

4. Model růstu populace

Bi3101 Úvod do matematického modelování



Populační modely
Model růstu populace
2. domácí úloha

Populační modely



- **Populační modely** řeší odpověď na otázku kolik jedinců bude mít modelovaná populace v daném čase $t > 0$, pokud známe tento počet na počátku (v čase $t = 0$).
- Modely růstu populace patří k nejrozšířenějším a nejznámějším.

Model neomezeného růstu populace



- Nejjednodušším populačním modelem je model exponenciálního růstu:
 - Předpokládejme, že změna velikosti $N(t)$ populace v čase je způsobena pouze plozením nových jedinců a umíráním jiných.
 - Předpokládejme, že počet nově narozených, respektive zemřelých jedinců je přímo úměrný velikosti populace.
 - Hledáme řešení modelu, tj. velikost $N(t)$ populace v čase t . Čas t budeme uvažovat buď jako diskrétní veličinu nabývající celočíselných hodnot (mohou představovat například roky, obecně generace), nebo jako spojitou veličinu.

Model neomezeného růstu populace



- Na základě vyslovených předpokladů jsme schopni sestavit rovnici modelu. Označme :
 - $N(t)$ funkci představující počet jedinců populace v čase t ,
 - a koeficient porodnosti populace (podíl nově narozených jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
 - b koeficient úmrtnosti populace (podíl zemřelých jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
 - h délku časového intervalu (kladné reálné číslo).

Modifikace modelu



- Velikost populace se nicméně nemůže exponenciálně zvyšovat do nekonečna. Prostor, v němž populace žije, je omezený, podobně jako množství živin, které má k dispozici.
- Doplňme proto předpoklad modelu, že úmrtnost se bude zvyšovat se zvětšující se populací:
 - Nejjednodušší způsob závislosti je lineární závislost. Koeficient úmrtnosti tedy nebudeme již chápat jako konstantní číslo, ale jako rostoucí lineární funkci.
 - Koeficient úmrtnosti: $b + c \cdot N(t)$, kde b, c jsou reálná nezáporná čísla.
- Podobně jako dříve získáme rovnice modelu:
 - Diskrétní případ: $N(t + 1) = (1 + a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$; $N(0) = N_0$
 - Spojitý případ: $N'(t) = (a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$; $N(0) = N_0$

Modifikace modelu



- **Přeznačení koeficientů modelu:**

- uživnost prostředí: $K = \left(\frac{a-b}{c}\right)$
- vnitřní koeficient růstu $r = a - b$

Domácí úkol č. 2 (do 14. 10. 2019)



- Využijte Maple pro vytvoření spojitého modelu růstu populace s koeficientem růstu r a se zahrnutím konstanty úživnosti prostředí K :

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

- Vložte do modelu komponenty (slidery) pro počáteční velikost populace $N(0)$ jdoucí od 0 do 1000 jedinců, koeficient růstu r jdoucí od 0 do 2 a úživnost prostředí K od 0 do 1000 jedinců.