1 Integrální počet

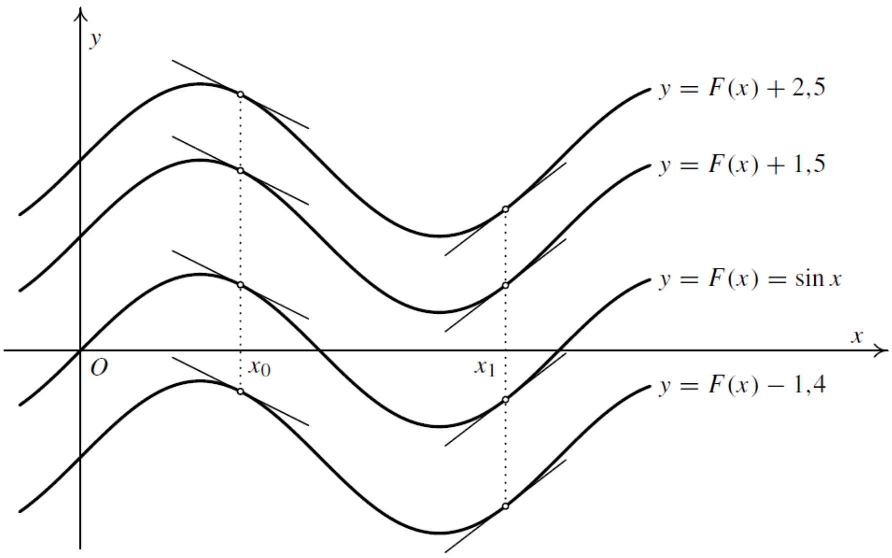
1.1 Neurčitý integrál

Neurčitým integrálem k dané funkci $f(x)$ nazýváme takovou funkci $F(x)$, pro kterou platí, že $f(x) = F'(x)$. Neboli integrálem funkce $f(x)$ je taková funkce $F(x)$, ze které bychom derivací dostali původní funkci $f(x)$.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je ve svém významu derivací funkce $F(x)$ a vzpomeneme-li si, že derivací konstanty dostaneme vždy nulu, pak je třeba vždy během integrace k funkci $F(x)$[i] přičíst ještě tzv. integrační konstantu C. Celý proces integrace pak značíme:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$$

Význam integrační konstanty můžeme ilustrovat např. na Obrázku 1, kde jsou vyobrazeny primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x) = \sin x$ s různými hodnotami integračních konstant C. Z obrázku je patrné, že derivací primitivní funkce $F(x)$ s různými integračními konstantami obdržíme vždy totožnou funkci $f(x)$.[ii]



Obrázek 1: Význam primitivní funkce $F(x)$ s různou integrační konstantou C. Všechny zobrazené funkce $F(x) + C$ mají stejnou derivaci ve všech svých bodech (např. v bodech x_0 a x_1) a proto jsou primitivními funkcemi jediné funkce $f(x)$ a platí $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$.

1.2 Metody výpočtů neurčitých integrálů

1.2.1 Přímá integrace funkcí

Podobně jako derivace elementárních funkcí jsou „tabelované“ některé integrály elementárních funkcí. Uvádíme zde jejich přehled:

$$\int konst.\ \mathrm{d}x = konst. \cdot x + C$$

[i] Někdy taktéž nazývanou primitivní funkcí.

[ii] Derivace $f(x)$ je totiž vlastně směrnicí $F(x) + C$ v každém jejím bodě.

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{pro } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{pro } a > 0$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

Ne každá funkce je ale funkcí elementární a velmi často se setkáme s funkcemi, které jsou součtem/rozdílem, součinem nebo podílem více funkcí. Označíme-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce a $F(x)$ a $G(x)$ jejich primitivní funkce a c libovolnou konstantu, pak platí pro součet a rozdíl integrálů, podobně jako u derivací:

$$\int c \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x = c \cdot F(x) + C \tag{1}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C \tag{2}$$

Součin funkcí se integruje speciálními metodami, které zmíníme níže, podobně je tomu u podílu. Pouze ve speciálním případě, kdy je čitatel zlomku, který integrujeme derivací jmenovatele, tedy integrujeme-li podíl typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$, pak platí:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \tag{3}$$

Nyní přistoupíme k několika řešeným příkladům, které využívají k integraci funkcí výše uvedené vztahy.

Příklad 1. *Vypočítejme integrál*

$$\int \left(\frac{5}{x^5} + x^5 + \sqrt[5]{x} \right) \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál ze součtu několika elementárních funkcí, které lze upravit na mocninný tvar. S využitím vztahu (2) máme pak:

$$\int \left(\frac{5}{x^5} + x^5 + \sqrt[5]{x} \right) \mathrm{d}x = \int \frac{5}{x^5} \, \mathrm{d}x + \int x^5 \, \mathrm{d}x + \int \sqrt[5]{x} \, \mathrm{d}x = \int 5 \cdot x^{-5} \, \mathrm{d}x + \int x^5 \, \mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{5}} \, \mathrm{d}x$$

Tyto integrály již lze integrovat pomocí pravidla $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$5 \cdot \int x^{-5}\ \mathrm{d}x + \int x^5\ \mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + \frac{x^{5+1}}{5+1} + \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C = -\frac{5}{4}x^{-4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C$$

Výsledek pak již pouze upravíme na „estetický“ tvar:

$$-\frac{5}{4}x^{-4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \underline{\underline{-\frac{5}{4x^4} + \frac{x^6}{6} + \frac{6\sqrt[5]{x^6}}{5} + C}}$$

Příklad 2. *Vypočítejme integrál*

$$\int \frac{4x - 2\cdot\sqrt{x}}{x}\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Výše uvedený integrál je sice podílem funkcí, nicméně, je snadné jej převodem na mocninný tvar a následným dělením převést na rozdíl „tabulkových“ integrálů:

$$\int \frac{4x - 2\cdot\sqrt{x}}{x}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{4x}{x} - \frac{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \int 4\ \mathrm{d}x - \int 2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = 4x - 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \underline{\underline{4x - 4\sqrt{x} + C}}$$

Příklad 3. *Vypočítejme integrál*

$$\int (\sqrt{x}+1)\cdot(x-\sqrt{x}+1)\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál ze součinu dvou funkcí. Takový integrál by se *ad hoc* řešil velmi těžko. Práci si však značně usnadníme roznásobením závorek a úpravou na mocninný tvar:

$$\int (\sqrt{x}+1)\cdot(x-\sqrt{x}+1)\ \mathrm{d}x = \int (x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1)\ \mathrm{d}x = \int (x\sqrt{x}+1)\ \mathrm{d}x = \int (x^{\frac{3}{2}}+1)\ \mathrm{d}x$$

Takový integrál již lehce spočítáme jako integrál součtu dvou elementárních funkcí:

$$\int (x^{\frac{3}{2}}+1)\ \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x + \int 1\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + x + C = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + x + C = \underline{\underline{\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5} + x + C}}$$

Příklad 4. *Vypočítejme integrál*

$$\int \left(\frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} + \cos x\right)\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Uvedený integrál vypadá poměrně nepříjemně, vzhledem k odmocnině z trojčlenu v čitateli zlomku. Nicméně, pokud si všimneme, že pod odmocninou máme klasický vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu, konkrétně $x^4 + 2 + x^{-4} = (x^2 + x^{-2})^2$, je již následná úprava na součet elementárních funkcí přímočará:

$$\int \left(\frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} + \cos x\right)\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3} + \cos x\right)\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^2+x^{-2}}{x^3} + \cos x\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x^{-2}}{x^3} + \cos x\right)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x + \int x^{-5}\ \mathrm{d}x + \int \cos x\ \mathrm{d}x$$

Tyto integrály jsou již tabulkové a je snadné je vypočítat:

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x + \int x^{-5}\ \mathrm{d}x + \int \cos x\ \mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + \sin x + C = \underline{\underline{\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + \sin x + C}}$$

Příklad 5. *Vypočítejme integrál*

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x$$

Řešení. Přestože se jedná o integrál z elementární funkce, není jeho integrace zcela elementární záležitostí. Využijeme však faktu, že funkce $\tan x$ je definovaná pomocí funkcí sinus a kosinus. Převedeme tak integrál na podíl dvou funkcí:

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

Na první pohled to nevypadá jako velký pokrok, nicméně, vzpomeneme-li si na derivace elementárních funkcí a vezmeme-li v úvahu platnost vztahu (3), můžeme dojít k překvapivě přímočarému řešení. Derivací funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$. A pokud je čitatel integrovaného zlomku roven derivaci jmenovatele, pak je integrál jednoduše vypočitatelný dle (3). Proto si v čitateli „vyrobíme" funkci $-\sin x$ a dále integrujeme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \int -\frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\ln|\cos x| + C}}$$

Příklad 6. *Vypočítejme integrál*

$$\int \frac{1}{1+\cos 2x} \, \mathrm{d}x$$

Řešení. Integrál je nejprve třeba upravit na takový tvar, abychom mohli využít pravidla pro integrování elementárních goniometrických funkcí. Využijeme vlastnosti $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a rovněž $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a zlomek v integrálu upravíme:

$$\int \frac{1}{1+\cos 2x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Tento integrál je již tabulkový a snadno jej vypočteme:

$$\int \frac{1}{2\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \tan x + C}}$$

Příklad 7. *Vypočítejme integrál*

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál z podílu funkcí, který by se těžko přímo integroval. Pokusíme se ale o rozklad kvadratického dvojčlenu v čitateli a zlomek tak upravíme:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{(\mathrm{e}^x+1)\cdot(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + 1) \, \mathrm{d}x$$

Tento integrál je již součtem elementárních integrálů:

$$\int (\mathrm{e}^x + 1) \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x + \int 1 \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\mathrm{e}^x + x + C}}$$

1.2.2 Metoda integrace *per partes*

V případě, že máme vypočítat integrál, který je součinem dvou funkcí, který nelze vhodně upravit na tabulkové integrály uvedené v předchozím textu, je v mnohých případech výhodně použít metodu integrace *per partes*.

Tato metoda integrace využívá *de facto* integrované formy vztahu pro derivaci součinu. Pro připomenutí, pro derivaci součinu dvou funkcí $u(x)$ a $v(x)$ platí $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. Zintegrujeme-li tento vztah, máme z $(u(x)\cdot v(x))'$ nederivovaný součin $u(x)\cdot v(x)$ a můžeme psát:

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x + \int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Pro výpočet integrálu ze součinu funkcí tak můžeme odvodit totožné vztahy:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x \tag{4}$$

Může se zdát, že se jedná o převod integrálu na jiný integrál. Je tomu tak. V původním integrálu ze součinu dvou funkcí si vždy zvolíme jednu funkci, kterou prohlásíme za derivaci $u'(x)$ (nebo $v'(x)$), kterou musíme umět integrovat a druhou $v(x)$ (nebo $u(x)$) kterou musíme umět derivovat.[iii] Volíme tyto funkce tak, abychom po úpravě obdrželi jednodušší integrál. Jak vhodně tyto funkce volit si ukážeme na následujících příkladech a následně se pokusíme o vyslovení několika pravidel, která by nám mohla pomoci s výpočty integrálů pomocí této metody.

Je ještě nutné podotknout, že metoda *per partes* se při výpočtu při mnoha případech používá i opakovaně.

Příklad 8. *Vypočítejme integrál*

$$\int x\cdot \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál, který ani sebelepší úpravou nemůžeme převést na integrál „tabulkový“. Jedná se ale evidentně o součin dvou funkcí. Využijeme proto metody integrace *per partes.* Máme součin dvou funkcí x a e^x. Jednu z nich musíme zvolit jako derivaci a druhou jako funkci nederivovanou. Vzhledem k tomu, že ve vztahu (4) je na pravé straně integrál z funkcí se zaměněnou derivací, zvolíme v původním integrálu funkce $u(x)$ a $v'(x)$ tak, aby integrál ze součinu $u'(x)\cdot v(x)$ byl jednodušší. Toho docílíme tak, že jako nederivovanou funkci $u(x)$ zvolíme funkci x, protože její derivace je rovna jedničce a z integrálu na pravé straně tak „zmizí“. Jako funkci $v'(x)$ zvolíme e^x, funkce $v(x)$ na pravé straně (4) pak bude $v(x) = \int v'(x)\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$. Celý tento proces zapíšeme takto:

$$\int \underbrace{x}_{u(x)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'(x)}\ \mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{matrix}\right| = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u(x)}\cdot\underbrace{x}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^x}_{v(x)}\ \mathrm{d}x$$

Vidíme, že se nám původní integrál zjednodušil na prostý součin $x\cdot\mathrm{e}^x$ a tabulkový integrál z funkce e^x. Tento výraz už jen zintegrujeme a upravíme:

$$\mathrm{e}^x\cdot x - \int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C}}$$

Příklad 9. *Vypočítejme integrál*

$$\int (x^2+1)\cdot\cos x\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Opět se jedná o integrál, který je součinem funkcí a nelze jej upravit na integrály z elementárních funkcí. Využijeme proto metodu *per partes.* Jedná se o součet polynomu a goniometrické funkce. Derivací polynomu obdržíme polynom o stupeň nižší. Dvojnásobnou derivací polynomu bychom tak mohli obdržet v upraveném integrálu (4) pouze goniometrickou funkci. To

[iii] To nebývá problém.

znamená dvojnásobné využití metody *per partes*. Zvolíme si tedy polynom x^2+1 jako nederivovanou funkci $u(x)$, její derivace $u'(x)=2x$. Naopak jako derivovanou funkci $v'(x)=\cos x$, potom $v(x)=\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$. Celý proces prvního kroku tak můžeme zapsat jako:

$$\int \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = x^2+1 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{vmatrix} = \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)} - \int \underbrace{2x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)} \, \mathrm{d}x$$

Na integrál na pravé straně pak ještě jednou uplatníme metodu *per partes* a tak se zbavíme výrazu $2x$ před goniometrickou funkcí v integrálu. Zvolíme-li tedy znovu $u(x)=2x$, pak je $u'(x)=2$ a podobně zvolíme $v'(x)=\sin x$ a pak $v(x)=\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$. Můžeme tak psát:

$$(x^2+1)\cdot \sin x - \left(\int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x \right) = \begin{vmatrix} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+1)\cdot \sin x - \left(\underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} - \int \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \, \mathrm{d}x \right)$$

Tím jsme obdrželi elementární integrál a výsledek již jen upravíme:

$$(x^2+1)\cdot \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x \right) = (x^2+1)\cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= (x^2+1)\cdot \sin x + 2x\cdot \cos x - 2\cdot \sin x + C = \underline{\underline{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x + C}}$$

Abychom nemuseli vždy složitě vymýšlet, kterou funkci během integrace *per partes* zvolit jako derivovanou a kterou jako nederivovanou, je možné shrnout jednotlivé případy, se kterými se pravděpodobně setkáme, do následující tabulky:[iv]

Tabulka 1: Volba funkce $u(x)$ a $v'(x)$ pro různé typy součinů funkcí.

Integrovaná funkce	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x)\cdot \mathrm{e}^x$	$P(x)$	e^x
$P(x)\cdot \sin x$	$P(x)$	$\sin x$
$P(x)\cdot \cos x$	$P(x)$	$\cos x$
$P(x)\cdot \ln x$	$\ln x$	$P(x)$

Příklad 10. *Vypočítejme integrál*

$$\int x^3 \ln^2 x \, \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál ze součinu polynomu a přirozeného logaritmu a proto využijeme nápovědy z Tabulky 1 a jako funkci $u(x)$ zvolíme $\ln^2 x$, pak její derivace $u'(x)$ je derivací složené(!) funkce, tedy $u'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$. Za funkci $v'(x)$ zvolíme x^3 a tedy $v(x) = \int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}$. Pomocí (4) tak obdržíme:

[iv] $P(x)$ je obecně polynom.

$$\int x^3 \ln^2 x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = \ln^2 x & u'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \ln^2 x \cdot \frac{x^4}{4} - \int 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \, \mathrm{d}x = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \int \ln x \frac{x^3}{2} \, \mathrm{d}x$$

Jak je vidět, tak výsledek obsahuje znovu integrál, který je součinem dvou funkcí, z čehož jedna je přirozený logaritmus (tentokráte již ne v mocnině) a polynom. Použijeme tedy ještě jednou metodu *per partes* se stejnou taktikou jako v prvním kroku:

$$\frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \int \ln x \frac{x^3}{2} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{x^3}{2} & v(x) = \frac{3x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \left(\ln x \cdot \frac{3x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{3x^2}{2} \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \left(\frac{3x^2 \ln x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int x \, \mathrm{d}x \right) = \underline{\underline{\frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{3x^2 \ln x}{2} + \frac{3x^2}{4} + C}}$$

Příklad 11. *Vypočítejme integrál*

$$\int (x^2 + 1)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál ze součinu polynomu a exponenciální funkce. Proto použijeme metodu *per partes* a to tak, že jako nederivovanou funkci zvolíme $u(x) = x^2 + 1$ a jako derivovanou $v'(x) = \mathrm{e}^x$ (dle Tabulky 1). Dostaneme tak rozvoj:

$$\int (x^2 + 1)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = x^2 + 1 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Vidíme, že došlo ke zjednodušení polynomu v integrálu o jeden stupeň. Použijeme tedy ještě jednou metodu *per partes* a to se stejnou taktikou, kterou již znázorníme jen matematickou symbolikou:

$$(x^2 + 1)\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x - \left(2x\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= (x^2 + 1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2 \cdot \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = \underline{\underline{(x^2 - 2x + 3)\mathrm{e}^x + C}}$$

1.2.3 Metoda integrace substitucí

Metoda integrace substitucí se s výhodou využívá, má-li funkce, která má být integrována, neelementární argument. Tedy např. v případě funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ je argument exponenciály z hlediska výpočtu integrálu elementární. Nicméně, již pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$ argument $2x + 1$ není z hlediska integrace elementární a je třeba jej „nahradit“ elementárním argumentem – novou proměnnou.

Postup výpočtu substitucí využívá věty o derivaci složené funkce. Připomeňme, že funkce $f(g(x))$ má derivaci $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Označíme-li primitivní funkci $f(g(x))$ jako $F(g(x))$, pak můžeme psát $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Integrací této relace obdržíme:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

Zavedeme-li za argument funkce f, tedy za $g(x)$ novou proměnnou t a za $g'(x)$ dx analogicky dt, pak dostaneme integrál z elementární funkce z nové proměnné t:

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(t)} \cdot \underbrace{g'(x)\ \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{F(g(x))}_{F(t)} + C \tag{5}$$

Je třeba podotknout, že v „novém“ integrálu $\int f(t)\ \mathrm{d}t$ se po substituci nesmí vyskytovat žádná původní proměnná, tedy nový integrál musí představovat integrál pouze z funkce obsahující proměnnou t a nikoliv x! Postup bude nejlepší ilustrovat na příkladu:

Příklad 12. *Vypočítejme integrál*

$$\int \sin(5x - \pi)\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Vidíme, že v integrálu je vyskytuje „znepříjemňující“ argument $5x - \pi$, který nám nedovoluje počítat integrál jako klasický tabulkový. Zvolíme proto tento argument jako novou proměnnou. Tedy položíme $g(x) = 5x - \pi = t$. V integrálu (5) je vidět, že nová integrační proměnná $\mathrm{d}t$ se vypočte jako $\mathrm{d}t = g'(x)\ \mathrm{d}x$. Derivace $g'(x)$ je $g'(x) = (5x - \pi)' = 5$. Proto vidíme, že $\mathrm{d}t = 5\ \mathrm{d}x$ a tedy v původním integrálu můžeme $\mathrm{d}x$ nahradit $\frac{1}{5}\ \mathrm{d}t$. Tak původní integrál přejde na elementární integrál z proměnné t:

$$\int \sin(5x - \pi)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} 5x - \pi = t & \mathrm{d}t = (5x - \pi)'\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = 5\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{5}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \cdot \int \sin t\ \mathrm{d}t$$

To je již integrál z elementární funkce. Je ale třeba po provedení integrace znovu dosadit za t původní proměnnou, tedy provést transformaci $t = 5x - \pi$. Výsledný integrál je pak:

$$\frac{1}{5} \cdot \int \sin t\ \mathrm{d}t = -\cos t + C = \underline{\underline{-\frac{1}{5} \cdot \cos(5x - \pi) + C}}$$

Příklad 13. *Vypočítejme integrál*

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

Řešení. Snadno nahlédneme, že exponenciální funkce obsahuje z hlediska integrace nepříjemný argument $-x^2$. Budeme se tedy snažit tohoto argumentu zbavit. Provedeme to tak, že zavedeme novou proměnnou $t = -x^2$. V takovém případě bude $\mathrm{d}t = (-x^2)'\ \mathrm{d}x$, tedy po úpravě $\mathrm{d}t = -2x\ \mathrm{d}x$. Z tohoto výrazu vyjádříme $\mathrm{d}x$, což vede k výrazu $\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x}\ \mathrm{d}t$. Dosazením do původního integrálu[v] obdržíme:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} -x^2 = t & \mathrm{d}t = (-x^2)'\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = -2x\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}x = -\frac{1}{2x}\ \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \Big/ \int x \cdot \mathrm{e}^t \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\ \mathrm{d}t \Big/ = -\frac{1}{2} \int \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$$

Všimněme si, prosím, že po vhodné substituci dojde k transformaci veškerých proměnných x na novou proměnnou t. Úpravu výrazu, který obsahoval obě proměnné jsme uzavřeli do lomených závorek, vzhledem k tomu, že se nejedná o korektní matematický výraz. Nyní už pokračujeme přímočarou integrací podle t a nahrazením proměnné t zpět výrazem $t = -x^2$:

$$-\frac{1}{2} \int \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C}}$$

Příklad 14. *Vypočítejme integrál*

$$\int \frac{3 \cdot \cos x}{\sin^4 x}\ \mathrm{d}x$$

[v] Po dosazení uvádíme integrál v uvozovkách, protože není v korektním tvaru – jsou v něm jak proměnné x, tak proměnné t, což je nepřípustné!

Řešení. Jedná se o integrál z podílu dvou goniometrických funkcí. Ve jmenovateli se však vyskytuje funkce sinus ve čtvrté mocnině, což je neintegrovatelný výraz. Využijeme proto metodu substituce, ve které provedeme transformaci $\sin x = t$. V takovém případě nabude integrál po substituci tvaru:

$$\int \frac{3 \cdot \cos x}{\sin^4 x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \sin x = t & \mathrm{d}t = (sinx)'\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x & \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}t \end{array} \right| = \Big/ \int \frac{3\cos x}{t^4} \cdot \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}t \Big/ = 3 \cdot \int \frac{1}{t^4}\, \mathrm{d}t$$

Tento integrál je již tabulkový a lze jej po úpravě na mocninný tvar snadno integrovat. Nakonec opět provedeme zpět transformaci $t = \sin x$ na původní proměnnou x:

$$3 \cdot \int \frac{1}{t^4}\, \mathrm{d}t = 3 \cdot \int t^{-4}\, \mathrm{d}t = 3 \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{t^3} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{\sin^3 x} + C}}$$

Příklad 15. *Vypočítejme integrál*

$$\int \frac{2x\, \mathrm{d}x}{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}\, \mathrm{d}x$$

Řešení. Integrál před výpočtem upravíme tak, že ve jmenovateli integrovaného zlomku upravíme vzorec pro třetí mocninu dvojčlenu $1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = (1 - x^2)^3$ a konstantu 2 z čitatele vytkneme před integrál, obdržíme tak:

$$\int \frac{2x\, \mathrm{d}x}{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{x}{(1 - x^2)^3}\, \mathrm{d}x$$

Tento integrál budeme řešit metodou substituce. Ve jmenovateli zlomku, který máme integrovat je třetí mocnina výrazu $1 - x^2$, proto za vhodnou substituci zvolíme $t = 1 - x^2$. Provedeme-li transformaci proměnných, jak je obvyklé, obdržíme integrál:

$$2 \cdot \int \frac{x}{(1 - x^2)^3}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} 1 - x^2 = t & \mathrm{d}t = (1 - x^2)'\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = -2x\, \mathrm{d}x & \mathrm{d}x = -\frac{1}{2x}\, \mathrm{d}t \end{array} \right| = \Big/ 2 \cdot \int \frac{x}{t^3} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\, \mathrm{d}t \Big/ = -\int \frac{1}{t^3}\, \mathrm{d}t$$

To je již elementární integrál, který upravíme na mocninný tvar a integrujeme. Nakonec provedeme zpětnou transformaci proměnných $t = 1 - x^2$ a obdržíme výsledek.

$$-\int \frac{1}{t^3}\, \mathrm{d}t = -\int t^{-3}\, \mathrm{d}t = -\frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2t^2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2(1 - x^2)^2} + C}}$$

1.3 Příklady k procvičení neurčitého integrálu

1. Vypočtete následující integrály:

   (a)
   $$\int (x^2 + 1)^2\, \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C\right]$$

   (b)
   $$\int \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{x^3}{3} - x + C\right]$$

   (c)
   $$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad [-\cos x + C]$$

(d)
$$\int \frac{3x^2}{x^3-10}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\ln|x^3-10|\right]$$

(e)
$$\int \frac{2}{3}\sqrt[7]{x}+\frac{7}{2}\sqrt[4]{x^3}\ \mathrm{d}x \qquad \left[2\cdot\sqrt[4]{x^7}+\frac{7}{12}\cdot\sqrt[7]{x^8}+C\right]$$

(f)
$$\int \frac{2+x^2}{x^3}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\ln|x|-\frac{1}{x^2}+C\right]$$

(g)
$$\int \cot x\ \mathrm{d}x \qquad [\ln|\sin x|+C]$$

(h)
$$\int \frac{1+\sqrt{2}}{x\cdot\sqrt{2}}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ln|x|+C\right]$$

2. Vypočtete následující integrály metodou *per partes*:

(a)
$$\int (x-4)\sin x\ \mathrm{d}x \qquad [\sin x - x\cdot\cos x+4\cdot\cos x+C]$$

(b)
$$\int \left(\frac{1}{2}x^2-x-1\right)\cdot \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \qquad [\mathrm{e}^x\cdot(x^2-3x+2)+C]$$

(c)
$$\int \frac{x^2+1}{2}\cdot\ln x\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{x^3}{6}\ln x+\frac{x}{2}\ln x-\frac{x^3}{18}-\frac{x}{2}+C\right]$$

(d)
$$\int x\sin x+x\cos x\ \mathrm{d}x \qquad [(x+1)\sin x+(1-x)\cos x+C]$$

(e)
$$\int \frac{10\ln x}{x^{10}}\ \mathrm{d}x \qquad \left[-\frac{10}{89x^9}-\frac{10\ln x}{9x^9}+C\right]$$

(f)
$$\int 4x\ln x-4x\ \mathrm{d}x \qquad \left[x^2(2\ln x-3)+C\right]$$

(g)
$$\int x^3\cdot\cos x\ \mathrm{d}x \qquad \left[x^3\sin x+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x+C\right]$$

(h)
$$\int \left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \qquad [\mathrm{e}^x\cdot(x^3-3x^2+5x-5)+C]$$

3. Vypočtete následující integrály metodou substituce:

(a)
$$\int x^2\mathrm{e}^{-x^3}\ \mathrm{d}x \qquad \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x^3}+C\right]$$

(b)

$$\int \frac{e^x}{\frac{1}{7}e^x + 7}\ dx \qquad \left[7\ln\left|\frac{e^x}{7} + 7\right| + C\right]$$

(c)

$$\int \sin x \cdot \cos x\ dx \qquad \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos^2 x + C\right]$$

(d)

$$\int (4x-2) \cdot \sin(x^2 - x)\ dx \qquad \left[-2\cos(x^2 - x) + C\right]$$

(e)

$$\int \sqrt[6]{6 - \frac{x}{6}}\ dx \qquad \left[-\frac{36}{7} \cdot \sqrt[6]{\left(6 - \frac{x}{6}\right)^7} + C\right]$$

(f)

$$\int (4-7x)^{10}\ dx \qquad \left[-\frac{1}{77} \cdot (4-7x)^{11} + C\right]$$

(g)

$$\int 2 \cdot e^{2 \cdot \sin x} \cdot \cos x\ dx \qquad \left[e^{2\sin x} + C\right]$$

(h)

$$\int \frac{5x^4}{2 \cdot \sqrt{4 + x^5}}\ dx \qquad \left[\sqrt{4 + x^5} + C\right]$$

4. Vypočtete následující integrály vhodným postupem:

(a)

$$\int x \cdot \sin(2x-1)\ dx \qquad \left[\frac{1}{4}\sin(2x-1) - \frac{1}{2}x\cos(2x-1) + C\right]$$

(b)

$$\int x \cdot e^{(x^2-4)}\ dx \qquad \left[\frac{e^{x^2-4}}{2} + C\right]$$

(c)

$$\int \tan x + \cot x\ dx \qquad [\ln|\sin x| - \ln|\cos x| + C]$$

(d)

$$\int x \cdot \tan^2 x\ dx \qquad \left[-\frac{x^2}{2} + x\tan x + \ln|\cos x| + C\right]$$

(e)

$$\int 8x\cos 8x\ dx \qquad \left[x \cdot sin(8x) + \frac{1}{8}\cos(8x) + C\right]$$

(f)

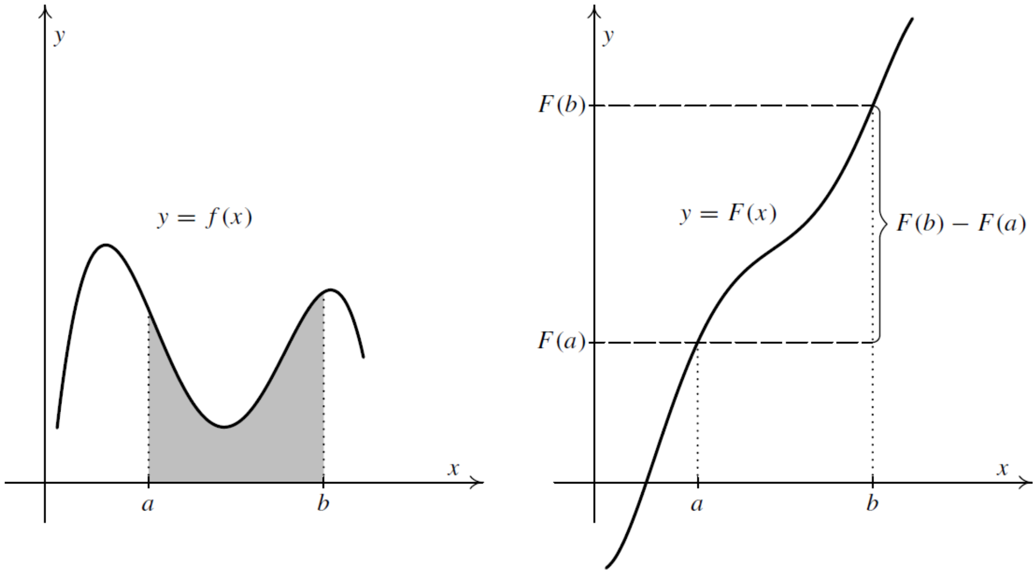
$$\int \frac{x}{2}\ln\frac{x}{2}\ dx \qquad \left[\frac{1}{8}x^2(2\ln x - 1 - 2\ln 2) + C\right]$$

1.4 Určitý integrál

Význam určitého integrálu dané funkce $f(x)$ v intervalu od a do b ilustruje Obrázek 2. Je zde patrné, že určitým integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu od a do b rozumíme plochu pod grafem této funkce.[vi]

Výpočet určitého integrálu je jednoduchý. Nejprve určíme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$ a určitý integrál na intervalu $(a; b)$ je pak roven rozdílu funkčních hodnot $F(b) - F(a)$. Zapsáno rovnicí:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{6}$$



Obrázek 2: Význam určitého integrálu funkce $f(x)$ od a do b. Spojitost s primitivní funkcí a jejími hodnotami je znázorněna vpravo.

Výpočet určitého integrálu tedy provedeme tak, že si nejdříve určíme primitivní funkci $F(x)$ k zadané funkci $f(x)$, do funkce $F(x)$ si pak dosadíme horní mez b a dolní mez a a tyto funkční hodnoty od sebe odečteme a obdržíme kýžený výsledek určitého integrálu. Pro ilustraci uvedeme několik příkladů. Podmínkou je, že funkce musí být na celém intervalu $(a; b)$ definována! V opačném případě určitý integrál neexistuje.

Příklad 16. *Vypočítejme určitý integrál*

$$\int_{-3}^{1} (x^2 - 1)\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Funkcí, kterou máme integrovat je $f(x) = x^2 - 1$. Podle pravidel pro integrování, která jsme uvedli výše tuto funkci zintegrujeme. Obdržíme tak $F(x) = \int (x^2 - 1)\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x$. Do této primitivní funkce dosadíme hodnoty horní meze $b = 1$ a dolní meze $a = -3$ a podle vztahu (6) dostaneme přímočaře výsledek:

[vi] Je na místě podotknout, že plochu pod osou x integrál bere jako zápornou a plochu nad osou x jako kladnou.

$$\int_{-3}^{1} (x^2 - 1)\ \mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-3}^{1}}_{[F(x)]_a^b} = \underbrace{\left(\frac{1^3}{3} - 1\right)}_{F(b)} - \underbrace{\left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3)\right)}_{F(a)} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

Příklad 17. *Vypočítejme určitý integrál*

$$\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Určíme nejprve primitivní funkci k funkci $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$. Upravíme si první sčítanec na mocninný tvar a integrujeme. Následně dosadíme integrační meze a určitý integrál vyčíslíme:

$$\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{3} + \ln 2\right) - \left(\frac{2 \cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3} + \ln 1\right) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \ln 2}}$$

Příklad 18. *Vypočítejme určitý integrál*

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4}$$

Řešení. Jedná se o integrál, který budeme řešit substituční metodou. Položíme $t = x^2 - 4$. Postup je identický s integrací jako u neurčitého integrálu. Výhodou však je, že nemusíme funkci zpět z proměnné t transformovat do x, pokud při substituci transformujeme integrační meze (které jsou uvedeny pro proměnnou x) také do proměnné t. V našem případě, jak jsme již řekli, použijeme substituci $t = x^2 - 4$, proto integrační mez 3 přejde na $t = 3^2 - 4 = 5$ (tedy $3 \to 5$) a obdobně $7 \to 45$. Pak můžeme k výpočtu hodnot primitivní funkce použít přímo proměnné t. Substitucí tedy obdržíme (včetně integračních mezí):

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} = \left| \begin{array}{lcc} x^2 - 4 = t & \mathrm{d}t = (x^2 - 4)'\ \mathrm{d}x & 3 \to 5 \\ \mathrm{d}t = 2x\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\ \mathrm{d}t & 7 \to 45 \end{array} \right| = \Big/ \int_5^{45} \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{2x}\ \mathrm{d}t \Big/ = \frac{1}{2} \cdot \int_5^{45} \frac{1}{t}$$

Tento integrál integrujeme a po integraci podle t můžeme přímo dosadit transformované integrační meze:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_5^{45} \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \cdot [\ln|t|]_5^{45} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 45 - \ln 5) = \underline{\underline{\ln 3}}$$

Příklad 19. *Vypočítejme určitý integrál*

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x\ \mathrm{d}x$$

Řešení. Jedná se o integrál, jehož primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = x \cos x$ budeme hledat metodou *per partes*. Nejprve si touto metodou vypočteme primitivní funkci $F(x)$:

$$F(x) = \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int x \cdot \cos x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= x \sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x$$

Pro určitý integrál ale platí $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ a máme-li zjištěnu primitivní funkci $F(x)$, můžeme rovnou do tohoto vztahu vypočtenou primitivní funkci vložit, dosadit integrační meze a počítat:

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x\ \mathrm{d}x = [x \sin x + \cos x]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (-\pi \cdot \sin(-\pi) + \cos(-\pi)) = \underline{\underline{\frac{2+\pi}{2}}}$$

1.5 Příklady k procvičení určitého integrálu

1. Vypočítejte neurčité integrály vhodnými metodami:

   (a)
   $$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{9}{10}\right]$$

   (b)
   $$\int_{-1}^{1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x - 1}\ \mathrm{d}x \qquad \left[-\frac{4}{3}\right]$$

   (c)
   $$\int_1^{\mathrm{e}} 1 - \mathrm{e}^x + \frac{100}{x}\ \mathrm{d}x \qquad [99 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$$

   (d)
   $$\int_6^{12} \frac{x^2 - 13x + 19}{x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{91}{12} - 13 \ln 2\right]$$

   (e)
   $$\int_{-1}^{1} (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)\ \mathrm{d}x \qquad [-16]$$

2. Vypočítejte neurčité integrály vhodnými metodami:

   (a)
   $$\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e} - 1)\right]$$

   (b)
   $$\int_0^{\pi} 3 \sin x \cos^2 x\ \mathrm{d}x \qquad [2]$$

   (c)
   $$\int_0^1 \sin(\pi x - \pi)\ \mathrm{d}x \qquad \left[-\frac{2}{\pi}\right]$$

   (d)
   $$\int_1^{\sqrt{2}} x^5 - \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{7}{6} - \frac{\ln 2}{2}\right]$$

   (e)
   $$\int_0^1 x\sqrt{3x^2 + 5}\ \mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{9} \cdot (16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})\right]$$