3. Nejistota

Bi3101 Úvod do matematického modelování

Nejistota

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Modelování nejistoty (neurčitosti) a rizika

- ***Nejistotou*** při zobrazení systému pomocí matematického modelu rozumíme situaci, kdy nemáme k disposici všechnu potřebnou informaci nebo kdy některé z informací jsou nespolehlivé.
- ***Modelování při riziku*** předpokládá, že některé informace jsou náhodné veličiny, nebo že některé procesy jsou popsány náhodnými funkcemi.
    - V případě modelů s rizikem můžeme velikost rizika při přijetí řešení popsat pomocí pravděpodobnostních charakteristik.
    - Analogicky můžeme považovat modelování za rizika i v případě použití fuzzy veličin, nebo fuzzy funkcí. Velikost rizika lze potom vyjádřit buď pomocí vhodné fuzzy míry nebo tuto fuzzy míru transformovat na subjektivní pravděpodobnost.

Inverzní problém

- Určení vstupních parametrů modelu, které neznáme, při znalosti výstupních hodnot (naměřených dat).
- Nazývá se inverzní, protože známe výsledek modelovaného procesu, ale neznáme počáteční stav.
- Opakem je dopředný problém, kdy známe vstupy (parametry) a chceme zjistit výstupy (data).
- Data bývají zatížená chybami, které mohou ztěžovat určení parametrů modelu.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované (ill-posed).

Dobře/špatně postulovaný problém

- Well posed × Ill posed problems.
- Říkáme, že problém je dobře postulovaný pokud splňuje Hadamardovu definici (3 podmínky):
  - existuje řešení problému;
  - toto řešení je jednoznačné;
  - vlastnosti řešení se mění spojitě se vstupními parametry.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované, mohou trpět numerickou nestabilitou díky diskretizaci, nepřesnosti v datech apod.
- I když je problém dobře postulovaný, může být stále špatně podmíněný.

Dobře/špatně podmíněný problém

- Well conditioned × Ill conditioned problems.
- Za dobře podmíněný problém považujeme problém s nízkou podmíněností (číslem podmíněnosti), za špatně podmíněný problém považujeme problém s vysokou podmíněností.
- Podmíněnost udává, jak moc závisí změny modelových výstupů na (malých) změnách modelových vstupů.
- Podmíněnost je mírou citlivosti modelu na chyby ve vstupních hodnotách.
- Podmíněnost (číslo podmíněnosti) je definována jako maximální poměr relativní chyby výstupů a vstupů modelu.

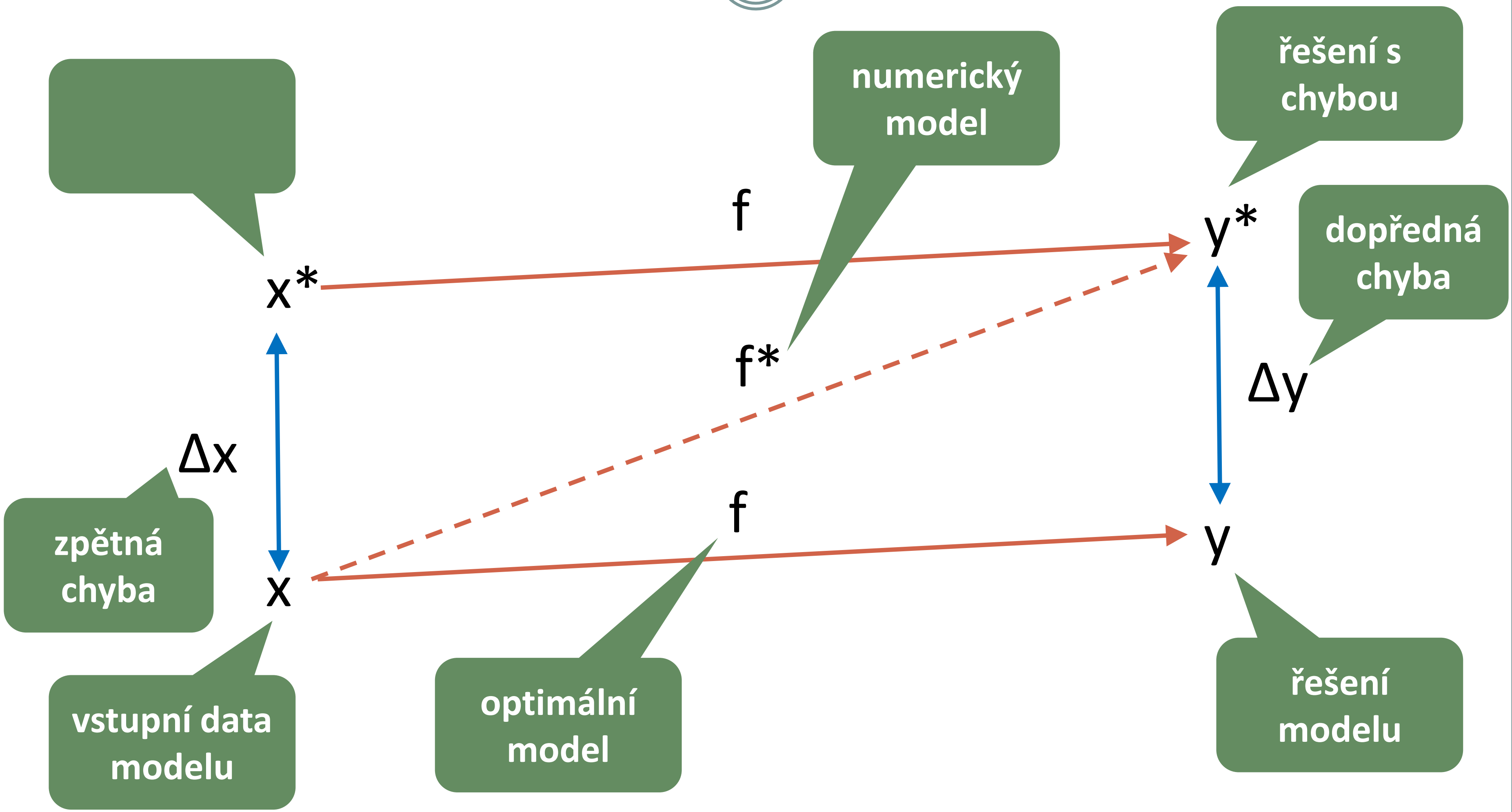
Dopředná a zpětná stabilita

- Výstupy modelu se obvykle mírně liší od popisované reality (díky numerické reprezentaci, tj. zaokrouhlení a nepřesnostem řešení). Chybu výstupů nazýváme dopředná chyba (forward error).
- Odchylka na vstupu modelu, která odpovídá dopředné chybě výstupů se nazývá zpětná chyba (backward error).
- Model nazveme zpětně stabilním (backward stable), pokud má malou zpětnou chybu (obvykle se udává jako relativní vůči vstupní hodnotě):

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

- „Malá“ chyba obvykle znamená, že je zhruba stejného řádu jako zaokrouhlení vstupních hodnot.

Dopředná a zpětná stabilita



Číslo podmíněnosti

- Condition number.
- Číslo podmíněnosti je vlastností matematického řešení, ne jeho (zaokrouhlovací) chyby.
- Jde o maximální poměr relativní zpětné chyby vůči relativní dopředné chybě:

$$\kappa = max\left(\frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{f^{-1}(\Delta y)}{f^{-1}(y)}\right|}\right) = max\left(\frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|}\right)$$

$$\kappa = max\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Příklad

- Nalezněte pevný bod funkce f(x) = 11 x – 2.
- Řešte iterativně s počátečním (správným) řešením x = 0,2 v Maple a v R:

```
x[1]:=0.2;
for i from 2 to 20 do
  x[i]:=11*x[i-1]-2
end do
```

```
x[1]=0.2
for (i in 2:20) {
  x[i]<-11*x[i-1]-2
}
```

- Porovnejte výsledky (chybu), charakterizujte stabilitu obou modelů a pokuste se odhadnout číslo podmíněnosti.