Cvičenie 30.10.2019

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t\right) = f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}t \tag{1}$$

"I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. [It] showed how to differentiate parameters under the integral sign — it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. [If] guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, [then] I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me."

from *Surely you're Joking, Mr. Feynman!*

1. Příklad

Integrál Maxwell-Boltzmannova rozdělení nutný pro výpočet makroskopických veličin plazmatu (koncentrace částic, driftová rychlost, energie) často vede na výpočet integrálu ve tvaru:

$$I(t) = \int_0^\infty v^t \exp\left(-\alpha v^2\right) \mathrm{d}v. \tag{2}$$

(a) Dokažte, že obecně tento integrál můžeme převést na tzv. Gamma funkci ve tvaru: $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Dokažte, že pro Gamma funkci platí: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(c) Pro $z \in N$ dokažte, že $\Gamma(n) = (n-1)!$

(d) Stanovte $\Gamma(\frac{1}{2})$. (Možná budete muset využít řešení integrálu $I = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(x^2+y^2)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$).

(e) Dále vypočítejte: $\Gamma(1)$, $\Gamma(5)$, $\Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{7}{2})$.

2. Příklad

Maxwell-Boltzmannovo rozdělení velikosti rychlosti je dáno vztahem:

$$F(v) = 4\pi C v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]. \tag{3}$$

(a) Normováním na koncentraci částic n, stanovte konstantu C.

(b) Stanovte nejpravděpodobnější rychlost v_p.

(c) Stanovte střední rychlost $< v >$.

(d) Stanovte odmocninu ze střední kvadratické rychlosti $\sqrt{< v^2 >}$.

(e) Porovnejte tyto rychlosti.

3. Příklad

Rozdělení kinetické energie částic, jejichž rozdělení rychlostí je Maxwell-Boltzmannovo, je dáno vztahem:

$$G(E) = AE^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{E}{kT}\right]. \tag{4}$$

(a) Normováním na koncentraci částic n, stanovte konstantu A.

(b) Stanovte nejpravděpodobnější energii E_p a zjistěte, jaké rychlosti odpovídá.

(c) Stanovte střední energii $< E >$ a zjistěte, jaké rychlosti odpovídá.