}(y \mid x)$ jakožto funkci $y$ ($x$ je pevné).

Očekávání vůči této funkci je podmíněné očekávání $Y$ za podmínky $X = x$, které označíme $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$.

**Definice 1.6.2.** Funkce

$$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$$

se nazývá ***podmíněné očekávání*** $Y$ při znalosti $X$.

V minulém příkladu je:

$$\Psi(1) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{3}{6}0 + \frac{2}{6}2 = \frac{1}{2},$$

$$\Psi(2) = \frac{-2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

a $\Psi(3) = \frac{6}{7}$.

**Věta 1.6.3.** *(O celkovém očekávání) Pro podmíněné očekávání* $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$ *platí*

$$E(\Psi(x)) = E(Y),$$

*tedy*

$$E(Y) = E(E(Y|X)).$$

**Důkaz:** cvičení.

## 1.7 Součty náhodných veličin

**Lemma 1.7.1.** *Nechť* $X$ *a* $Y$ *jsou dvě náhodné veličiny na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $f(x, y)$ *je jejich sdružená pravděpodobnostní funkce. Pak pro jejich součet* $Z = X + Y$ *platí*

$$P(X + Y = z) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

**Důkaz:** Máme

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_x (\{X = x \wedge Y = z - x\})$$

tedy

$$P(X + Y = z) = \sum_x P(\{X = x\} \wedge \{Y = z - x\}) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Pokud $X$, $Y$ jsou navíc nezávislé, pak

$$f_{X,Y}(x,\, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x),$$

tedy

$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x),$$

což je ***konvoluce funkcí*** $f_X$ a $f_Y$. Označuje se $f_X \star f_Y$.

## 1.8 Příklady

**Příklad 1.8.1.** Nechť $A$ a $B$ jsou jevy s pravděpodobnostmi $P(A) = \frac{3}{4}$ a $P(B) = \frac{1}{3}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

a najděte příklady v nichž nastává rovnost.

**Příklad 1.8.2.** Hana má tři děti, každé z nich má stejnou pravděpodobnost být kluk i holka. Uvažujme následující jevy:

$$A = \{\text{ všechny děti mají stejné pohlaví}\}$$

$$B = \{\text{ nejvýše jedno z nich je kluk}\}$$

$$A = \{\text{v rodině je jak kluk tak holka}\}$$

–Ukažte, že $A$ je nezávislé na $B$ a $B$ je nezávislé na $C$.
– Je $A$ nezávislé na $C$?

**Příklad 1.8.3.** Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl
a) Bernoulliho rozdělení
b) Geometrického rozdělení
c) Poissonova rozdělení

**Příklad 1.8.4.** Najděte příklad dvou náhodných veličin, které jsou nekorelované, ale nejsou nezávislé

# Kapitola 2

# Náhodná procházka

## 2.1 Jednoduchá náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka je základem diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv. Je to "diskrétní verze" Brownova pohybu.

Uvažujme následující hru: Hází se opakovaně mincí (ne nutně férovou). Padne-li hlava (H), získáme 1 Kč. Padne-li orel (O), prohrajeme 1 Kč. Označme $S_0$ sumu, kterou máme na začátku, a $S_n$ sumu, kterou máme po $n$ hrách.

Je tedy

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $X_i$ je náhodná veličina popisující výsledek $i$-té hry. Předpokládáme, že pravděpodobnostní funkce $X_i$ je

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = 1 - p = q$$

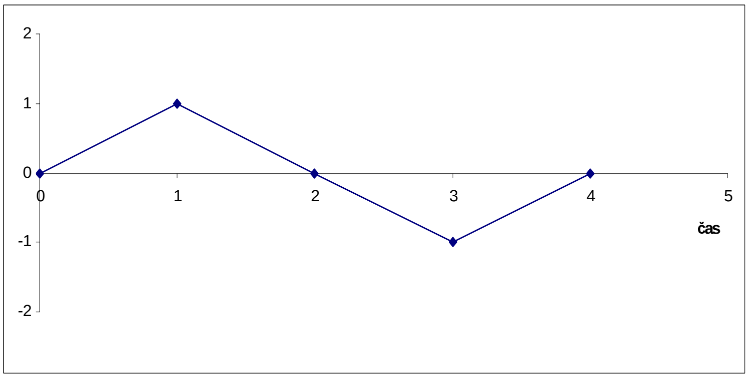
pro všechna $i$ a navíc $X_i$ jsou nezávislé.

$X_i$ jsou tedy analogií Bernoulliho náhodné veličiny, kde místo hodnot $\{1, 0\}$ máme $\{1, -1\}$. Pro každé pevné $n$ je $S_n$ náhodná veličina, tedy $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stochastický proces.

**Definice 2.1.1.** Stochastický proces $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá ***jednoduchá náhodná procházka***. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, nazývá se ***symetrická*** jednoduchá náhodná procházka.

Někdy je vhodnější uvažovat jinou interpretaci – náhodný pohyb částice po přímce: V každém kroku $t = 0, 1, 2, ...$ se částice posune buď o 1 doprava s pravděpodobností $p$, nebo o 1 doleva s pravděpodobností $q = 1 - p$.

Velmi užitečné je *grafické znázornění* jednoduché náhodné procházky. Body o souřadnicích $(n, S_n)$ spojíme úsečkami. Vzniklá lomená čára se nazývá ***trajektorie*** (cesta) náhodné procházky. Trajektorie je grafické znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.




Varianty náhodné procházky:

- jiné rozdělení $X_i$ (např. normální)
- hodnoty $X_i$ ne v $\mathbb{R}$, ale v $\mathbb{R}^d$ (vícerozměrná náhodná procházka).

## 2.2 Základní vlastnosti náhodné procházky

**Lemma 2.2.1.** *Jednoduchá náhodná procházka je **prostorově homogenní**, tedy platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_n = j + b \mid S_0 = a + b).$$

**Důkaz:** Obě strany rovnosti jsou rovny

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a).$$

Podobně je náhodná procházka homogenní i v čase.

**Lemma 2.2.2.** *Jednoduchá náhodná procházka je* ***časově homogenní****, neboli platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_{n+m} = j \mid S_m = a).$$

**Důkaz:** Levá strana je rovna

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a),$$

pravá strana je rovna

$$P(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - a).$$

Rovnost tedy plyne z nezávislosti a stejného rozdělení $X_i$.

**Lemma 2.2.3.** *Jednoduchá náhodná procházka má* ***Markovovu vlastnost****, tedy*

$$P(S_{m+n} = j \mid S_0,\, S_1, ...,\, S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m).$$

**Důkaz:** Známe-li hodnotu $S_m$, pak rozdělení pravděpodobnosti $S_{n+m}$ závisí jen na krocích $X_{m+1}$, $X_{m+2}$, ..., $X_{m+n}$, tedy je nezávislé na $S_0$, $S_1$, ..., $S_{m-1}$.

Markovovu vlastnost lze intuitivně popsat slovy: *"náhodná procházka nemá paměť ", "minulost ovlivňuje budoucnost jen skrze současnost".*

## 2.3 Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou

Tato sekce se věnuje základním technikám počítání s náhodnou procházkou:

- podmínění 1. krokem
- počítání trajektorií
- generující funkci

### 2.3.1 Technika podmínění 1. krokem

**Příklad 2.3.1.** (zruinování hráče): Uvažujme předchozí hru s férovou mincí ($p = \frac{1}{2}$). Padne-li hlava (H), hráč získá 1 Kč, padne-li orel (O), hráč prohraje 1 Kč. Nechť $S_0 = k$ je jeho počáteční jmění. Hráč si chce koupit auto v ceně $N$. Bude hrát tak dlouho, dokud $S_n = N$ (koupí auto) nebo $S_n = 0$ (bankrot). Jaká je pravděpodobnost, že hráč zbankrotuje? Uvažujme jevy:

**A** ... hráč nakonec zbankrotuje;

**H** ... první hod je hlava ($P(\mathbf{H}) = p$);
**O** ... první hod je orel ($P(\mathbf{O}) = q$). Podle věty o úplné pravděpodobnosti

platí

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

Označme $P_k(\mathbf{A})$ hledanou pravděpodobnost bankrotu pro dané počáteční jmění $k$, tedy

$$P_k(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H})$ je ale pravděpodobnost bankrotu v situaci, kdy hráč po 1. kroku má $k+1$ (a hra začíná z hlediska pravděpodobnosti znovu, z nezávislosti $X_i$). Tedy

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) = P_{k+1}(\mathbf{A})$$

a podobně

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}) = P_{k-1}(\mathbf{A}).$$

Označme $p_k = P_k(\mathbf{A})$. Dosazením dostaneme

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1} = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1},$$

což je diferenční rovnice 2. řádu. Máme

$$\frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}),$$

tedy přírůstky pravděpodobnosti jsou konstantní. Označme přírůstky $b = p_k - p_{k-1}$, tedy $p_k = p_0 + kb$. Okrajové podmínky pro diferenční rovnici jsou:

$p_0 = 1$ (okamžitý bankrot)
$p_N = 0$ (okamžitá koupě auta)

Odtud dostaneme $1 + Nb = 0$, tedy $b = -\frac{1}{N}$ a

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}.$$

### 2.3.2 Technika počítání trajektorií

Uvažujme náhodnou procházku vycházející z bodu $a$. Máme tedy

$$S_0 = a, \quad P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q$$

a

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pro pevně danou cestu je pravděpodobnost, že prvních $n$ kroků bude sledovat právě tuto cestu, rovna $p^r q^l$, kde $r$ je počet kroků doprava (nahoru) a $l$ je počet kroků doleva (dolů), tedy

$$r = \mid \{i : S_{i+1} - S_i = 1, i \leq n - 1\} \mid,$$

kde $\mid . \mid$ značí velikost množiny.

Každý jev můžeme vyjádřit pomocí vhodné množiny trajektorií (které jsou s ním v souladu), a jeho pravděpodobnost je součet pravděpodobností těchto trajektorií. Máme

$$P(S_n = b | S_0 = a) = \sum_r M_n^r(a,b) p^r q^{n-r},$$

kde $M_n^r(a,b)$ je počet cest $(S_0, S_1, ..., S_n)$ takových, že $S_0 = a$, $S_n = b$, a majících přesně $r$ kroků doprava.

Víme, že $r + l = n$ a $r - l = b - a$. Odtud $2r = n + b - a$, čili

$$r = \frac{n+b-a}{2}$$

a

$$l = \frac{n-b+a}{2}.$$

Tedy

$$P(S_n = b | S_0 = a) = \binom{n}{r} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}} = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}},$$

pokud $\frac{1}{2}(n + b - a) \in \mathbb{N}$ (jinak je pravděpodobnost rovna 0).

### 2.3.3 Princip reflexe

Označme $N_n(a,b)$ počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu $(n,b)$. Víme, že

$$N_n(a,b) = M_n^r(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}.$$

Dále nechť $N_n^0(a,b)$ je počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu $(n,b)$, které obsahují nějaký bod $(k,0)$ na ose x, tedy navštíví bod 0.

**Věta 2.3.2.** ***(princip reflexe)****: Je-li* $a$, $b > 0$, *pak platí*

$$N_n^0(a,b) = N_n(-a,b).$$

**Důkaz:** Každá cesta z bodu $(0,-a)$ do $(n,b)$ protne osu x poprvé v nějakém bodě $(k,0)$. Reflexí této cesty okolo osy x dostaneme cestu z bodu $(0,a)$

do $(n,b)$, která navštíví osu x. Tato operace dává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi cestami z $(0,-a)$ do $(n,b)$ a cestami $(0,a)$ do $(n,b)$, které navštíví osu x. Tedy $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

**Věta 2.3.3.** *(**o volbách**): Je-li $b > 0$, pak počet cest z bodu $(0,0)$ do bodu $(n,b)$, které se nevrátí do bodu 0, je*

$$\frac{b}{n} N_n\left(0,b\right),$$

*kde $N_n\left(0,b\right)$ je počet všech cest z bodu $(0,0)$ do bodu $(n,b)$.*

**Důkaz:** Pro všechny takové cesty je první krok bod $(1,1)$ (jinak se nutně dostaneme do nuly), tedy jejich počet je roven (z časové homogenity):

$$\begin{aligned} N_{n-1}\left(1,b\right) - N_{n-1}^0\left(1,b\right) &= N_{n-1}\left(1,b\right) - N_{n-1}\left(-1,b\right) = \\ = \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1+b-1)} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+b)} &= \binom{n-1}{m-1} - \binom{n-1}{m} \\ = \frac{b}{n}\binom{n}{m} &= \frac{b}{n} N_n\left(0,b\right), \end{aligned}$$

kde jsme označili $m = \frac{1}{2}(n+b)$.

**Příklad 2.3.4.** (*Úloha o volbách*) Kandidát $A$ má $\alpha$ hlasů; kandidát $B$ dostal $\beta$ hlasů, kde $\alpha > \beta$, tj. kandidát $A$ zvítězil. Jaká je pravděpodobnost, že během voleb byl $A$ celou dobu před $B$?

Označme $X_i = 1$, je-li $i$-tý hlas pro $A$, $X_i = -1$, je-li $i$-tý hlas pro kandidáta $B$. Je tedy $n = \alpha + \beta$. Součet

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

popisuje, o kolik vede $A$ nad $B$ v čase $k$ (případně prohrává, je-li $S_k < 0$).

Podle věty o volbách je trajektorií z bodu $(0,0)$ do bodu $(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$, které se nedostanou do 0, přesně

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} N_{\alpha+\beta}\left(0, \alpha-\beta\right).$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}N_{\alpha+\beta}\left(0,\alpha-\beta\right)}{N_{\alpha+\beta}\left(0,\alpha-\beta\right)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Nyní se budeme zajímat o to, jaká je pravděpodobnost, že se náhodná procházka nevrátí do 0. Máme $S_0 = 0$ a chceme $S_1 \neq 0$, ..., $S_n \neq 0$, jinak řečeno $S_1 S_2 ... S_n \neq 0$.

**Věta 2.3.5.** *Je-li $S_0 = 0$, pak pro $n \geq 1$ platí*

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0 \wedge S_n = b) = \frac{\mid b \mid}{n} P(S_n = b),$$

*tedy*

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0) = \frac{1}{n} E(|S_n|).$$

**Důkaz:** cvičení

### 2.3.4 Generující funkce

Uvažujeme posloupnost reálných čísel

$$a = \{a_i;\, i = 0,\, 1,\, 2,\, ..\}\,.$$

Taková posloupnost obsahuje velké množství informace, kterou můžeme výhodně "zakódovat" do jediného objektu (funkce), s nímž budeme moci lépe pracovat. Mimo jiné získáme možnost použít operace (např. derivaci), které pro posloupnosti nemají smysl.

**Definice 2.3.6.** ***Generující funkce posloupnosti*** $a$ je funkce daná součtem mocninné řady

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Posloupnost $a$ dostaneme z generující funkce $G_a$ zpět vztahem

$$a_i = \frac{G_a^{(i)}(0)}{i!},$$

kde $G_a^{(i)}(0)$ je $i$-tá derivace $G_a$ v bodě 0.

**Příklad 2.3.7.** Nechť $a = \{0,\, 1,\, 0,\, -1,\, 0,\, 1,\, 0, ...\}$. Pak

$$G_a = s - s^3 + s^5 - s^7 + \,...\;,$$

což je geometrická řada s prvním členem $s$ a s kvocientem $q = -s^2$. Tedy

$$G_a(s) = \frac{s}{1 + s^2}$$

pro $\mid s \mid < 1$ (obor konvergence).

Dále budeme definovat generující funkci diskrétní náhodné veličiny.

**Definice 2.3.8.** Nechť $X$ je diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnoty v množině $\{0,\, 1,\, 2, ...\}$, s pravděpodobnostní funkcí

$$f(i) = P(X = i).$$

***Generující funkce*** této ***náhodné veličiny*** je definovaná jako generující funkce její pravděpodobnostní funkce, tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i.$$

Platí zřejmě

$$G_X(s) = E(s^X).$$

**Základní vlastnosti generujících funkcí**:

1. Existuje nezáporné číslo $R$ (poloměr konvergence) takové, že $G(s)$ konverguje pro $\mid s \mid < R$ a diverguje pro $\mid s \mid > R$.

2. $G(s)$ můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $\mid s \mid < R$.

3. Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $\mid s \mid < R'$, kde $0 < R' \leq R$, pak $a_n = b_n$ pro všechna $n$.

**Příklady generujících funkcí náhodných veličin**:

1. Konstantní náhodná veličina. $P(X = c) = 1$, kde $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Máme

$$G_X(s) = 1s^c = s^c.$$

2. Bernoulliho náhodná veličina. $P(X = 1) = p$ a $P(X = 0) = 1 - p$. Tedy

$$G_X(s) = ps^1 + (1 - p)s^0 = 1 - p + ps.$$

3. Geometrické rozdělení. $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}s^n = \sum_{n=1}^{\infty} ps\left[(1-p)s\right]^{n-1} =$$

$$= ps\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-p)s\right]^n = \frac{sp}{1-(1-p)s} = \frac{sp}{1-s+sp}.$$

4. Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda$. $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} s^i = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda s - \lambda} = e^{\lambda(s-1)},$$

s využitím $\sum_n \frac{x^n}{n!} = e^x$.

### 2.3.5 Charakteristiky náhodných veličin a jejich generující funkce

Základní charakteristiky náhodných veličin, $E(X)$ a $Var(X)$, lze jednoduše spočítat pomocí $G_X(s)$.

**Věta 2.3.9.** *Nechť $X$ je náhodná veličina s generující funkcí $G_X(s)$. Pak platí:*

*1.* $E(X) = G'_X(1)$.

*2. Obecně,*

$$E(X(X-1)...(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$$

*(tzv. $k$-tý faktoriální moment).*

**Důkaz:** První tvrzení je speciální případ druhého. Máme

$$G_X^{(k)}(s) = \sum_i s^{i-k} i(i-1)...(i-k+1) f(i) =$$

$$= E(s^{X-k} X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro $s \to 1_-$ dostaneme

$$G_X^{(k)}(1) = E(X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro rozptyl dostaneme speciálně vztah

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1) + X) - E(X)^2 =$$

$$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2 .$$

### 2.3.6 Součty náhodných veličin a konvoluce

Nechť $a = \{a_i,\, i \geq 0\}$ a $b = \{b_i,\, i \geq 0\}$ jsou dvě posloupnosti, pak konvoluce $c = a \star b$ je posloupnost definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0.$$

Jsou-li $G_a$, $G_b$ generující funkce posloupností $a$ a $b$, pak generující funkce posloupnosti $c$ je

$$G_c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) s^n =$$

$$= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left( \sum_{n=i}^{\infty} b_{n-i} s^{n-i} \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \right) = G_a(s) G_b(s).$$

Tím jsme dokázali následující tvrzení.

**Věta 2.3.10.** *Generující funkce konvoluce dvou posloupností je součinem generujících funkcí těchto posloupností.*

**Věta 2.3.11.** *Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s).$$

**Důkaz:** Víme, že pro pravděpodobnostní funkci $X+Y$ platí $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$ (z nezávislosti), a podle předchozí věty víme, že generující funkce konvoluce je součin generujících funkcí. Tedy

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Je-li $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, kde $X_i$ jsou nezávislé, pak z předchozí věty plyne

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} ... G_{X_n}.$$

**Definice 2.3.12.** ***Sdružená pravděpodobnostní generující funkce náhodných veličin***, nabývajících hodnot v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je definovaná jako

$$G_{X_1,X_2}(s_1,s_2) = \sum P\left(X_1 = i \,\wedge\, X_2 = j\right) s_1^i s_2^j = E(s_1^{X_1} s_2^{X_2})$$

Analogicky je možné definovat sdruženou pravděpodobnostní generující funkci pro více náhodných veličin.

### 2.3.7 Generující funkce a náhodná procházka

Uvažujme opět náhodnou procházku

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $P(X_i = 1) = p$ a $P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Přitom $X_i$ jsou nezávislé a $S_0 = 0$.

Jak často se náhodná procházka vrací do počátku? Jaké je pravděpodobnostní rozdělení prvního návratu do počátku? (Pro další návraty je to opět totéž, z nezávislosti $X_i$.) K zodpovězení těchto otázek využijeme generující funkce.

Označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že náhodná procházka je v 0 v čase $n$, a

$$f_0(n) = P(S_1 \neq 0,\, S_2 \neq 0,\, ...,\, S_{n-1} \neq 0,\, S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že první návrat do počátku nastal v čase $n$.

Uvažujme generující funkce těchto dvou posloupností,

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n$$

a

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n.$$

Máme $p_0(0) = 1$ (neboť $S_0 = 0$) a $f_0(0) = 0$.

**Lemma 2.3.13.** *Platí*

$$P_0(s) = \left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Důkaz:** Víme, že $S_n = 0 \Leftrightarrow$ počet kroků doprava = počet kroků doleva, tedy $r = \frac{n}{2} = l$. Počet takových cest je $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro $n$ sudé a 0 pro $n$ liché. Označme $k = \frac{n}{2}$, tj. $n = 2k$. Máme

$$p_0(2k) = \binom{2k}{k} p^k q^k$$

a

$$P_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pqs^2)^k. \tag{2.1}$$

Tvrdíme, že $P_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$. Využijeme obecného binomického rozvoje

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

kde

$$\binom{a}{n} = \frac{a\,(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

Pro $a \in \mathbb{N}$ je rozvoj konečný, pro $a \in \mathbb{R} \wedge a \notin \mathbb{N}$ je rozvoj nekonečný. Dosazením $a = -\frac{1}{2}$ a $x = -4pqs^2$ dostaneme

$$\left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pqs^2\right)^k = \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4)^k \left(pqs^2\right)^k.$$

Porovnáním 2.1 a 2.2 tedy stačí dokázat, že

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4)^k = \binom{2k}{k}.$$

Pro levou stranu dostaneme

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}(-1)^k\, 2^{2k} =$$

$$2^k(-1)^{2k}\frac{1\ 3\ 5\ ...(2k-1)}{k!} = 2^k\frac{1\ 3\ 5\ ...\ (2k-1)}{k!}.$$

Pro pravou stranu

$$\binom{2k}{k} = \frac{2k\,(2k-1)\,(2k-2)\,...1}{k!k!} = 2^k k!\frac{(2k-1)\,(2k-3)\,...3\ 1}{k!k!} =$$

$$2^k\frac{(2k-1)\,(2k-3)\,...3\ 1}{k!}.$$

Tedy obě strany se rovnají. Tím je lemma dokázáno.

**Věta 2.3.14.** *Platí*

$$1)\ P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$$

*a*

$$2)\ F_0(s) = 1 - \left(1 - 4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz: Označme $A$ jev, že $S_n = 0$ a nechť $B_k$ jsou jevy “první návrat do počátku nastal v $k$-tém kroku” ($k = 1, 2, ..., n$).

1) $B_k$ jsou disjunktní a dávají rozklad, tedy

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k).$$

Máme $P(B_k) = f_0(k)$ a $P(A \mid B_k) = p_0(n-k)$, z časové homogenity. Tedy

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^{n} p_0(n-k)f_0(k).$$

Vynásobíme $s^n$ a sečteme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)s^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_0(n-k)f_0(k)s^n =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_0(k)s^k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty} p_0(n-k)s^{n-k}\right) = P_0(s)F_0(s).$$

Protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)s^n = P_0 - 1,$$

dostáváme $P_0 - 1 = P_0F_0$, tedy $P_0 = 1 + P_0F_0$.

Pro důkaz 2) dostáváme z 1)

$$F_0 = \frac{P_0 - 1}{P_0} = 1 - \frac{1}{P_0} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}.$$

**Důsledek 2.3.15.** Pravděpodobnost toho, že se částice někdy vrátí do počátku, je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \mid p - q \mid .$$

Speciálně, pro symetrickou náhodnou procházku ($p = q$) je návrat jistý.

**Důsledek 2.3.16.** (**Pólyova věta v dimenzi 1**) Symetrická náhodná procházka se s pravděpodobností 1 vrátí do počátku.

**Důsledek 2.3.17.** Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, tedy návrat je jistý, pak očekávání času $T_0$ prvního návratu do počátku je

$$E(T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_0(n) = F_0'(1) = \infty.$$

**Důkaz:**

1. Máme

$$F_0(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1- \mid 1-2p \mid = 1- \mid 1-p-p \mid = 1- \mid q-p \mid .$$

   Pro $q = p = \frac{1}{2}$ je $F_0(1) = 1 - 0 = 1$.

2. Je-li návrat jistý, tedy $p = \frac{1}{2}$, pak $P(T_0 = \infty) = 0$, a tedy $E(T_0) = F_0'(1)$, kde $F_0 = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$. Máme

$$F_0' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}(-4pq2s) = \frac{4pqs}{\sqrt{1-4pqs^2}},$$

   tedy $\lim\limits_{s\to 1_-} F_0'(s) = +\infty$.

### 2.3.8 Časy navštívení bodu $r$

Označme

$$f_r(n) = P(S_1 \neq r,\, S_2 \neq r,\, ...,\, S_{n-1} \neq r,\, S_n = r)$$

pravděpodobnost, že se náhodná procházka dostane poprvé do bodu $r$ v čase $n$, s generující funkcí

$$F_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_r(n) s^n.$$

**Věta 2.3.18.** *Platí*

1. $F_r(s) = [F_1(s)]^r$ *pro* $r \geq 1$,
2. $F_1(s) = \frac{1-\left(1-4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2qs}$.

**Důkaz:** Označme $T_r = min\,\{n;\, S_n = r\}$ počet kroků potřebných k dosažení hodnoty $r$ poprvé. Nechť $r > 0$. Abychom dosáhli $r$, musíme se dostat nejdříve do bodu 1, a potom z bodu 1 do bodu $r$. To je z prostorové homogenity totéž jako dostat se z 0 do $r-1$. Odtud plyne $T_r = T_1 + T_{r-1}$. Z nezávislosti tedy dostaneme $F_r = F_1 F_{r-1}$. Máme pro $n > 1$

$$f_1(n) = P(S_1 \neq 1,\, S_2 \neq 1,\, ...,\, S_{n-1} \neq 1,\, S_n = 1) =: P(A) =$$

$$= P(A \mid S_1 = 1)P(S_1 = 1) + P(A \mid S_1 = -1)P(S_1 = -1) =$$

$$= P(A \mid S_1 = 1)p + P(A \mid S_1 = -1)q = 0p + f_2(n-1)q.$$

Odtud

$$f_1(n) = f_2(n-1)q.$$

Vynásobíme $s^n$

$$f_1(n)s^n = qf_2(n-1)s^n$$

a sečteme přes $n > 1$. Tedy

$$\sum_{n=2} f_1(n)s^n = \sum_{n=2} qf_2(n-1)s^n =$$

$$\sum_{n=2} sqf_2(n-1)s^{n-1} = sq\sum_{n=1} f_2(n)s^n.$$

Odtud dostáváme

$$F_1 - ps = F_2qs.$$

Víme, že $F_2 = F_1^2$, tedy

$$F_1 - ps = F_1^2qs,$$

což vede ke kvadratické rovnici

$$qsF_1^2 - F_1 + ps = 0.$$

Řešením dostaneme dva kořeny

$$F_1 = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4qps^2}}{2qs} \\ \frac{1+\sqrt{1-4qps^2}}{2qs} \end{cases}.$$

Kořen $\frac{1+\sqrt{1-4qps^2}}{2qs}$ ale nevyhovuje zadání, protože má v bodě 0 limitu $\infty$. Tím je tvrzení dokázáno.

**Důsledek 2.3.19.** Pravděpodobnost, že náhodná procházka někdy navštíví kladnou část reálné osy, je rovna $min\left\{1, \frac{p}{q}\right\}$.

**Důkaz:** Hledaná pravděpodobnost je rovna pravděpodobnosti, že náhodná procházka navštíví bod 1. Ta je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n),$$

součtu pravděpodobností, že se dostaneme do bodu 1 v nějakém čase $n$. Víme, že

$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n) s^n.$$

Dosazením $s = 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) = F_1(1) = \frac{1-(1-4pq)^{\frac{1}{2}}}{2q} = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} =$$

$$\frac{1-\sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)} = \frac{1-\mid 1-2p \mid}{2(1-p)} = \frac{1-\mid q-p \mid}{2q} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1-(-(q-p))}{2q} = \frac{1-p+q}{2q} = \frac{2q}{2q} = 1 & \text{pro}\, q < p \\ \frac{1-q+p}{2q} = \frac{2p}{2q} = \frac{p}{q} & \text{pro}\, q > p \end{cases}.$$

**Příklad 2.3.20.** Ruleta má 37 čísel (včetně 0). Budeme sázet stále na lichá čísla, tedy $p = \frac{18}{37}$ a $q = \frac{19}{37}$. Pravděpodobnost, že budeme někdy vyhrávat je $\frac{p}{q} = \frac{18}{19}$.

### 2.3.9 Maxima

**Věta 2.3.21.** *Nechť* $S_0 = 0$. Pro $n \geq 1$ platí

$$\mathrm{P}(S_n = b \;\&\; S_1\, S_2 \ldots S_n \neq 0) = \frac{|b|}{n}\; \mathrm{P}(S_n = b)$$

a tedy

$$\mathrm{P}(S_1\, S_2 \ldots S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\; \mathrm{E}(|S_n|).$$

**Důkaz:** Nechť $S_n = b > 0$. Podle věty o volbách je počet cest z bodu $(0,0)$

do bodu $(n, b)$, které nenavštíví počátek celkem

$$\frac{b}{n}\ N_n(0, b).$$

Tedy

$$\mathrm{P}(S_n = b \ \&\ S_1\ S_2 \dots S_n \neq 0) = \frac{b}{n}\ N_n(0, b)\ p^{\frac{n+b}{2}}\ q^{\frac{n-b}{2}} = \frac{b}{n}\ \mathrm{P}(S_n = b).$$

Podobně pro $b < 0$.

Jakou maximální hodnotu nabývá náhodná procházka do času $n$?

Označme

$$M_n = \max\{S_i; 0 \leq i \leq n\}$$

a opět $S_0 = 0$, tedy $M_n \geq 0$.

**Věta 2.3.22.** *Nechť $S_0 = 0$. Pak pro $n \geq 1$ platí*

$$\mathrm{P}(M_n \geq r \ \&\ S_n = b) = \begin{cases} \mathrm{P}(S_n = b) & \textit{pro } b \geq r \\ (\frac{g}{p})^{r-b}\ \mathrm{P}(S_n = 2r - b) & \textit{pro } b < r \end{cases}$$

**Důkaz:** Zřejmě $M_n \geq S_n$, tedy 1. část je jasná.

Dále máme pro $b < r$: Nechť $N_n^r(0, b)$ je počet cest z $(0, 0)$ do $(n, b)$, které obsahují nějaký bod s hodnotou $r$, t.j. $(i, r)$ pro $0 < i < n$ a nechť pro takovou cestu $c$ je $(i_c, r)$ první takový bod. Uvažujme reflexi takové cesty pro $i_c \leq k \leq n$ okolo přímky $y = r$. Tak dostaneme cestu $c'$ z $(0, 0)$ do $(n, 2r - b)$. Každá taková cesta $c'$ vznikne z jednoznačně určené cesty $c$. Tedy

$$N_n^r(0, b) = N_n(0, 2r - b).$$

Dále

$$\begin{aligned} (M_n \geq r \ \&\ S_n = b) &= N_n^r(0, b)\ p^{\frac{n+b}{2}}\ q^{\frac{n-b}{2}} = \\ &= \left(\frac{g}{p}\right)^{r-b}\ N_n^r(0, b)\ p^{\frac{n+2r-b}{2}}\ q^{\frac{n-2r+b}{2}} = \\ &= \left(\frac{g}{p}\right)^{r-b}\ \mathrm{P}(S_n = 2r - b). \end{aligned}$$

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná procházka dosáhne nového maxima v daném čase?

**Věta 2.3.23.** *Nechť $b = 0$. Pravděpodobnost $f_b(n)$, že náhodná procházka se poprvé dostane do bodu $b$ v čase $n$ je*

$$f_b(n) = \frac{|b|}{n}\ \mathrm{P}(S_n = b).$$

**Důkaz:** Plyne z předminulé věty a principu reverze (obrácení).
Nechť pro původní trajektorii náhodné procházky je

$$(0, S_1, \dots, S_n) = (0, X_1, X_1 + X_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} X_i).$$

Uvažujme obrácenou trajektorii

$$(0, T_1, \dots, T_n),$$

kde

$$(0, T_1, \dots, T_n) = (0, X_n, X_n + X_{n-1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} X_i).$$

$X_i$ jsou IID, tedy obě mají stejné rozložení (pro libovolné $p$).
Původní náhodná procházka splňuje

$$S_n = b > 0\ \&\ S_1, \dots, S_n \neq 0$$

(podmínky předminulé věty) právě tehdy když obrácenná náhodná procházka splňuje $T_n = b$ a

$$T_n - T_{n-i} = (X_n + \cdots + X_1) - (X_n + \cdots + X_{n-i+1}) = X_1 + \cdots + X_i > 0$$

pro každé $i$, tedy první dosažení bodu $b$ nastane v čase $n$.
Odtud

$$f_b(n) = \mathrm{P}(S_n = b\ \&\ S_1\ S_2 \dots S_n \neq 0) = \frac{b}{n}\ \mathrm{P}(S_n = b).$$

Pro $b < 0$ je důkaz zcela analogický.

Označme dále $\mu_b$ je očekávaný počet návštěv bodu $b$ před prvním návratem do počátku (předpokládáme stále $S_0 = 0$). Pak

$$\mu_b = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(S_n = b \,\&\, S_1\ S_2 \ldots S_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_b(n) = \mathrm{P}(S_n = b \text{ pro nějaké } n).$$

Tedy pro $p = \frac{1}{2}$ platí následující věta:

**Věta 2.3.24.** *Nechť $p = \frac{1}{2}$ a $S_0 = 0$. Pak pro libovolné $b \neq 0$ je očekávaný počet návštěv bodu $b$ před návratem do $0$ roven $1$.*

**Důkaz:** Nechť

$$f_b = \mathrm{P}(S_n = b \text{ pro nějaké } n > 0).$$

Podmíněno hodnotou $S_1$ máme

$$f_b = \frac{1}{2}(f_{b+1} + f_{b-1})$$

pro $b > 0$, s okrajovou podmínkou $f_0 = 1$. Navíc je

$$f_b = Ab + B$$

pro nějaké konstanty $A, B$. Jediné řešení ležící v intervalu $[0, 1)$ je tedy $f_b = 1$ pro $\forall b > 0$. Ale $f_b = \mu_b$, odkud plyne dokazované tvrzení.

## 2.4 Příklady

**Příklad 2.4.1.** Najděte počet cest z bodu $(0,0)$ do bodu $(3,7)$.

**Příklad 2.4.2.** Najděte počet cest z bodu $(1,2)$ do bodu $(7,4)$ které nenavštíví počatek.

**Příklad 2.4.3.** Najděte generující funkce posloupností

a) $\{0,1,0-1,0,1,\dots\}$

b) $\{1,2,3,4,5\dots\}$

c) $\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\}$.

**Příklad 2.4.4.** Pomocí generující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s geometrickým rozdělením.

# Kapitola 3

# Zákony arcsinu a Pólyova věta

## 3.1 Zákony arcsinu pro symetrickou náhodnou procházku

V této podkapitole uvedeme dva zákony arcsinu, pro časy pobytu napravo od počátku (tj. v kladných hodnotách) a pro poslední navštívení počátku.

### 3.1.1 1. zákon arcsinu

**Věta 3.1.1.** ***(1. zákon arcsinu pro poslední návštěvu počátku)*** *Uvažujme symetrickou náhodnou procházku, t.j. $p = \frac{1}{2}$, a nechť $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$, je rovna*

$$P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

**Důkaz:** Označme $\alpha_{2n}(2k)$ pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$. Máme

$$\alpha_{2n}(2k) = P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_{2k+1} S_{2k+2} ... S_{2n} \neq 0 \mid S_{2k} = 0\right).$$

Z časové homogenity plyne

$$\alpha_{2n}(2k) = P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_1 S_2 ... S_{2n-2k} \neq 0 \mid S_0 = 0\right).$$

Tvrzení tedy plyne z následujícího lemmatu.

**Lemma 3.1.2.** *Pro symetrickou náhodnou procházku platí:*

$$P(S_1...S_{2m} \neq 0) = P(S_{2m} = 0),$$

*kde* $P(S_{2m} = 0) = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

**Důkaz:** Využijeme důsledek věty o volbách: Je-li $S_0 = 0$, pak pro $n \geq 1$ platí

$$P\left(S_1 S_2 ... S_n \neq 0\right) = \frac{1}{n} E\left(\mid S_n \mid\right).$$

Dále ze symetrie plyne

$$P(S_1...S_{2m} \neq 0) = \frac{1}{2m} E(\mid S_{2m} \mid) = 2\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m} 2kP(S_{2m} = 2k)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}P(S_{2m} = 2k) = 2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} =$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1} - \binom{2m-1}{m+k}\right].$$

neboť platí

$$\binom{2m-1}{m+k-1} - \binom{2m-1}{m+k} = \frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}.$$

Opravdu, máme

$$\frac{(2m-1)\,...\,(m-k+1)}{(m+k-1)!} - \frac{(2m-1)\,...\,(m-k)}{(m+k)!} =$$

$$= \frac{(m+k)\,(2m-1)\,...\,(m-k+1) - (2m-1)\,...\,(m-k+1)\,(m-k)}{(m+k)!}$$

$$= \frac{(2m-1)\,...\,(m-k+1)\left[(m+k)-(m-k)\right]}{(m+k)!} = \frac{2k}{2m}\frac{2m\,(2m-1)\,...\,(m-k+1)}{(m+k)!} =$$

$$= \frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}.$$

V posledním členu výraz se sumou je tzv. teleskopický součet. Z takového součtu nám zůstane jen první a poslední člen, ostatní se vyruší. Odtud plyne, že

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1} - \binom{2m-1}{m+k}\right] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\left[\binom{2m-1}{m} - \binom{2m-1}{2m}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\binom{2m-1}{m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{(2m-1)...m\cdot 2}{m!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{2m(2m-1)...(m+1)}{m!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\binom{2m}{m} = P(S_{2m}=0)$$

a odtud plyne tvrzení věty.

V následující podkapitole uvidíme, proč se těmto tvrzením říká zákon arcsinu.

### 3.1.2 Stirlingova formule

Chceme porovnat hodnotu $n!$ (která se v různých formách vyskytuje v kombinačních číslech pro počty trajektorií) s mocninnými funkcemi. Víme, že $n^n \gg n(n-1)...2\cdot 1 \gg 2^n$, tedy $n^n \gg n! \gg 2^n$.

Jak rychle jde ale posloupnost $a_n = \frac{n!}{n^n}$ k nule? Lze ji srovnat s geometrickou posloupností? Pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Tedy (zatím jen hodně přibližně) můžeme psát

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{1}{e^n},$$

neboli $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$.

**Stirlingova formule** dává přesnější odhad. Platí

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

v tom smyslu, že

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Ze Stirlingovy formule dostaneme odhad na hodnotu $u_{2k} = P(S_{2k}=0)$.

**Lemma 3.1.3.** *Platí $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ pro $k \to \infty$, tedy*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{2k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi k}}} = 1.$$

**Důkaz:** Máme

$$u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \approx$$

$$\frac{\frac{(2k)^{2k}}{e^{2k}}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(\frac{k^k}{e^k}\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{2^{2k}k^{2k}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(k^k\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Tím je lemma dokázáno.

Podle zákonu arcsinu je

$$\alpha_{2n}(2k) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

tedy

$$P\left(S_{2k} = 0 \,\wedge\, S_{2k+1}...S_{2n} \neq 0\right) = P\left(S_{2k} = 0\right)P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Ze Stirlingova vzorce máme

$$\alpha_{2n}(2k) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\pi\,(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}}.$$

Hodnota $\sqrt{k\,(n-k)}$ je maximální pro $k = \frac{n}{2}$, tedy $\alpha_{2n}(2k)$ je minimální pro $k = \frac{n}{2}$.

Označme $T_{2n}$ čas posledního navštívení bodu 0 do času $2n$. Pak pro $x \in (0,\,1)$ máme

$$P\left(T_{2n} \leq 2xn\right) \doteq \sum_{k \leq xn} \frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}} \doteq$$

$$\int_0^{xn} \frac{1}{\pi\sqrt{u\,(n-u)}}du = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}},$$

neboť

$$\left(2\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}}\right)' = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{n}}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n}n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-x)x}{n^2}n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-x)\,x}}.$$

### 3.1.3 2. zákon arcsinu

2. zákon arcsinu se týká časů pobytu na jedné straně od počátku (tj. doby, kdy jeden z hráčů byl ve vedení).

**Věta 3.1.4.** *Nechť $p = \frac{1}{2}$ a $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že náhodná procházka stráví přesně $2k$ časových intervalů napravo od počátku, je (opět) rovna*

$$P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Důkaz: učebnice Grimmett, Stirzaker.

## 3.2 Pólyova věta v $\mathbb{R}^n$

**Definice 3.2.1.** Mějme posloupnost náhodných vektorů $X_1$, $X_2$, ..., $X_{n,\ldots}$, kde

$$X_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, ..., X_i^{(m)}\right)$$

je $m$-rozměrný vektor. Nechť platí

$$P\left(X_i^{(j)} = 1\right) = \frac{1}{2}$$

a

$$P\left(X_i^{(j)} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $j \in \{1, 2, ..., m\}$ a všechna $X_i^{(j)}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny.

$m$-***rozměrná náhodná procházka*** je definována vztahem

$$S_n^{(j)} = S_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)},$$

tedy vektorově

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pro $m = 2$ uvažujme množinu mřížových bodů

$$\mathbb{Z}^2 = \{(i,\, j) \mid i,\, j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nechť $S_0 = (0,\, 0)$, pak

$$P\left[S_1 = [1,1]\right] = P\left[S_1 = [-1,-1]\right] =$$

$$= P\left[S_1 = [-1,1]\right] = P\left[S_1 = [1,-1]\right] = \frac{1}{4}.$$

**Věta 3.2.2.** ***(Pólyova věta)****: Pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí nekonečněkrát zpět do počátku, je rovna 1 pro $m = 1$ a $m = 2$ a je rovna 0 pro $m > 2$.*

Poznamenejme, že pro $m = 3$ je pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku $\doteq 0,35$.

**Důkaz:** Jako u jednorozměrné procházky označme

$$p_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0\right)$$

pravděpodobnost návratu v čase $n$ a

$$f_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0 \,\wedge\, S_1 S_2 ... S_{n-1} \neq 0\right)$$

pravděpodobnost prvního návratu v čase $n$. Nechť $P_0$ a $F_0$ jsou generující funkce těchto posloupností. Víme, že platí

$$F_0 = 1 - \frac{1}{P_0}.$$

Máme

$$P\left(\text{částice se někdy vrátí do počátku}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_0\left(n\right) = F_0\left(1\right) = 1 - \frac{1}{P_0\left(1\right)},$$

kde ale

$$P_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) + 1.$$

Odtud dostáváme, že

$$P\,(\text{částice se někdy vrátí do počátku}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_0(n) \text{ diverguje} \\ < 1 & \text{pokud } \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_0(n) \text{ konverguje} \end{cases}$$

Podle Stirlingovy formule víme, že $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Pro $m = 1$ je z nezávislosti komponent

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konverguje pro $s > 1$ (z integrálního kriteria). Pro $m > 1$ je

$$P(S_n = 0) = P\left(S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = ... = S_n^{(m)} = 0\right) = \left(P\left(S_n^{(1)} = 0\right)\right)^m,$$

tedy

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \approx \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Dále

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}$$

konverguje pro $\frac{m}{2} > 1$, tj. $m > 2$. Tedy pro $m > 2$ je hledaná pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku menší než 1, pro $m = 1$ a $m = 2$ je tato pravděpodobnost 1. Pravděpodobnost nekonečně monoha návratů je tedy rovna 0 pro $m > 2$ a rovna 1 pro $m \leq 2$.

## 3.3 Příklady

**Příklad 3.3.1.** Uvažujme symetrickou jednoduchou náhodnou procházku. Nechť $T$ je čas prvního návratu do počátku. Dokažte, že

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

**Příklad 3.3.2.** Ukažte, že pro jednoduchou náhodnou procházku pravděpodobnostní funkce maxima splňuje

$$P(M_n = r) = P(S_n = r) + P(S_n = r + 1)$$

pro $r \geq 0$.

# Kapitola 4

# Markovské řetězce

## 4.1 Diskrétní Markovské řetězce

Uvažujme posloupnost náhodných veličin

$$X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots, \tag{4.1}$$

které nabývají hodnoty ve spočetném nebo konečném stavovém prostoru $S$. Pro každé $n$ je tedy $X_n$ náhodná veličina, nabývající $N$ různých hodnot, kde $N$ je velikost množiny $S$ ($N$ může být rovno nekonečnu).

**Definice 4.1.1.** Stochastický proces $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá Markovský řetězec, pokud splňuje Markovovu podmínku

$$P(X_n = s \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = s \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \tag{4.2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $s, x_0, \ldots x_{n-1} \in S$.

Množina $S$ je nejvýše spočetná, tedy bez újmy na obecnosti můžemem předpokládat, že $S \subseteq \mathbb{N}$. Pak $X_n = i$ znamená, že proces je v $i$-tém stavu v čase $n$. Vývoj systému je popsán pravděpodobnostmi přechodu

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{4.3}$$

které obecně závisí na $n, i, j$. Pokud pravděpodobnosti nezávisí na $n$, je proces homogenní.

**Definice 4.1.2.** Markovský řetezec je homogenní, jestliže platí

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \tag{4.4}$$

pro každé $n, i, j$. Přechodová matice $P = (p_{ij})$ je $|S| \times |S|$ matice přechodových pravděpodobností

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \tag{4.5}$$

Dále budeme předpokládat, že $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovský řetězec s přechodovou maticí $P = (p_{ij})$.

**Věta 4.1.3.** *Přechodová matice $P$ je stochastická matice, tedy platí*

1. *$P$ má nezáporné členy,*
2. *součty prvků v každém řádku jsou rovny jedné, tedy*

$$\sum_j p_{ij} = 1, \tag{4.6}$$

*pro každé $i$.*

První tvrzení je zřejmé, druhé plyne z faktu že řeťezec musí ze stavu $i$ přejít do nějakého stavu (případně i stejného).

Naopak, každá matice s vlastnostmi z předchozí věty může být přechodovou maticí nějakého procesu, věta tedy dává úplnou charakterizaci takových matic.

Krátkodobý vývoj procesu je určen maticí $P$. Abychom mohli zkoumat dlouhodobý vývoj, budeme uvažovat matici přechodu za časový interval délky $n$.

**Definice 4.1.4.** $n$ kroková přechodová matice je matice

$$P(m, n+m) = (p_{ij}(m, m+n)), \tag{4.7}$$

kde

$$p_{ij}(m, m+n) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i). \tag{4.8}$$

Z homogenity zřejmě máme

$$P(m, m+1) = P. \tag{4.9}$$

**Věta 4.1.5.** *Platí*

$$P(m, n+m) = P^n. \tag{4.10}$$

Nechť

$$\mu_i^n = P(X_n = i) \tag{4.11}$$

je pravděpodobnostní funkce pro $X_n$ a $\mu^n$ je řádkový vektor se složkami

$$\mu_i^n, \quad i \in S. \tag{4.12}$$

Pak platí

$$\mu^n = \mu^0 P^n. \tag{4.13}$$

Vývoj procesu tedy záleží na počátečním rozdělení a na iteracích matice $P$.

**Příklad 4.1.6.** Uvažujme jednoduchou náhodnou procházku. Stavový prostor je v tomto případě $S = \mathbb{Z}$ a platí

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{pro } j = i+1 \\ q & \text{pro } j = i-1 \ . \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{4.14}$$

## 4.2 Klasifikace stavů

**Definice 4.2.1.** Stav $i$ se nazývá rekurentní (trvalý), pokud

$$P(X_n = i \text{ pro nějaké } n \mid X_0 = i) = 1 \tag{4.15}$$

Pokud

$$P(X_n = i \text{ pro nějaké } n \mid X_0 = i) < 1, \tag{4.16}$$

pak se stav nazývá tranzientní (přechodný).

**Definice 4.2.2.** Střední čas rekurence stavu je dán vztahem

$$\mu_i = E(T_i \mid X_0 = i), \tag{4.17}$$

kde

$$T_j = \min(n \geq 1 : X_n = j). \tag{4.18}$$

Stav $i$ je nulový, pokud

$$\mu_i = \infty \tag{4.19}$$

a je nenulový, pokud

$$\mu_i < \infty. \tag{4.20}$$

**Definice 4.2.3.** Perioda $d(i)$ stavu $i$ je definovaná jako

$$\gcd(n : p_{ii}(n) > 0). \tag{4.21}$$

Stav se nazývá periodický, pokud $d(i) > 1$. Nazývá se aperiodický, pokud $d(i) = 1$. Platí tedy

$$p_{ii}(n) = 0, \tag{4.22}$$

pokud $n$ nedělí $d(i)$.

**Definice 4.2.4.** Stav se nazývá ergodický, pokud je rekurentní, nenulový a aperiodický.

**Příklad 4.2.5.** Pro náhodnou procházku jsou všechny stavy periodické s periodou 2. V případě $p \neq \frac{1}{2}$ jsou tranzientní. Pro $p = \frac{1}{2}$ jsou nulové rekurentní.

## 4.3 Příklady

**Příklad 4.3.1.** Házíme opakovaně kostkou. Které z následujících procesů jsou Markovské řetězce?

1. Největší číslo $M_n$, které padlo do $n$-tého hodu.

2. Počet šestek které padly v $n$ hodech.

3. V čase $r$ čas $C_r$ od posledni šestky.

4. V čase $r$ čas $B_r$ do příští šestky.

**Příklad 4.3.2.** Ukažte, že libovolná posloupnost nezávislých náhodných veličin s hodnotami ve spočetné množině je Markovský řetězec. Kdy bude takový řetězec homogenní?

# Kapitola 5

# Markovské řetězce ve spojitém čase

## 5.1 Základní vlastnosti

Uvažujme stochastický proces $X(t),\ t \geq 0$, ve spojitém čase, který nabývá hodnoty v nezáporných celých číslech.

**Definice 5.1.1.** Proces $X(t),\ t \geq 0$ je Markovský řetězec ve spojitém čase, jestliže pro všechna $s, t \geq 0$ a nezáporná celá čísla $i, j, x(u)$ platí Markovská vlastnost

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s)$$
$$= P(X(t+s) = j | X(s) = i).$$

Markovská vlastnost tedy říká, analogicky jako v diskrétním případě, že pravděpodobnostní rozdělení budoucích stavů, podmíněné současným a všemi minulými stavy, závisí jen na současném stavu a je nezávislé na minulosti.

**Definice 5.1.2.** Pokud navíc pravděpodobnost

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

nezávisí na $t$, pak se Markovský řetězec ve spojitém čase nazývá stacionární.

Označme jako $\tau_i$ čas který stráví proces ve stavu než se přesune do dalšího stavu. Pak z markovské vlastnosti plyne

$$P(\tau_i > s + t | \tau_i > s) = P(\tau_i > t),$$

tedy tato náhodná veličina nemá pamět a musí mít exponenciální rozdělení.

Tímto způsobem můžeme popsat Markovský řetězec ve spojitém čase. Je to proces, který kdykoliv vstoupí do stavu $i$, pak

– čas který stráví v tomto stavu má exponenciální rozdělení, s intenzitou, kterou označíme $v_i$

– pokud proces opustí stav $i$, pak vstoupí do jiného stavu $j$ s pravděpodobností $P_{ij}$, kde

$$\sum_{i \neq j} P_{ij} = 1.$$

V principu je možná situace, kdy stav má nekonečnou hodnotu $v_i$. Takový stav se nazývá okamžitý, a proces jej okamžitě opustí. V dalším ale takové stavy uvažovat nebudeme.

Markovský řetězec ve spojitém čase se nazývá regulární, pokud s pravděpodobností jedna je počet přechodů v libovolném konečném intervalu konečný.

Definujme

$$q_{ij} = v_i P_{ij}.$$

Víme, že $v_i$ je intenzita s jakou proces opouští stav $i$ a $P_{ij}$ je pravděpodobnost že pak přejde do stavu $j$. Celkem tedy $q_{ij}$ je intenzita s jakou proces přechází ze stavu $i$ do stavu $j$.

Dále označíme

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

pravděpodobnost, že řetězec, který je momentálně ve stavu $i$, se za čas $t$ bude nacházet ve stavu $j$.

## 5.2 Procesy zrodu a zániku

**Definice 5.2.1.** Markovský řetězec ve spojitém čase, pro který platí

$$q_{ij} = 0$$

jakmile $|i - j| > 1$, se nazývá proces zrodu a zániku.

Jinak řečeno, proces zrodu a zániku může ze stavu $i$ přejít pouze do stavu $i+1$ nebo $i-1$. Pokud hodnota procesu reprezentuje velikost populace, pak přechod do stavu $i+1$ chápeme jako zrození nového jedince, přechod do stavu $i-1$ pak znamená zánik jedince.

Označme příslušné přechodové pravděpodobnosti jako

$$\lambda_i = q_{i,i+1},$$

$$\mu_i = q_{i,i-1}.$$

Máme zřejmě

$$v_i = \lambda_i + \mu_i,$$

a

$$\sum_j q_{ij} = v_i.$$

Platí tedy

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = 1 - P_{i,i-1}.$$

Jako příklad uvažujme proces patřící mezi takzvané fronty. Konkrétně půjde o frontu typu M/M/s.

V tomto případě máme

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{pro } 1 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{pro } n > s \end{cases}.$$

Možná interpretace tohoto procesu je následující. Předpokládejme, že zákazníci přijíždí k benzinové pumpě s $s$ stojany podle Poissonova procesu s intenzitou $\lambda$. Každý zákazník jede ihned ke stojanu, pokud je některý volný. Pokud ne, postaví se do fronty. Když zákazník ukončí čerpání, opustí systém a první zákazník v řadě, pokud nějaký je, přijede ke stojanu. Předpokládejme, že časy obsluhy jsou exponenciální se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Pokud je $X(t)$ počet zákazníku v systému, pak jde o proces zrodu a zániku s uvedenými parametry.

Lineární model růstu s migrací odpovídá procesu, pro který platí

$$\mu_n = n\mu,$$

$$\lambda_n = n\lambda + \theta.$$

Každý jednotlivec rodí s intenzitou $\lambda$. Migraci popisuje parametr $\theta$, zánik probíhá s intenzitou $\mu$.

## 5.3 Kolmogorovova rovnice

Našim základním objektem jsou přechodové pravděpodobnosti

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i).$$

**Lemma 5.3.1.** *Platí*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = v_i$$

*a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}.$$

Dále máme

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Odtud plyne

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t),$$

neboli

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - (1 - P_{ii}(h)) P_{ij}(t).$$

Vydělením $h$ a limitním přechodem pro $h \to 0$ dostaneme s využitím předchozího lemmatu

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k \neq i} \frac{P_{ij}(h)}{h} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Tak dostáváme následující tvrzení.

**Věta 5.3.2.** *(Kolmogorovova zpětná rovnice) Pro všechna* $i, j$, *a* $t \geq 0$ *platí*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

# Kapitola 6

# Poissonův proces

## 6.1 Základní vlastnosti Poissonova procesu

**Definice 6.1.1.** *Poissonův proces* s intenzitou $\lambda$ je proces $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ nabývající hodnoty v $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

1. $N(0) = 0$ a pro $s < t$ je $N(s) \leq N(t)$.

2. $\mathrm{P}(N(t+h) = n+m | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 1 \\ o(h) & \text{pro } m > 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 0 \end{cases}.$

3. Je-li $s < t$, pak počet $N(t) - N(s)$ událostí v intervalech $[s, t]$ je nezávislý na $N(s)$, tedy počtu událostí v $[0, s]$.

$N(t) \dots$ počet příchodů, událostí, emisí, do času $t$.
$N$ je takzvaný čítací proces. Je také příkladem Markovského řetězce ve spojitém čase. Zajímá nás rozložení $N(t)$.

**Věta 6.1.2.** *$N(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t$, tedy*

$$\mathrm{P}(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

*Důkaz.* Podmíníme $N(t+h)$ hodnotou $N(t)$:

$$\mathrm{P}(N(t+h)=j) = \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}(N(t+h)=j|N(t)=i)$$

$$= \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}((j-i) \text{ příchodů v čase } (t,t+h))$$

$$= \mathrm{P}(N(t)=j-1)\,\mathrm{P}(1 \text{ příchod}) + \mathrm{P}(N(t)=j)\,\mathrm{P}(\text{žádný příchod}) + o(h).$$

Tedy $p_j(t) = \mathrm{P}(N(t)=j)$ splňuje

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= \lambda h p_{j-1}(t) + (1-\lambda h)\,p_j(t) + o(h) \qquad \text{pro } j \neq 0 \\ p_0(t+h) &= (1-\lambda h)\,p_0(t) + o(h). \end{aligned}$$

V první rovnici odečteme $p_j(t)$, vydělíme $h$ a necháme $h \to 0$. Pak

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t) \text{ pro } j \neq 0 \tag{6.1}$$

a podobně z 2.rovnice

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t).$$

Okrajové podmínky jsou

$$p_j(0) = \delta_{j0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \\ 0 & \text{pro } j \neq 0. \end{cases}$$

To je systém diferenčně-diferenciálních rovnic pro $p_j(t)$.
Řešení najdeme pomocí generujících funkcí (v proměnné $s$ a s parametrem $t$). Definujeme

$$G(s,t) = \sum_0^\infty p_j(t) s^j = E(s^{N(t)}).$$

Rovnici (6.1) vynásobíme $s^j$ a sečteme přes $j$. Dostaneme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G,$$

s okrajovou podmínkou $G(s,0)=1$. Řešení je zřejmě

$$G(s,t) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} s^j.$$

□

Uvedeme si ještě důležitou alternativní definici.

**Definice 6.1.3.** Nechť $T_0, T_1, \dots$ jsou dány vztahem

$$T_0 = 0, \; T_n = \inf\{t : N(t) = n\}.$$

Pak $T_n$ se nazývá čas $n$-tého příchodu.

**Definice 6.1.4.** Definujeme časy mezi příchody (inter-arrival times), jako náhodné veličiny

$$X_n = T_n - T_{n-1}.$$

Ze znalosti $N(t)$ umíme najít hodnoty $X_n$. Naopak, z $X_n$ lze zrekonstruovat $N(t)$ pomocí

$$T_n = \sum_1^n X_i; \quad N(t) = \max\{n; T_n \leq t\}.$$

**Věta 6.1.5.** *Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé a mají exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda$.*

**Připomenutí:** Náhodná veličina $X$ má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže její distribuční funkce je

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad x \geq 0. \tag{6.2}$$

Uvažujme Bernoulliho pokusy v časech $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots$ a nechť $W$ je čas čekání na první úspěch. Pak

$$\mathrm{P}(W > k\delta) = (1-p)^k \quad \text{a} \quad \mathrm{E}W = \frac{\delta}{p}.$$

Zvolme $t$ pevně. Do času $t$ jsme udělali přibližně $k = \frac{t}{\delta}$ pokusů. Nechť $\delta \to 0$. Abychom dostali netriviální limitu, musí také $p \to 0$. Nechť $\frac{p}{\delta} \to \lambda$. Pak

$$\mathrm{P}(W > t) = \mathrm{P}\left(W > \left(\frac{t}{\delta}\right)\delta\right) \cong (1 - \lambda\delta)^{\frac{t}{\delta}} \to \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

*Důkaz.* Nejdříve uvažujeme $X_1$:

$$\mathrm{P}(X_1 > t) = \mathrm{P}(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Dále podmíníme $X_2$ hodnotou $X_1$,

$$P(X_2 > t | X_1 = t_1) = P(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t] | X_1 = t_1).$$

Událost $\{X_1 = t_1\}$ se vztahuje k intervalu $[0, t_1]$, zatímco událost "žádný příchod v $[t_1, t_1 + t]$"k času většímu než $t_1$. Z definice Poissonova procesu jsou nezávislé, tedy

$$P(X_2 > t | X_1 = t_1) = P(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t]) = e^{-\lambda t}.$$

Tedy $X_2$ je nezávislá na $X_1$ a má stejné rozdělení. Tvrzení dále plyne indukcí přes $n$. $\square$

## 6.2 Cramér - Lundbergův model

Cramér - Lundbergův model je základním modelem v matematické teorii neživotního pojištění.

**Předpoklady Cramér - Lundbergova modelu:**

1. Pojistné nároky nastávají v časech $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$, což jsou časy příchodu homogenního Poissonova procesu $N(t)$.

2. Pojistný nárok přicházející v i-tém čase $T_i$ má velikost $X_i$. Posloupnost $X_i$ tvoří nezávislé stejně rozdělené nezáporné náhodné veličiny.

3. Posloupnosti $T_i$ a $X_i$ jsou navzájem nezávislé. Tedy i $N(t)$ a $X_i$ jsou nezávislé.

Proces

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

který popisuje celkový pojistný nárok do času $t$, se nazývá *složený Poissonův proces.*

## 6.3 Inspekční paradox

Uvažujme homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda$ a předpokládejme, že se právě nacházíme v pevně daném čase $t$. Přirozená otázka je, jaké má rozdělení doba od posledního příchodu a naopak doba do nejbližšího následujícího příchodu.
Označme

$$B(t) = t - T_{N(t)}$$

čas od posledního příchodu a

$$F(t) = T_{N(t)+1} - t$$

čas do následujícího příchodu.

Zajímá nás sdružené rozdělení náhodných veličin $B(t)$ a $F(t)$. Speciálně, co můžeme na základě znalosti $B(t)$ řici o $F(t)$?

Intuitivně by se mohlo zdát, že čím delší je $B(t)$, tím kratší by mělo být čekání na další příchod. Přesto výpočet sdruženého rozdělení ukazuje, že $B(t)$ a $F(t)$ jsou nezávislé. Tento výsledek se obvykle nazývá *inspekční paradox*.

# Kapitola 7

# Složený Poissonův proces

## 7.1 Moment generující funkce

**Definice 7.1.1.** Stochastický proces $S(t)$ se nazývá složený Poissonův proces, jestliže jej lze zapsat ve tvaru

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{7.1}$$

kde $N(t)$ je Poissonův proces a $X_i$ jsou IID náhodné veličiny, nezávislé na procesu $N(t)$.

**Definice 7.1.2.** *Moment generující funkce* náhodné veličiny $X$ je definována vztahem

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

pro $t \geq 0$.

Je-li $X$ spojitá náhodná veličina s hustotou $f$, pak

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$E\left(X^k\right) = M^{(k)}(0).$$

Opravdu, derivujme integrál podle parametru,

$$M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)\, dx,$$

tedy

$$M'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = E(X).$$

Analogicky, $k$-násobným derivováním dostaneme

$$M^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x)\, dx.$$

Tedy

$$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right).$$

Chceme spočítat moment generující funkci složeného Poissonova procesu. Z věty o celkovém očekávání dostaneme

$$E\left(e^{tX}\right) = \exp(\lambda t(\psi_X(t) - 1)). \tag{7.2}$$

Derivováním moment generující funkce získáme pro momenty následující vztahy.

**Věta 7.1.3.** *Pro očekávání složeného Poissonova procesu platí*

$$E(S(t)) = \lambda t E(X_1) \tag{7.3}$$

*a pro jeho rozptyl*

$$Var(S(t)) = \lambda t E(X_1^2). \tag{7.4}$$

## 7.2 Vlastnosti exponenciálního rozdělení

**Definice 7.2.1.** Spojitá náhodná veličina má exponenciální rozdělení, jestliže její hustota je dána vztahem

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{7.5}$$

pro $x \geq 0$ a je rovna nule jinak.

Distribuční funkce exponenciálního rozdělení je tedy

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{7.6}$$

pro $x \geq 0$, a rovna nule jinak.

Moment generující funkce exponenciálního rozdělení je dána vztahem

$$E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{\lambda t} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}. \tag{7.7}$$

Momenty náhodné veličiny $X$ můžeme získat derivováním moment generující funkce. Tím dostaneme

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \tag{7.8}$$

a

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{7.9}$$

Jednou z hlavních vlastností exponenciálního rozdělení je to, že nemá paměť. Platí totiž

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}. \tag{7.10}$$

Je-li například $X$ životnost dané součástky, pak předchozí vztah říká, že pravděpodobnost, že součástka bude fungovat alespoň $s + t$ hodin, za podmínky že již funguje $t$ hodin, je stejná jako počáteční pravděpodobnost že bude fungovat alespoň $s$ hodin.

## 7.3 Vlastnost absence paměti

Exponenciální rozdělení je jediné rozdělení které nemá paměť. Dokážeme to následovně. Nechť

$$\tilde{F} = P\{X > x\}. \tag{7.11}$$

Pak platí

$$\tilde{F}(s + t) = \tilde{F}(s)\tilde{F}(t). \tag{7.12}$$

Jinak řečeno, $\tilde{F}$ splňuje funkcionální rovnici

$$h(s + t) = h(s)h(t). \tag{7.13}$$

Dokážeme teď, že jediná zprava spojitá řešení této rovnice mají tvar odpovídající exponenciálnímu rozdělení.

Ze vztahu

$$h(s+t) = h(s)h(t) \tag{7.14}$$

máme

$$h(\frac{2}{n}) = h(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = h^2(\frac{1}{n}). \tag{7.15}$$

Opakováním stejného argumentu dostaneme

$$h(\frac{m}{n}) = h^m(\frac{1}{n}). \tag{7.16}$$

Dále platí

$$h(1) = h(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = h^n(\frac{1}{n}). \tag{7.17}$$

Odtud

$$h(\frac{m}{n}) = h(1)^{\frac{m}{n}} \tag{7.18}$$

a dále

$$h(x) = h(1)^x, \tag{7.19}$$

protože $h$ je pospojitá zprava. Platí

$$h(1) = h^2(\frac{1}{2}) \geq 0, \tag{7.20}$$

a tedy

$$h(x) = e^{-\lambda x}, \tag{7.21}$$

kde $\lambda = -\ln g(1)$. Musí tedy platit

$$\tilde{F}(x) = e^{\lambda x}, \tag{7.22}$$

protože distribuční funkce je zprava polospojitá.

## 7.4 Míra rizika

Mějme spojitou náhodnou veličinu $X$ s distribuční funkcí $F$ a hustotou $f$.

**Definice 7.4.1.** Funkce míry rizika je definována jako

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\tilde{F}(t)}. \tag{7.23}$$

Představme si, že sledujeme životnost nějaké součástky, a předpokládejme, že součástka již funguje $t$ hodin. Chceme spočítat pravděpodobnost, že nevydrží další časový úsek $dt$, tedy

$$P\{X \in (t, t+dt) | X > t\}. \tag{7.24}$$

Máme

$$P\{X \in (t, t+dt) | X > t\} = \frac{X \in (t, t+dt), X > t}{P(X > t)}, \tag{7.25}$$

což je rovno

$$\frac{X \in (t, t+dt)}{P(X > t)} \simeq \frac{f(t)dt}{\tilde{F}(t)} \tag{7.26}$$

$$= \lambda(t)dt. \tag{7.27}$$

Tedy $\lambda(t)$ reprezentuje intenzitu pravděpodobnosti, že $t$-letá součástka přestane fungovat.

Je-li rozdělení exponenciální, pak z vlastnosti absence paměti je rozdělení stejné jako počáteční, tedy $\lambda$ je konstantní. To můžeme ověřit i přímým výpočtem,

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \tag{7.28}$$

Míra rizika pro exponenciální rozdělení je tedy konstantní.

Ukážeme ještě, že míra rizika naopak jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení. Opravdu, máme

$$\lambda(t) = \frac{-\frac{d}{dt}\tilde{F}(t)}{\tilde{F}(t)}. \tag{7.29}$$

Integrováním dostaneme

$$\ln \tilde{F}(t) = -\int_0^t \lambda(s)ds + k, \tag{7.30}$$

tedy

$$\tilde{F}(t) = ce^{\int_0^t \lambda(s)ds}. \tag{7.31}$$

Pro $t = 0$ dostaneme $c = 1$. Celkem tedy

$$\tilde{F}(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)ds}. \tag{7.32}$$

## 7.5 Příklady

**Příklad 7.5.1.** Mouchy a vosy přilétají na talíř jako nezávislé Poissonovy procesy s intenzitou $\lambda$ a $\mu$. Ukažte, že přílet hmyzu na talíř je dán Poissonovým procesem s intenzitou $\lambda + \mu$.

**Příklad 7.5.2.** Hmyz přilétá na talíř jako Poissonův proces s intenzitou $\lambda$ a má zelenou barvu s pravděpodobností $p$, nezávisle na barvě ostatního hmyzu. Ukažte, že přílety zeleného hmyzu se řídí Poissonovým procesem s intenzitou $p\lambda$.

# Kapitola 8

# Procesy obnovy

## 8.1 Rozdělení počtu příchodů

Jak jsme viděli v předchozí kapitole, časy mezi příchody pro Poissonův proces tvoří nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Přirozené zobecnění Poissonova procesu dostaneme tak, že budeme uvažovat namísto exponenciálního libovolné rozdělení.

**Definice 8.1.1.** Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezáporných nezávislých náhodných veličin se stejnou distribuční funkcí $F$. Hodnoty $X_1, X_2, \ldots$ reprezentují časy mezi jednotlivými událostmi. Označme

$$\mu = E[X_j]$$

střední hodnotu času mezi jednotlivými událostmi. Položme

$$S_0 = 0$$

a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Tedy $S_n$ je čas $n$-té události.

Zajímá nás počet událostí, které nastaly do času $t$. Ten se rovná největší hodnotě $n$ takové, že $n$-tá událost nastala před nebo přesně v čase $t$, tedy

$$N(t) = sup\{n|S_n \leq t\}.$$

Protože časy mezi příchody jsou nezávislé a stejně rozdělené, při každém příchodu začíná z pravděpodobnostního hlediska proces znovu.

Základní vztah pro odvození pravděpodobnosti rozdělení počtu příchodů vychází z následujícího faktu:

Počet událostí které nastaly do času $t$ je větší nebo roven $n$ právě tehdy, když $n$-tý příchod nastal do času $t$. Tedy

$$N(t) \geq n \equiv S_n \leq t.$$

Odtud dostaneme

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1)$$

$$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t).$$

Protože náhodné veličiny $X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené s distribuční funkcí $F$, má $S_n$ rozdělení dané $n$-násobnou konvolucí $F$ samo se sebou,

$$F_n = F * F * \cdots * F.$$

Dostaneme tedy

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Nechť

$$m(t) = E[N(t)].$$

Pak $m(t)$ se nazývá funkce obnovy. Zajímají nás její vlastnosti.

**Věta 8.1.2.** *Platí*

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

**Důkaz:** Máme

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

kde

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud n-tá událost nastala do času } t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Tedy

$$E(N(t)) = E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n]$$

a z linearity

$$E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n].$$

Dále z vlastnosti indikátorové funkce máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P(I_n = 1).$$

To je rovno

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

což jsme chtěli dokázat.

# Kapitola 9

# Diskrétní modely ve finanční matematice

V této kapitole se budeme věnovat 1-krokovým a vícekrokovým diskrétním modelům finančního trhu. Jak uvidíme, vícekrokový (binomický) model je založen na jednoduché náhodné procházce.

## 9.1 1-krokový model

Uvažujeme jednu pevně zvolenou akcii a předpokládejme, že

– v čase $t = 0$ je cena akcie $S_0$ známá hodnota,

– v čase $t = 1$ je cena akcie $S_1$ náhodná veličina (neznámá hodnota).

Hodnota $S_1(\omega)$ je funkcí tržního scénáře $\omega \in \Omega$, kde

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$$

je prostor tržních scénářů.

Dále předpokládejme, že existuje bezrizikové aktivum, jehož hodnota v čase $t = 0$ je rovna 1 a v čase $t = 1$ je rovna $e^r$ za všech tržních scénářů. Hodnota $r$ se nazývá bezriziková úroková míra. Předpokládáme, že úroková míra je stejná jak pro půjčování, tak pro ukládání peněz.

**Příklad 9.1.1.** ***Forwardová smlouva*** (uzavřená v čase $t = 0$) je následující závazný kontrakt: V čase $t = 1$ koupí $X$ od $Y$ jednu akcii za cenu $F$. Za uzavření smlouvy se neplatí. Jaká je "správná" cena $F$?

**Věta 9.1.2.** *Jestliže neexistuje arbitráž, pak jediná možná cena ve forwardové smlouvě je*

$$F = S_0 e^r.$$

Arbitráží je míněna možnost, jak si bez rizika zajistit zisk “z ničeho”. Přesnou definici si uvedeme za chvilku.

**Důkaz:** Dokážeme, že jak $F > S_0 e^r$, tak $F < S_0 e^r$ vede k arbitráži.

1) Nechť $F > S_0 e^r$ (výhodné pro $Y$). Uvažujme následující strategii:

$t = 0$ ... $Y$ si vypůjčí v bance $S_0$, koupí akcii a uzavře forwardovou smlouvu na prodej akcie.

$t = 1$ ... $Y$ prodá akcii za $F$, do banky vrátí $S_0 e^r$.

Zůstane mu bezrizikový zisk $F - S_0 e^r > 0$, strategie tedy dává arbitráž.

2) Nechť $F < S_0 e^r$ (výhodné pro $X$). Uvažujme teď tuto strategii:

$t = 0$ ... $X$ prodá akcii na krátko (tedy vypůjčí si akcii – tzv. short-selling) za $S_0$, uloží výnos do banky a uzavře forwardovou smlouvu na koupi akcie.

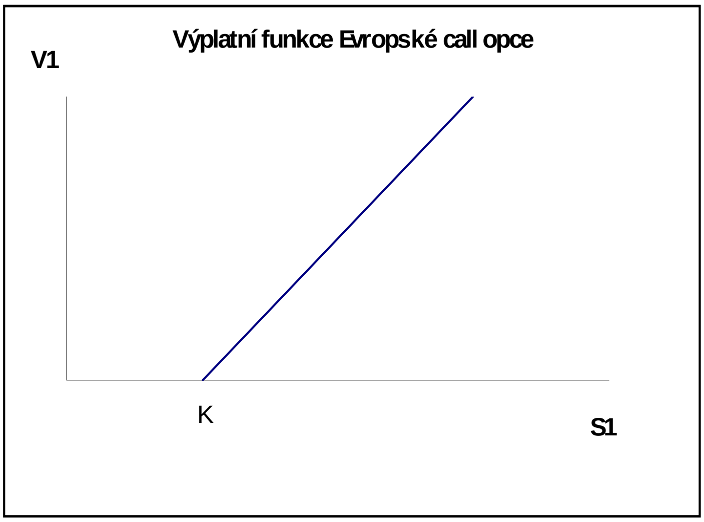
$t = 1$ ... $X$ dostane z banky $S_0 e^r$, koupí akcii za $F$ a vrátí ji (tj. uzavře krátkou pozici). Zůstane mu $S_0 e^r - F > 0$, tj. bezrizikový zisk. Opět je to arbitráž.

Tedy pokud neexistuje arbitráž, pak $F = S_0 e^r$.

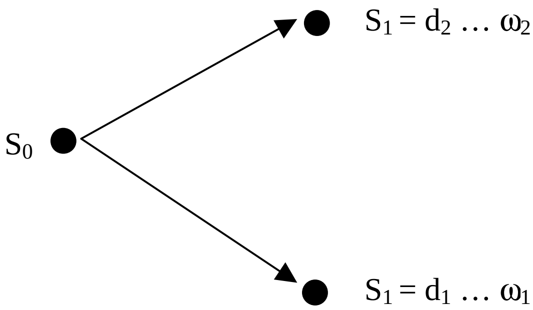
**Příklad 9.1.3.** ***Evropská call opce*** dává držiteli právo koupit akcii v čase $t = 1$ za cenu $K$ (tzv. realizační cena opce). Kupec opce zaplatí v čase $t = 0$ za toto právo prodejci cenu $V_0$. Jaká je férová cena $V_0$?

V čase $t = 0$ neznáme $S_1$. Držitel opce ji v čase $t = 1$ uplatní, je-li $K < S_1$ (jinak koupí akcii levněji na trhu). Tedy hodnota v čase $t = 1$ je

$$V_1 = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & \text{pokud}\, S_1 > K \\ 0 & \text{pokud}\, S_1 \le K \end{cases}.$$




Jaká je hodnota $V_0$? Předpokládejme, že existují dva možné tržní scénáře $(\omega_1, \omega_2)$ a nechť pro $t = 1$ máme $S_1(\omega_1) = d_1$ a $S_1(\omega_2) = d_2$.




Chceme určit $V_0$ za předpokladů

1. $d_1 < K < d_2$
2. $d_1 \leq S_0 e^r \leq d_2$

(pro $S_0 e^r < d_1 \leq d_2$ dostaneme arbitráž a stejně tak v opačném případě). Uvažujme portfolio $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, kde $x_1$ je počet aktiv peněžního trhu (bezrizikových), $x_2$ je počet akcií a $x_3$ počet opcí.

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře $\omega_1$ je

$$y_1 = x_1 e^r + x_2 d_1 + 0 x_3$$

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře $\omega_2$ je

$$y_2 = x_1 e^r + x_2 d_2 + (d_2 - K) x_3$$

Zobrazení $T : (x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které má nenulové jádro dimenze 1.

Tedy pro portfolio (0, 0, 1) existuje jednoznačné portfolio $(x_1, x_2, 0)$, které má stejnou hodnotu jako (0, 0, 1) v obou scénářích (tzv. replikující portfolio).

Hodnoty $x_1$ a $x_2$ najdeme řešením rovnic

$$x_1 e^r + x_2 d_1 = 0$$

pro $V_1(\omega_1)$ a

$$x_1 e^r + x_2 d_2 = d_2 - K$$

pro $V_1(\omega_2)$.

Řešením dostaneme

$$x_1 = \frac{-d_1 e^{-r} (d_2 - K)}{d_2 - d_1}$$

a

$$x_2 = \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1}.$$

Portfolio $(x_1, x_2, 0)$ má stejnou hodnotu jako (0, 0, 1) v každém scénáři. Musí mít tedy stejnou hodnotu i v čase $t = 0$ (jinak by existovala arbitráž).

Tedy

$$V_0 = -e^{-r}\frac{d_1(d_2-K)}{d_2-d_1}1 + \frac{d_2-K}{d_2-d_1}S_0 = (d_2-K)\left(\frac{e^rS_0-d_1}{d_2-d_1}\right)e^{-r}+0$$

$$= e^{-r}(V_1\left(\omega_2\right)p + V_1\left(\omega_1\right)(1-p)),$$

kde $V_1\left(\omega_1\right) = 0$, $e^{-r}$ je diskontní faktor a

$$p = \frac{e^rS_0-d_1}{d_2-d_1}$$

se nazývá “tržní” (risk-neutrální, rovnovážná) pravděpodobnost scénáře $\omega_2$.

Tedy $V_0$ je diskontované očekávání hodnoty opce v čase $t = 1$ vzhledem k tržní pravděpodobnostní míře.

## 9.2 Základní věta APT

APT označuje arbitrážní teorii oceňování (Arbitrage Pricing Theory). Uvažujme trh s $K$ aktivy $A^1$, ..., $A^K$ volně obchodovatelnými, kde $A^1$ je bezrizikové aktivum. Cena podílu aktiva $A^j$ v čase $t = 0$ je $S_0^j$ (známá hodnota).

Dále máme tržní scénáře

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}.$$

Předpokládejme, že $A^1$ je bezrizikové, tj.

$$S_1^1(\omega_j) = e^r$$

pro všechna $j = 1, ..., N$, kde $r$ je úroková míra.

$S_1^j\left(\omega_i\right)$ bude označovat hodnotu aktiva $A^j$ v čase $t = 1$ za scénáře $\omega_i$. Jsou to tedy náhodné veličiny, neboli funkce na prostoru tržních scénářů $\Omega$.

Celkem dostáváme matici $N \times K$ s prvky $S_1^j\left(\omega_i\right)$.

**Definice 9.2.1.** ***Portfolio*** je vektor

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K) \in \mathbb{R}^K,$$

kde $\theta_j$ je počet podílů aktiva $A^j$ v portfoliu. Pro $\theta_j < 0$ je majitel v krátké pozici v aktivu $A^j$ (o velikosti $\mid \theta_j \mid$). V čase $t = 0$ je hodnota $\Theta$ rovna

$$V_0\left(\Theta\right) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Pro $t = 1$ závisí hodnota $\Theta$ na $\omega_i$,

$$V_1\left(\Theta,\, \omega_i\right) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j\left(\omega_i\right).$$

**Definice 9.2.2.** ***Arbitráž*** je portfolio, které "získává peníze z ničeho", tj. formálně buď

$$V_0\left(\Theta\right) \leq 0 \quad \text{a} \quad V_1\left(\Theta,\, \omega_j\right) > 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$, nebo

$$V_0\left(\Theta\right) < 0 \quad \text{a} \quad V_1\left(\Theta,\, \omega_j\right) \geq 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$.

**Definice 9.2.3.** Pravděpodobnostní míra $\pi_i = \pi(\omega_i)$ na množině $\Omega$ všech scénářů je ***rovnovážná pravděpodobnostní míra*** (neboli risk-neutrální míra), jestliže pro všechna $A^j$ je hodnota podílu v čase $t = 0$ rovna diskontovanému očekávání vzhledem k pravděpodobnostní míře $\pi$ hodnoty podílu v čase $t = 1$. Tedy

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 1, ..., K$, kde $e^{-r}$ je diskontní faktor.

**Věta 9.2.4.** ***(Základní věta APT)****: Rovnovážná pravěpodobnostní míra existuje právě tehdy, když neexistuje arbitráž.*

**Důkaz:**

Implikace $\Rightarrow$ je snadná. Jestliže existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra $\pi$ a $\Theta$ je portfolio, jehož hodnota v čase $t = 1$ je $\geq 0$ za všech scénářů, pak

$$V_0(\Theta) = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) V_1(\Theta, \omega_i) \geq 0,$$

odkud plyne že $\Theta$ není arbitráž (a arbitráž tedy neexistuje).

Nyní chceme dokázat opačnou implikaci: Neexistuje-li arbitráž, pak existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra taková, že

$$S_0^j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)S_1^j(\omega_i).$$

Pro $j = 1$ platí tento vztah automaticky,

$$\begin{aligned}1 = S_0^1 &= e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)e^r\\ &= e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)S_1^1(\omega_i).\end{aligned}$$

Uvažujme nyní $2 \leq j \leq K$. Označme $\varepsilon$ množinu všech vektorů tvaru $y = (y_2, ..., y_K)$, kde

$$y_j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 2, 3, ..., K$, pro nějakou pravděpodobnostní míru $\pi$.

$\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{K-1}$ je uzavřený konvexní polyedr. Je konvexním obalem svých extrémních bodů, které odpovídají pravděpodobnostem $\pi(\omega_i) = 1$, $\pi(\omega_j) = 0$ pro $j \neq 0$.

Chceme dokázat, že neexistuje-li arbitráž, pak

$$S = \left(S_0^2, ..., S_0^K\right) \in \varepsilon.$$

Jinak řečeno, pokud $S \notin \varepsilon$, pak existuje arbitráž. Využijeme větu o oddělující nadrovině.

**Věta 9.2.5.** *(Věta o oddělující nadrovině:) Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina a $x \notin F$. Pak existuje $v \in \mathbb{R}^n$ tak, že $v \cdot x < v \cdot y$ pro všechna $y \in F$, kde $\cdot$ je skalární součin.*

**Důkaz:** Nechť $a$ je nejbližší bod v $F$ k bodu $x$, pak vektor $a - x$ má hledané vlastnosti.

Podle této věty máme

$$S \notin \varepsilon \Rightarrow \exists \Theta^\star = (\theta_2, ..., \theta_K) \neq 0$$

tak, že pro všechna $y \in \varepsilon$ platí:

$$y \cdot \Theta^\star > S \cdot \Theta^\star.$$

$\varepsilon$ obsahuje extrémní body, tedy pro všechna $i$ platí:

$$e^{-r}\sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_1^j(\omega_i) > \sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_0^j.$$

Levou stranu nerovnosti označme $C_i$, pravou stranu $D$. Ukážeme, že existuje arbitráž.

Zvolme $\theta_1$ tak, aby $C_i > \theta_1 > D$ pro všechna $i$. Pak portfolio $(-\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je arbitráž. Jeho hodnota v čase $t = 0$ je $< 0$ a hodnota v čase $t = 1$ je $> 0$ pro všechna $\omega_i$.

Uvažujeme evropskou call opci, jejíž výplatní funkce je

$$V_1 = (S_1 - K)_+.$$

Dále $S_1(\omega_i) = d_i$ pro $i = 1, 2$ a $d_1 < d_2$. Pokud neexistuje arbitráž, pak existuje $\pi$ taková, že cena akcie v $t = 0$ je diskontované očekávání

$$S_0 = e^{-r} \cdot (\pi(\omega_1) \cdot d_1 + \pi(\omega_2) \cdot d_2),$$

a navíc víme, že $\pi(\omega_1) + \pi(\omega_2) = 1$. Speciálně tedy platí $d_1 < S_0 e^r < d_2$ (v předchozím to byl předpoklad, teď to platí automaticky).

Dostaneme

$$\pi(\omega_1) = \frac{d_2 - S_0 e^r}{d_2 - d_1}$$

a

$$\pi(\omega_2) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Je-li opce volně obchodovatelná a má-li zůstat trh bez arbitráže, musí totéž platit i pro opci, tedy:

$$V_0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) + \pi(\omega_1)0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}(d_2 - K).$$

### 9.2.1 Jištění (Hedging)

Uvažujme aktiva $A^1$, $A^2$, ..., $A^K$, $B$. Nechť $S_t^j(\omega_i)$ a $S_t^B(\omega_i)$ jsou ceny $A^j$, resp. $B$, v čase $t$ a scénáři $\omega_i$, kde $t = 0, 1$.

**Definice 9.2.6.** Portfolio $\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je ***replikující portfolio*** pro $B$, jestliže

$$S_1^B(\omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $i = 1, ..., N$.

**Věta 9.2.7.** *Nechť $\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je replikující portfolio pro $B$. Neexistuje-li arbitráž, pak v čase $t = 0$ platí:*

$$S_0^B = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

**Důkaz:** Nechť tvrzení neplatí. Je-li $S_0^B > \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$, pak portfolio $(-1, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ v aktivech $B$, $A^1$, $A^2$, ..., $A^K$ je arbitráž, protože

$$\sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j - S_0^B < 0$$

a

$$S_1^B(\omega_i) - \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro všechna $\omega_i \in \Omega$.

Analogicky, pro

$$S_0^B < \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$$

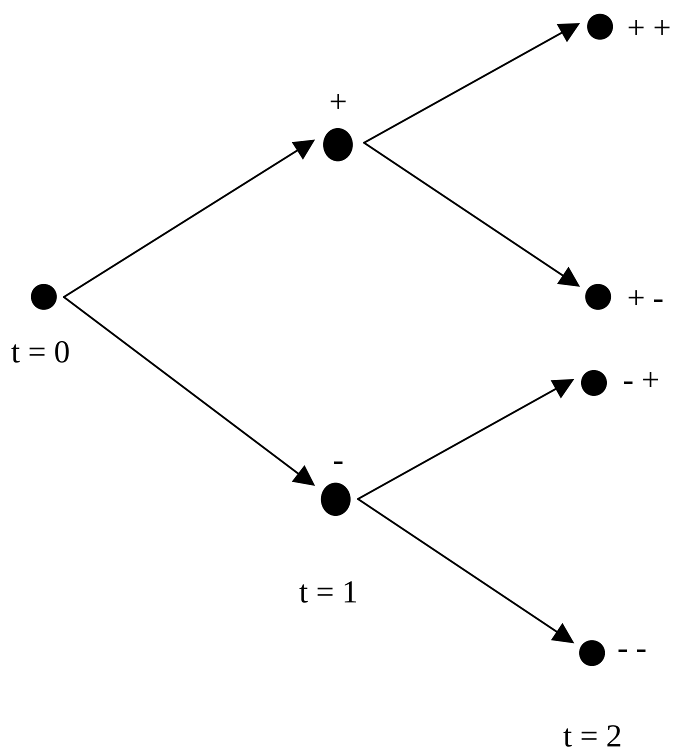
vezmeme opačné portfolio.

## 9.3 Model s více periodami

### 9.3.1 Trh se dvěma periodami

Uvažujme jedno bezrizikové aktivum a jednu rizikovou akcii. Tržní scénáře jsou nyní

$$\Omega = \{(++)\,, (+-)\,, (-+)\,, (--)\}\,.$$




Předpokládejme, že

$$S_1(+) = uS_0$$
$$S_1(-) = dS_0$$
$$S_2(++) = uS_1(+) = u^2S_0$$
$$S_2(+-) = dS_1(+) = udS_0$$
$$S_2(-+) = uS_1(-) = duS_0$$
$$S_2(--) = dS_1(-) = d^2S_0$$

($u$ jako up a $d$ jako down). Máme tři částečné trhy. V každém uděláme stejný výpočet jako v jednokrokovém modelu. Dostaneme rovnovážné pravděpodobnosti (pro jednoduchost předpokládejme, že $r = 0$),

$$p_u = \frac{1-d}{u-d}$$

($S_0$ se vykrátí) a

$$p_d = \frac{u-1}{u-d}.$$

Celkem rovnovážná pravděpodobnostní míra bude:

$$P(++) = p_u^2, \quad P(--) = p_d^2, \quad P(+-) = P(-+) = p_u p_d.$$

### 9.3.2 Vícekrokový model s $T$ kroky

Množina všech možných scénářů je v tomto případě

$$\Omega = \{(+,+,+,...,+), (+,+,...,+,-), ..., (-,-,...,-)\}.$$

Má $2^T$ prvků, je tedy $2^T$ možných scénářů.

Pro scénář $\omega \in \Omega$ je jeho rovnovážná pravděpodobnost

$$P(\omega) = p_u^K p_d^{T-K},$$

kde $K$ je počet $+$ ve scénáři $\omega$.

Chceme-li ocenit opci, její cena bude diskontované očekávání její hodnoty v čase $T$

$$V_T = (S_T - K)_+$$

vůči rovnovážné pravděpodobnostní míře. Pro jednoduchost uvažujme $r = 0$. Nechť $m$ je nejmenší přirozené číslo takové, že $S_0 u^m d^{T-m} \geq K$. Máme tedy

$$V_0 = \sum_{n=m}^{T} p_u^n p_d^{T-n} \binom{T}{n} \left( S_0 u^n d^{T-n} - K \right)$$

$$= \sum_{n=m}^{T} \frac{(1-d)^n (u-1)^{T-n}}{(u-d)^T} \binom{T}{n} \left( S_0 u^n d^{T-n} - K \right),$$

kde $\binom{T}{n}$ je počet trajektorií s celkem $n$ plusy.

**Poznámka.** Položíme-li $d = \frac{1}{u}$, pak v limitě pro $T \to \infty$ a $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{T}}}$ dostaneme Black-Scholesův spojitý model pro oceňování opcí. $\sigma$ je parametr nazývaný volatilita.

Model, který jsme uvažovali v této podkapitole, se také často nazývá binomický. Jeho autory jsou Cox, Ross a Rubinstein.

## 9.4 Příklady

**Příklad 9.4.1.** Najděte cenu evropské call opce při daných hodnotách

$$S_0 = 100,\ r = 0,\ S_1(\omega_1) = 110,\ S_1(\omega_2) = 95,\ K = 105$$

**Příklad 9.4.2.** Najděte cenu evropské put opce při daných hodnotách

$$S_0 = 40,\ r = 0,\ S_1(\omega_1) = 50,\ S_1(\omega_2) = 35,\ K = 45$$

**Příklad 9.4.3.** Najděte horní a dolní odhad pro cenu evropské call opce v neúplném trhu se třemi scénáři, při daných hodnotách

$$S_0 = 10,\ r = 0,\ S_1(\omega_1) = 12,\ S_1(\omega_2) = 11,\ S_1(\omega_3) = 9,\ K = 10$$

# Kapitola 10

# Martingaly

## 10.1 Férová hra

Martingal je matematickým vyjádřením myšlenky "férové hry".

Implicitně jsme se s tímto pojmem již setkali, v kapitole o diskrétních modelech trhu.

Připomeňme, že v jednokrokovém modelu trhu se dvěma scénáři existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra $P$ a platí

$$S_0 = e^{-r} E_P\left(S_1\right) = E_P\left(e^{-r} S_1\right).$$

Tedy cena v čase $t = 0$ je diskontované očekávání vzhledem k pravděpodobnosti $P$ ceny v čase $t = 1$.

Obecně, pro $T$-krokový model máme analogicky

$$S_0 = E_P\left(S_T e^{-rT}\right).$$

Navíc, pro libovolný čas $t \leq T$ platí

$$S_t = E_P\left(S_T e^{-r(T-t)} \mid S_0, S_1, ..., S_t\right),$$

tedy $S_t$ je podmíněné očekávání diskontované hodnoty $S_T$, podmíněné informacemi o tržním scénáři, které máme v čase $t$.

Jak uvidíme za chvilku, tato vlastnost znamená, že diskontovaný proces $S_t$ je martingal.

Připomeňme si ještě formální definici stochastického procesu.

**Definice 10.1.1.** Mějme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a indexovou množinu $T \neq \emptyset$ (která hraje roli času). Dále mějme zobrazení $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $t \in T$ je $X(\bullet, t)$ náhodná veličina (kterou značíme $X_t$). Pak takové zobrazení nazýváme ***stochastický proces*** definovaný na množině $T$. Značíme $\{X_t;\, t \in T\}$.

Stochastické procesy dělíme na 4 základní typy:

- diskrétní proces s diskrétním časem (např. náhodná procházka)
- diskrétní proces se spojitým časem (např. Poissonův proces)
- spojitý proces s diskrétním časem (např. Markovovy řetězce)
- spojitý proces se spojitým časem (např. Wienerův proces)

## 10.2 Přirozená filtrace

**Definice 10.2.1.** Ve vícekrokovém trhu se informace o tržním scénáři odhaduje krok po kroku. Pro $t \leq T$ definujeme

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechny jevy určené během prvních } t \text{ period}\}\,.$$

Zřejmě $\mathcal{F}_t$ je $\sigma$-algebra. Konečná posloupnost $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ se nazývá ***přirozená filtrace*** prostoru tržních scénářů $\Omega$.

Obecně, systém $\sigma$-algeber $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ se nazývá ***filtrace***, jestliže platí

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$$

kdykoliv je $t \leq s$. To znamená, že s rostoucím časem neztrácíme informace, $\sigma$-algebra se s rostoucím časem nezmenšuje, typicky se naopak zvětšuje.

**Příklad 10.2.2. 2-krokový model trhu**. Množina tržních scénářů v tomto modelu je

$$\Omega = \{(++)\,, (+-)\,, (-+)\,, (--)\}\,.$$

V čase $t = 0$ jsou určeny pouze jevy $\Omega$ a $\emptyset$, tedy

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \, \Omega\} \, .$$

V čase $t = 1$ jsou určeny jevy: $F_+ = \{(++) \, , \, (+-)\}$ a $F_- = \{(-+) \, , \, (--)\}$. Tedy

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \, \Omega, \, F_+, \, F_-\} \, .$$

V čase $t = 2$ jsou určeny všechny jevy (každá podmnožina $\Omega$), tedy

$$\mathcal{F}_2 = \exp \Omega = \{ \text{ všechny podmnožiny } \Omega\} \, .$$

**Příklad 10.2.3.** ***T*- krokový model.** Množina $\Omega_T$ tržních scénářů je množina posloupností délky $T$ se složkami + nebo -. Celkem je takových scénářů $2^T$.

Částečný scénář je posloupnost

$$\xi = (\xi_1, \, \xi_2, \, ..., \, \xi_t)$$

délky $t \leq T$, kde $\xi_j = +$ nebo $\xi_j = -$ pro $j = 1, \, 2, \, ..., \, t$. Množinu těchto scénářů označme $\Omega_t$.

Pro každý částečný scénář $\xi = (\xi_1, \, ..., \, \xi_t)$ definujeme jev $F(\xi)$ jako množinu všech úplných scénářů, jejichž prvních $t$ složek jsou právě $\xi_1, \, ..., \, \xi_t$. Tedy

$$F(\xi) = \{\omega \in \Omega : \, \omega_j = \xi_j \text{ pro všechna } j = 1, \, 2, \, ..., \, t\} \, .$$

Úplné scénáře odpovídají koncovým uzlům stromu, částečné pak nekoncovým. $\sigma$-algebry $\mathcal{F}_t$ definujeme pak takto:

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechna konečná sjednocení jevů } F(\xi) \, , \text{ kde } \xi{=}(\xi_1, \xi_2, ..., \ \xi_t) \in \Omega_t\}$$

Cena akcie v čase $t$ závisí na tržním scénáři, ale jen na jeho složkách do času $t$, nezávisí na složkách scénáře v časech $> t$. Tedy proces ceny je adaptovaný přirozené filtraci, ve smyslu následující definice.

**Definice 10.2.4.** Posloupnost náhodných veličin $X_t$ je ***adaptovaná přirozené filtraci***, jestliže pro každé $t$ a pro každý tržní scénář $\omega = \xi_1, \, ..., \, \xi_T$ hodnota $X_t(\omega)$ závisí jen na částečném scénáři $\xi_1, \, \xi_2, \, ..., \, \xi_t$.

## 10.3 Martingal

**Definice 10.3.1.** Nechť $\mathcal{F}$ je přirozená filtrace prostoru tržních scénářů $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ a $P$ je pravděpodobnostní míra na $\Omega$. Adaptovaná posloupnost náhodných veličin $X_t$ se nazývá ***martingal***, jestliže platí

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = X_t$$

pro všechna $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$.

Pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \geq X_t,$$

mluvíme o ***submartingalu***, pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \leq X_t,$$

mluvíme o ***supermartingalu***.

$\mathcal{F}_t$ obsahuje veškeré informace dostupné v čase $t$. Často je tato informace obsažena v hodnotách $X_1, X_2, ..., X_t$. Pak máme

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(X_{t+1} \mid X_1, X_2, ..., X_t\right).$$

**Příklad 10.3.2.** (Symetrická jednoduchá náhodná procházka). Nechť $P\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} = P\left(X_i = -1\right)$ a $S_n = X_1 + ... + X_n$. Pak $S_n$ je martingal.

## 10.4 Samofinancující portfolia

### 10.4.1 Dynamické portfolio

Uvažujme $T$-krokový model trhu s aktivy $A^1, A^2, ..., A^K$. Označme $S_t^A(\omega)$ cenu podílu aktiva $A$ v čase $t$ ve scénáři $\omega$ a $\Theta_t^A(\omega)$ počet podílů aktiva $A$, které držíme v portfoliu $\Theta$ v čase $t$ za scénáře $\omega$.

Posloupnost $\Theta_t^A$ musí být adaptovaná přirozené filtraci. Dynamické portfolio je ***omezené***, jestliže náhodné veličiny $\Theta_t^A$ jsou všechny omezené.

### 10.4.2 Samofinancující portfolio

Hodnota portfolia $\Theta$ po rebalancování (upravení) v čase $t$ za scénáře $\omega$ je

$$V_t^{\Theta} = V_t^{\Theta}(\omega) = \sum_A \Theta_t^A(\omega)\, S_t^A(\omega),$$

kde sčítáme přes všechna aktiva $A = A^1$, $A^2$, ..., $A^K$.

Hodnota $V_{t+1}^{\Theta}$ po proběhnutí obchodování v čase $t$ bude obecně jiná, než $V_t^{\Theta}$.

Pokud do portfolia nepřidáváme ani neodebíráme prostředky, musí být jeho hodnota těsně po rebalancování stejná jako před rebalancováním. Tedy platí

$$\sum \Theta_t^A S_{t+1}^A(\omega) = \sum \Theta_{t+1}^A S_{t+1}^A(\omega),$$

kde $S_{t+1}^A$ jsou nové ceny a $\Theta_{t+1}^A$ jsou nové podíly v portfoliu.

Úpravou pak dostaneme

$$V_{t+1}^{\Theta}(\omega) - V_t^{\Theta}(\omega) = \sum_A \Theta_t^A \left(S_{t+1}^A(\omega) - S_t^A(\omega)\right).$$

To je *podmínka pro samofinancující portfolio.*

**Věta 10.4.1.** *Nechť v $T$-periodickém trhu $M$ neexistuje arbitráž a nechť existuje bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$. Pak vzhledem k rovnovážné pravděpodobnostní míře je proces cen $(S_t)$ libovolného obchodovatelného aktiva martingalem vzhledem k přirozené filtraci*

**Definice 10.4.2.** Nechť $\mathcal{F}_t$ je přirozená filtrace a $Y_t$ je posloupnost náhodných veličin adaptovaných $\mathcal{F}_t$. $Y_t$ se nazývá ***předvídatelná posloupnost***, jestliže pro všechna $t \geq 1$ je $Y_t$ $\mathcal{F}_{t-1}$ - měřitelná. (tedy hodnota $Y_t$ je určena již v čase $t-1$).

## 10.5 Martingalová transformace

**Definice 10.5.1.** Nechť posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je martingal a nechť $\{Y_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je předvídatelná posloupnost. Pak

***martingalová transformace*** $\{(Y \bullet X)_t\}_{0 \le t \le T}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná jako

$$(Y \bullet X)_t = X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} Y_j \, (\Delta X)_{j+1} \,,$$

kde $(\Delta X)_{t+1} = X_{t+1} - X_t$.

**Věta 10.5.2.** *Martingalová transformace je martingalem vzhledem k $\mathcal{F}_t$.*

**Důkaz:** Cvičení.

**Důsledek 10.5.3.** Nechť $M$ je $T$-periodický trh bez arbitráže obsahující bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$ a nechť $M$ má rovnovážnou pravděpodobnostní míru $P$. Pak pro každé samofinancující portfolio je proces jeho ceny $\left(V_t^{\Theta}\right)_{0 \le t \le T}$ martingalem.

**Důkaz:** Z podmínky pro samofinancující portfolio plyne, že proces ceny je martingalová transformace, a tedy martingal.

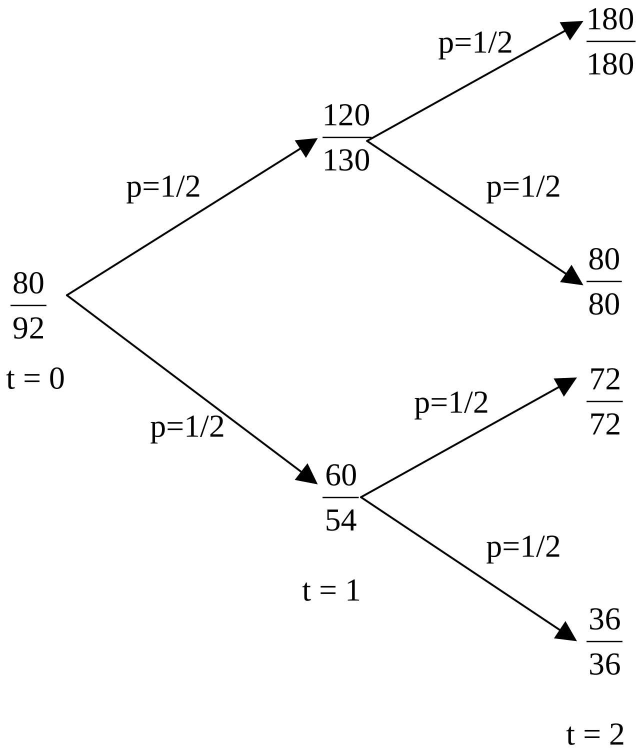
### 10.5.1 Podmíněná očekávání a martingalová transformace

Vlastnost martingalu znamená, že "očekávaná budoucí hodnota = současná hodnota". Následující obrázky mají ilustrovat graficky pojem martingalu. Do grafu zaneseme příslušné hodnoty a očekávání:

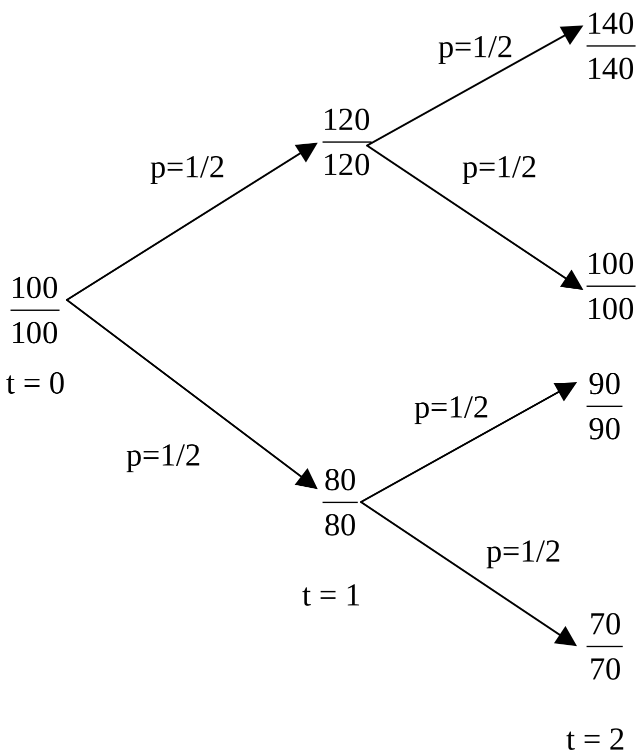
$t = 0: \ \frac{S_0}{E(S_1|S_0)}$

$t = 1: \ \frac{S_1}{E(S_2|S_1)}$

$t = 2: \ \frac{S_2}{E(S_2|S_2)}$




Předchozí obrázek není martingal - u martingalu jsou nahoře i dole stejné hodnoty, viz následující obrázek:


140
140
p=1/2
120
120
p=1/2
p=1/2
100
100
100
100
t = 0
p=1/2
90
90
p=1/2
80
80
p=1/2
t = 1
70
70
t = 2

## 10.6 Příklady

**Příklad 10.6.1.**

Nechť $X_n$ jsou nezávislé náhodné proměnné splňující $E(X_n) = 0$ pro všechna $n$ . Dokažte, že posloupnost částečných součtů

$$S_0 = 0$$

a

$$S_n = X_1 + X_2 + +X_n$$

pro $n \geq 1$, je martingalem vzhledem k $X_n$.

**Příklad 10.6.2.** Nechť $X_n$ jsou nezávislé náhodné proměnné splňující $E(X_n) = 0$ a $Var(X_n) = \sigma^2$ pro všechna $n$. Uvažujme posloupnost částečných součtů $S_n$ z předchozího příkladu. Dokažte, že vztahy

$$M_0 = 0$$

a

$$M_n = S_n^2 - n\sigma^2$$

pro $n \geq 1$ definují martingal vzhledem k posloupnosti $X_n$.

# Kapitola 11

# Úplnost trhu

## 11.1 Věta o úplnosti trhu

Uvažujeme trh $M$ s aktivy $A^1$, ..., $A^k$. Podle základní věty arbitrážní teorie (APT) plyne z neexistence arbitráže existence rovnovážné pravděpodobnostní míry (může jich být i více).

**Definice 11.1.1.** Trh bez arbitráže se nazývá ***úplný***, jestliže existuje právě jedna rovnovážná pravděpodobnostní míra. Trh je neúplný, pokud existuje více rovnovážných pravděpodobnostních měr.

**Definice 11.1.2.** ***Derivát*** je obchodovatelné aktivum, jehož hodnota $V_1$ v čase $t = 1$ je funkcí $V_1(\omega_i)$ tržního scénáře. Tedy $V_1$ je náhodná veličina na $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$.

**Definice 11.1.3.** ***Replikující portfolio*** pro daný derivát $V$, jehož hodnoty v čase $t = 1$ za scénáře $\omega_i$ jsou rovny $V_1(\omega_i)$, je portfolio $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ v aktivech $A^1$, ..., $A^k$ takové, že:

$$V_1(\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_1^j(\omega_i),$$

kde $S_1^j(\omega_i)$ je cena $j$-tého aktiva $A^j$ za scénáře $\omega_i$.

Z neexistence arbitráže plyne, že

$$V_0 = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_0^j,$$

tedy pokud existuje replikující portfolio, derivát má jednoznačně určenou cenu v čase $t = 0$.

**Věta 11.1.4.** ***(o úplnosti trhu)****: Nechť $M$ je trh bez arbitráže s bezrizikovým aktivem. Existuje-li pro každý derivát replikující portfolio v $A^1$, ..., $A^k$, pak je trh úplný. Naopak je-li $M$ úplný a rovnovážná pravděpodobnostní míra dává kladnou pravděpodobnost každému scénáři (tj. $\pi(\omega_i) > 0$ pro $\forall i$), pak pro každý derivát existuje replikující portfolio (a tedy derivát má jednoznačně určenou cenu).*

Důkaz je založen na jednoduchých myšlenkách z lineární algebry. Deriváty tvoří vektorový prostor (izomorfní $\mathbb{R}^N$). Trh je úplný právě tehdy, když vektory hodnot aktiv $A^1$, $A^2$, ..., $A^k$ v jednotlivých scénářích generují $\mathbb{R}^N$. Tedy vektory $S_1^j(\omega_i)$, $j = 1, ..., k$ generují $\mathbb{R}^N$. Speciálně platí $k \geq N$.

**Důkaz:** Chceme nejdříve dokázat, že pokud existuje replikujcí portfolio, pak $M$ je úplný.

Uvažujme pro pevně zvolený scénář $\omega_l \in \Omega$ následující derivát $D_l$, jehož hodnota v čase $t = 1$ je rovna

$$V_1(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq l \\ 1 & \text{pro } i = l \end{cases}.$$

Podle předpokladu existuje replikující portfolio pro $D_l$, označme ho $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$, v aktivech $A^1$, ..., $A^k$. Tedy

$$V_0 = \sum \theta_j S_0^j.$$

Je-li $\pi$ rovnovážná pravděpodobnostní míra, pak také

$$V_0 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} V_1(\omega_i)\, \pi_i = e^{-r} \pi(\omega_l).$$

Odtud plyne

$$\pi\left(\omega_l\right)=e^r\sum_{j=1}^{k}\theta_j S_0^j$$

a tedy $\pi$ je jednoznačně určena.

Zbývá nám dokázat opačnou implikaci. Označíme

$$\vec{a_j}=\left(S_1^j\left(\omega_1\right),\,S_1^j\left(\omega_2\right),\,...,\,S_1^j\left(\omega_N\right)\right)$$

vektor v $\mathbb{R}^N$ pro každou hodnotu $j$ (tedy každé aktivum $A_j$). Derivát je vektor v $\mathbb{R}^N$, který se dá replikovat právě tehdy, když vektor jeho hodnot v jednotlivých scénářích patří do lineárního obalu vektorů $\vec{a_j}$.

Nechť existuje $\pi\left(\omega_i\right)$ jednoznačně určená, taková, že $\pi\left(\omega_i\right)>0$ pro všechna $i$. Budeme postupovat sporem: Nechť existuje derivát $D$, který nemá replikující portfolio. Tedy jsou-li jeho hodnoty ve scénářích $\omega_i$ rovny $f\left(\omega_i\right)$ a označíme-li

$$\vec{f}=\left(f\left(\omega_1\right),\,...,\,f\left(\omega_N\right)\right),$$

pak $\vec{f}$ není lineární kombinací $\vec{a_j}$ a tedy $\vec{a_j}$ negeneruje $\mathbb{R}^N$. Existuje tedy vektor $\vec{v}=\left(v_1,\,...,\,v_N\right)$, který je kolmý na vektory $\vec{a_j}$ pro všechna $j$, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{N}v_i S_1^j\left(\omega_i\right)=0$$

pro $j=1,\,...,\,k$. Aktivum $A^1$ je bezrizikové, tedy

$$A_1^1\left(\omega_i\right)=e^r$$

pro všechna $i$. Speciálně tedy $\vec{v}\perp\left(1,\,...,\,1\right)$ a

$$\sum_{i=1}^{N}v_i=0.$$

Pro dostatečně malé $\varepsilon>0$ označme

$$\pi^*\left(\omega_i\right)=\pi\left(\omega_i\right)+\varepsilon v_i.$$

Máme

$$\sum_{i=1}^{N}\pi^*\left(\omega_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\omega_i\right)+\sum_{i=1}^{N}v_i=1+0=1.$$

Navíc, je-li $\varepsilon$ dostatečně malé, pak $\pi^*(\omega_i) > 0$, neboť $\pi(\omega_i) > 0$, a platí

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} v_i S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i).$$

Tedy $\pi^*$ je další rovnovážná pravděpodobnostní míra, což je spor. Tím je tvrzení dokázáno.

# Kapitola 12

# Wienerův proces

## 12.1 Limita náhodné procházky

Wienerův proces je stochastický proces ve spojitém čase se spojitými hodnotami, který můžeme intuitivně chápat jako limitu náhodné procházky při zmenšování časového a prostorového kroku $\Delta x$ a $\Delta t$ (tedy pro $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$).

Nechť $P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$, kde $X_i$, ..., $X_n, ...$ jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny s $E(X_i) = 0$ a $Var(X_i) = 1$. Potom

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

kde $S_0 = 0$, je standardní symetrická náhodná procházka.

Zvolme délku časového kroku $\Delta t$ a velikost prostorového kroku $\Delta x$. Pro $t = n\Delta t$, tedy $n = \frac{t}{\Delta t}$, definujeme proces

$$S_t = S_{n\Delta t} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)\,\Delta x.$$

Z nezávislosti přírůstků $X_j$ plyne, že $E(S_t) = 0$ a

$$Var(S_t) = (\Delta x)^2\, n = (\Delta x)^2\, \frac{t}{\Delta t}.$$

Zajímá nás chování tohoto procesu v limitním přechodu $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$. Uvažujeme mocninnou závislost mezi $\Delta x$ a $\Delta t$. Položme $\Delta t = (\Delta x)^p$, kde

$p > 0$. Pro $\Delta t \to 0$ pak dostáváme

$$Var\left(S_t\right) = \frac{\left(\Delta x\right)^2}{\Delta t} t \begin{cases} \to 0 & \text{pro } p < 2 \\ = t & \text{pro } p = 2 \\ \to \infty & \text{pro } p > 2 \end{cases}.$$

Konečný nenulový rozptyl tedy dostaneme jen pro volbu $p = 2$. Pro

$$\Delta t = \left(\Delta x\right)^2$$

dostaneme v limitě pro $\Delta t \to 0$ standardní Wienerův proces.

Z Centrální limitní věty plyne, že $S_t$ má v limitě pro $\Delta t \to 0$ a $\left(\Delta x\right)^2 = \Delta t$ normální rozdělení $N\left(0,\, t\right)$.

**Věta 12.1.1.** *(Lindebergova centrální limitní věta) Nechť $X_1$, $X_2$, ... jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které mají střední hodnotu $\mu$ a konečný rozptyl $\sigma^2$. Označme*

$$Y_n = \frac{\left(X_1 + X_2 + ... + X_n - \mu n\right)}{\sqrt{n}}$$

*pro $n = 1,\, 2,\, ...$. Pak $Y_n$ konverguje v distribuci k rozdělení $N\left(0,\, \sigma^2\right)$.*

**Definice 12.1.2.** Stochastický proces $W_t$, kde $t \in [0, \infty)$, se nazývá *standardní Wienerův proces*, jestliže platí:

1. $W_0 = 0$
2. (*spojitost*) S pravděpodobností 1 je trajektorie Wienerova procesu spojitá.
3. (*nezávislost*) PřírůstkyWienerova procesu jsou nezávislé, tj. pro $0 \leq t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq ... \leq t_n < s_n$ jsou přírůstky $W_{s_1} - W_{t_1}$, $W_{s_2} - W_{t_2}$, ..., $W_{s_n} - W_{t_n}$ navzájem nezávislé.
4. (*normalita přírůstků*) Přírůstky $W_s - W_t$ pro $s > t$ mají rozdělení $N\left(0,\, s - t\right)$.

Speciálně z vlastností 1 a 4 máme

$$W_t \sim N\left(0,\, t\right) \sim \sqrt{t} N\left(0,\, 1\right).$$

Označme $\Delta W$ přírůstek Wienerova procesu za čas $\Delta t$. Máme

$$\Delta W = \sqrt{\Delta t} \varepsilon,$$

kde $\varepsilon$ má standardní normální rozdělení $N(0, 1)$.

Pro očekávání a rozptyl $\Delta W$ dostaneme

$$E(\Delta W) = \sqrt{\Delta t} E(\varepsilon) = 0$$

a

$$Var(\Delta W) = E\left((\Delta W)^2\right) = \Delta t.$$

*Zobecněný Wienerův proces* můžeme definovat pomocí infinitezimálního přírůstku

$$dX = adt + bdW,$$

kde $a$, $b$ jsou konstanty a $W$ je standardní Wienerův proces. Koeficient $a$ je *koeficient driftu* a $b$ je *koeficient volatility*. Opět máme

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

tedy

$$E(\Delta X) = a\Delta t$$

a

$$Var(\Delta X) = b^2 \Delta t.$$

Pro $b = 0$ máme

$$dX = adt,$$

tedy $X_t = at$ je deterministický proces.

Další možné zobecnění: koeficienty $a$, $b$ se mohou měnit a mohou záviset na $t$ a případně i na hodnotách $X$.

## 12.2 Wienerův proces pro cenu akcie

Wienerův proces není vhodný pro popis vývoje ceny akcie z několika důvodů:

- Ceny akcie nemohou nabývat záporné hodnoty, zatímco Wienerův proces ano.
- Při Wienerově procesu je pravděpodobnost, že se cena zvýší o 1 Kč, stejná, je-li $S = 1$ Kč nebo $S = 100\,000$ Kč. To, co je ve skutečnosti důležité, není absolutní změna (ta závisí mimo jiné také na jednotkách, v nichž cenu vyjadřujeme), ale relativní změna vůči ceně akcie.

Je-li volatilita nulová, máme

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit relativní přírůstek

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t,$$

kde $\mu$ je konstanta (drift). Odtud dostáváme

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

a řešením diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$S_t = S_0 e^{\mu t}.$$

Obecně

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

kde $\mu$ je drift a $\sigma$ je volatilita. Tak je definován *geometrický Wienerův proces*. Máme

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

a diskretizací dostaneme:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

kde $\varepsilon \sim N(0,\,1)$.

Tedy

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

odkud

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu\Delta t,\, \sigma^2\Delta t\right).$$

Jinak řečeno,

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu\Delta t$$

a

$$Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2\Delta t.$$

K vyřešení rovnice, t.j. odvození explicitního vztahu pro $S$, potřebujeme Itôovo lemma.

### 12.2.1 Itôovo lemma

Pro porovnání připomeňme nejdříve diferenciál deterministické funkce.

- 1 proměnná: $dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx$
- funkce 2 deterministických proměnných $x$, $t$:

  $$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x,$$

  neboli

  $$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dx.$$

V případě Wienerova procesu platí heuristický vztah

$$(dW)^2 = dt,$$

proto budeme mít navíc člen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dX)^2.$$

Itôovo lemma je analogií pravidla pro diferenciál složené funkce a slouží k výpočtu přírůstků funkce stochastického procesu.

Nechť hodnota stochastického procesu $X$ splňuje rovnici

$$dX = a\,(X,\, t)\, dt + b\,(X,\, t)\, dW,$$

kde $W$ je standardní Wienerův proces a $a$, $b$ jsou funkce $X$ a $t$. Nechť $G\,(x,\, t)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných $x$, $t$. Jakou rovnici splňuje přírůstek procesu $G\,(X,\, t)$?

*Itôovo lemma* říká, že pro $G$ platí

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (dX)^2,$$

kde za $dX$ dosadíme a $(dX)^2$ počítáme podle pravidel

$$dtdt = 0, \quad dtdW = 0, (dW)^2 = dt.$$

Tak dostaneme celkem

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 + a \frac{\partial G}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdW.$$

### 12.2.2 Odvození Black-Scholesovy rovnice

Black-Scholesova rovnice popisuje vývoj hodnoty evropské opce v Black-Scholesově modelu. Předpokládejme, že pohyb ceny akcie je popsán geometrickým Wienerovým procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

neboli

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Použijeme Itôovo lemma na funkci $G\,(S,\, t) = lnS$ . Máme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{-1}{S^2}.$$

Tedy z Itôova lemmatu

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW$$

a

$$d\left(\ln S\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Odtud plyne, že $\ln S_T - \ln S_0$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ a rozptylem $\sigma^2 T$. Tedy

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T;\, \sigma^2 T\right).$$

$S_T$ má tedy ***lognormální rozdělení***, tj. $\ln S_T$ má normální rozdělení.

Máme rovnici pro cenu akcie, která sleduje geometrický Wienerův proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{12.1}$$

Nechť $f$ je cena evropské call opce s danou realizační cenou $K$ a časem expirace $T$. Zisk z takové opce v čase $T$ je

$$\left(S_T - K\right)_+.$$

$f$ závisí na $S$ a $t$ a je tedy funkcí dvou proměnných, $f\left(S,\, t\right)$. Hodnota $f\left(S,\, t\right)$ je cena opce v čase $t$ v situaci, kdy cena akcie je rovna $S$.

Podle Itôova lemmatu platí pro změnu ceny opce

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\left(dS\right)^2.$$

Za $dS$ dosadíme z 12.1, tedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S}\left(\mu S dt + \sigma S dW\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\left(\mu S dt + \sigma S dW\right)^2.$$

Jelikož $\left(dt\right)^2$ a $dtdW$ jsou členy vyššího řádu a víme, že $\left(dW\right)^2 = dt$, dostáváme:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW. \tag{12.2}$$

Vhodnou kombinací 12.1 a 12.2 můžeme sestavit portfolio z akcií a opcí, jehož výnos je deterministický. Jinak řečeno, můžeme eliminovat stochastický člen $dW$.

Označme $\Pi$ hodnotu portfolia složeného z 1 opce a $-\frac{\partial f}{\partial S}$ akcie, tedy

$$\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S} S + 1f$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia za čas $dt$ máme:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\right) dS + 1df.$$

Po dosazení z 12.1 a 12.2 dostaneme

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt,$$

stochastický člen se vyruší.

Přírůstek hodnoty portfolia $d\Pi$ se musí (z neexistence arbitráže) rovnat zisku z bezrizikového aktiva s úrokovou mírou $r$, tj.

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Celkem dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = r\left(-\frac{\partial f}{\partial S} S + f\right) dt$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial S} Sr = rf.$$

To je *Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice.*

Po transformaci (substitucích) dostaneme rovnici difuze (rovnici vedení tepla)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}.$$

Řešením společně s transformovanou koncovou podmínkou (známe hodnotu $f(T) = (S_T - K)_+$) dostaneme Black-Scholesův vzorec.

## 12.3 Příklady

**Příklad 12.3.1.** Vypočítejte diferenciály následujících procesů

$$X(t) = 3t + e^{W(t)}$$

$$X(t) = t + W(t)^2$$

$$X(t) = 5 + \sin W(t)$$

**Příklad 12.3.2.** Nechť $X$ je zobecněný Wienerův proces s parametry $\mu$ a $\sigma$. Najděte stochastickou diferenciální rovnici pro následující funkce proměnných $X$ a $t$:

$$f(x,t) = x^3$$

$$f(x,t) = \ln(3 + x)$$

$$f(x,t) = e^{t+xt}$$

# Literatura

[1] Grimmett G., Stirzaker D.: *Probability and Random Processes,* Oxford University Press 2001

[2] Ross S.: *Stochastic Processes,* Wiley 1996

[3] Hull J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives,* Prentice Hall 2012

[4] Willmott P., Howison S., Dewynne, J.: *The Mathematics of Financial derivatives, A Student Introduction*, Cambridge University Press 1996

[5] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov,* Slovenská technická univerzita 2009

[6] Etheridge A.: *A Course in Financial Calculus,* Cambridge University Press 2002

[7] Baxter M., Rennie A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing,* Cambridge University Press 1996

[8] Wilmott P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3 Volume Set,* Wiley 2006

[9] Wilmott P.: *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance,* Wiley 2007