Gamma funkcie

Jan Tungli

I. Gamma funkcie

Gamma funckie [1] sú funkcie definované integrálom:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

Vyskytujú sa veľmi často pri počítaní momentov v štatistickej fyzike. Tam ich väčšinou vidíme v inom tvare, s kvadratickou funkciou v exponente, napr.:

$$f(y) = \int_0^\infty x^y \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \tag{2}$$

Táto funkcia sa dá prepísať do predošlého tvaru Gamma funkcie substitúciou (výhodou sú potom tabuľkové hodnoty). Substitúcia bude $x^2 = t$:

$$x^2 = t \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{t} \qquad\qquad (t \geq 0) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x = 2\sqrt{t}\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$f(y) = \int_0^\infty x^y \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \sqrt{t}^y \mathrm{e}^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sqrt{t}^{y-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{y-1}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{y+1}{2}-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) \tag{6}$$

Príklad:

$$\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{7}$$

Posledný krok je vyhľadanie v tabuľke (napr. [2])

I. Konštanta v exponente

Často okrem iného tvaru je v exponente konštanta:

$$g(y) = \int_0^\infty x^y \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x \tag{8}$$

V tomto prípade substitúcia $t = ax^2$ rieši problém:

$$ax^2 = t \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{t}{a}} \qquad\qquad (t \geq 0) \tag{9}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = 2ax\mathrm{d}x = 2a\sqrt{\frac{t}{a}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{at}\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{at}}\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$g(y) = \int_0^\infty x^y \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{y}{2}} \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2\sqrt{at}}\mathrm{d}t = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{y+1}{2}}}\int_0^\infty \sqrt{t}^y \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \tag{12}$$

Integral uz bol spočítaný:

$$g(y) = \frac{1}{a^{\frac{y+1}{2}}} f(y) = \frac{1}{2a^{\frac{y+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) \tag{13}$$

Príklad:

$$\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \tag{14}$$

II. Konkrétne hodnoty Gamma funkcie

$$\Gamma(1) = 1 \qquad\qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{15}$$

$$\Gamma(2) = 1 \qquad\qquad \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{16}$$

$$\Gamma(3) = 2 \qquad\qquad \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \tag{17}$$

$$\Gamma(4) = 6 \qquad\qquad \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

III. Nemám po ruke tabuľky...

Hodnoty v predchádzajúcej časti je možné vypočítať ešte relatívne jednoducho. Môžeme si odvodiť užitočný vzťah pomocou *per partes* na definíciu Gamma funkcie:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (z-1)t^{z-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \tag{20}$$

$$= (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \equiv (z-1)\Gamma(z-1) \tag{21}$$

Z toho je zrejmé, že predošlú tabuľu je možné odvodiť celú, pokiaľ poznáme (napr.) $\Gamma(1)$ a $\Gamma(1/2)$.

Príklad:

$$\Gamma(3) = (3-1)\,\Gamma(3-1) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1\,\Gamma(1) = 2 \tag{22}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}-1)\,\Gamma(\frac{3}{2}-1) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{23}$$

Pre $\Gamma(1)$ vyzerá integrál takto:

$$\int_0^\infty t^0 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\infty} = 1 \tag{24}$$

Pre $\Gamma(\frac{1}{2})$ je to o niečo horšie:

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{25}$$

Niektoré matematické problémy sa riešia jednoduchšie keď sa zkomplikujú. Preto vyriešime:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{26}$$

zavedením polárnych súradníc:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi y(r,\varphi) = r\sin\varphi \tag{27}$$

Potrebujeme Jakobián transformácie:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \tag{28}$$

Náš integrál je:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}|J|\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \tag{29}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \tag{30}$$

Myšlienka, ktorou sa dostaneme späť ku Gamma funkciám: môžeme napísať pôvodný integrál ako:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y, \tag{31}$$

je vidieť, že integrály sú nezávislé, takže:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z\right)^2 \tag{32}$$

Tým sa výsledok samozrejme nezmenil:

$$\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z\right)^2 = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \tag{33}$$

Už bolo ukázané $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z$ sa dá prepísať na Gamma funkciu:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{34}$$

References

[1] WolframAlpha. *Gamma Function*. 2017. URL: `http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html` (visited on 10/20/2017).

[2] Wikipedia. *Particular values of the Gamma function*. 2017. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_the_Gamma_function` (visited on 10/20/2017).