Jak popsat změnu

Funkce, limita, derivace

Petr Liška

Masarykova univerzita

1.10.2019 – 29.10.2019

Funkce

Definice

Nechť jsou dány množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Definice

Grafem funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Vlastnosti funkcí

Definice

Funkce f se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in D(f)$.

Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Definice

Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

Definice

Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nové funkce ze starých

Definice

Nechť $u\colon A \to B$ a $f\colon B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce u se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice

Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Definice

Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce.*

Věta

Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

1. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou rostoucí, funkce* $\arccos x$ *a* $\operatorname{arccotg} x$ *jsou klesající.*
2. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou liché.*

Polynom

Definice

Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu.
Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, *kde* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *je polynom stupně* $n \geq 0$.

1. *(Základní věta algebry.) Polynom* P *má nad komplexním oborem* $\mathbb{C}$ *právě* n *kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*
2. *Je-li komplexní číslo* α k*-násobným kořenem reálného polynomu* P*, je číslo komplexně sdružené* $\bar{\alpha}$ *též* k*-násobným kořenem polynomu* P*.*
3. *(Rozklad polynomu v oboru reálných čísel.) Jsou-li* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *všechny reálné kořeny polynomu* P *s násobnostmi* $k_1, \ldots, k_r$ *a* $(c_1 \pm i d_1)$, …, $(c_s \pm \mathrm{i} d_s)$ *všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*, platí*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r}[(x-c_1)^2+d_1^2]^{r_1} \cdots [(x-c_s)^2+d_s^2]^{r_s}.$$

4. *Nechť* $a_n = 1$*. Je-li celé číslo* α *kořenem polynomu* P *s celočíselnými koeficienty, pak* α *je dělitelem čísla* a_0*.*

Dvě základní úlohy

Příklad

Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

Příklad

Najděte rozklad polynomu na kořenové činitele

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$$

$$P(x) = x^4 - 7x^2 - 4x + 20$$

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

Příklad

Napište danou funkci jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce

$$R(x) = \frac{3x^5 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x + 1}$$

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

a) Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k-násobné kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots \frac{A_kx + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

a)

$$\frac{6x^2 + 26x + 26}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

b)

$$\frac{1}{x^3(x-1)}$$

c)

$$\frac{2x^2}{x^4 - 1}$$

Limita a spojitost

„Naivní“ definice

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Pro ty, jež vyžadují přesnost

Definice

Nechť x_0, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme *okolím bodu* ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Definice

Nechť x_0, $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Věta

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0.

Věta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Věta

Nechť existují obě vlastní limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

- *a)* $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
- *b)* $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
- *c) Je-li* $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,
- *d)* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$.

Platí

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Nevíme

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Spojitost funkce

Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definice

Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, je v něm funkce spojitá zprava (zleva).

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty.

Věta (Bolzanova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Derivace funkce

Definice

Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* f *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$.

Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Věta

Pro derivace elementárních funkcí platí:

$$c' = 0, \qquad (x^a)' = a x^{a-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.

Věta

Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:

a) $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$,

b) $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$,

c) $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Věta

Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Příklad

Vypočtěte derivace funkcí

$$y = 3x^3 + x + 2, \quad y = x\operatorname{arctg} x, \quad y = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$y = \sqrt{2x^2 + x}, \quad y = \ln^2 \sin x$$

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro rovnici normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, platí

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0, \\ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0\ . \end{aligned}$$

Věta

Nechť f *má derivaci na otevřeném intervalu* I.

a) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *rostoucí na* I.

b) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *klesající na* I.

Věta (Lagrangeova věta)

Nechť funkce f *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a v každém bodě* $x \in (a, b)$ *má derivaci* $f'(x)$. *Pak existuje bod* $c \in (a, b)$, *pro který platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Důsledek

Nechť funkce f, g *mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu* I. *Jestliže pro všechna* $x \in I$ *platí* $f'(x) = g'(x)$, *pak se funkce* f, g *liší o konstantu, tj. existuje* $c \in \mathbb{R}$ *takové, že* $f(x) = g(x) + c$.
Zejména jestliže $f'(x) = 0$ *na* I, *pak je* f *na* I *konstantní.*

Derivace a extrémy funkce

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta (Fermatova)

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \ln^2 x$$

Příklad

Ve městě s 10 000 obyvateli je počet N lidí, kteří mají v daném čase t chřipku, roven

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 9999\mathrm{e}^{-t}},$$

kde t je čas měřený ve dnech a chřipka je rozšířena jedinou osobou, která ji měla v čase $t = 0$. Určete, kdy je rychlost šíření nemoci největší.

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = x^2 \ln x, \qquad x \in [1, \mathrm{e}]$$

Příklad

Máme směs kyslíku a oxidu dusnatého. Okysličování oxidu dusnatého probíhá podle reakce

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

a pro její rychlost v platí

$$v \ = k[NO]^2[O_2],$$

kde $k > 0$ je rychlostní konstanta. Určete takovou koncentraci kyslíku v této směsi, při které se oxid dusnatý nejrychleji okysličí.

Užitečný nástroj - L'Hospitalovo pravidlo

Věta

Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Využitím různých triků se na tyto dva případy dají převést i ostatní tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

Příklad

Vypočtěte náledující limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

Jak derivace ovlivňuje tvar grafu?

Konvexní a konkávní funkce

Definice

Leží-li graf funkce f nad každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

Leží-li graf funkce f pod každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.

Věta

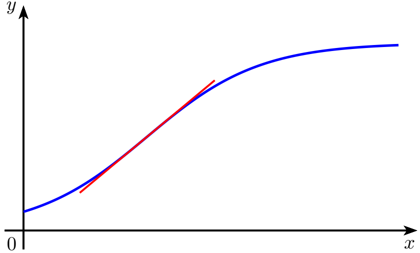
Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.

Definice

Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je f v x_0 spojitá a jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak.



Věta

a) Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.

b) Nechť $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Příklad

Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Asymptoty funkce

Definice

Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$$

(obě tyto limity jsou vlastní). Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Příklad

Určete asymptoty grafu funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Stanovíme definiční obor $D(f)$. Určíme nulové body a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Případně zda je funkce f sudá, lichá nebo periodická.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Najdeme asymptoty funkce f.
5. Nakreslíme graf funkce.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

víte-li, že

$$y' = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}, \qquad y'' = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}.$$

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$y = x\mathrm{e}^x$$

víte-li, že

$$y' = (x+1)\mathrm{e}^x, \qquad y'' = (x+2)\mathrm{e}^x.$$

Přibližné vyjádření hodnot funkce - Aproximace

Tečna a diferenciál

Jak již víme, tečna funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tedy přibližné hodnoty funkce v okolí bodu x_0 jsou dány vztahem

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Diferenciálem funkce f rozumíme přírůstek funkce na tečně ke grafu funkce v daném bodě s označujeme jej $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f$.
Diferenciál můžeme snadno vyjádřit pomocí derivace

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

Tedy pomocí diferenciálu můžeme psát

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y.$$

Základní lineární aproximace

Najděte lineární aproximace následujících funkcí v okolí nuly

a) $\sin x$

b) $\cos x$

c) $(1 + x)^n$

Rovnice Michaelise a Mentenové

Pro rychlost chemických reakcí enzymů platí za zjednodušujících předpokladů

$$v_0 = \frac{v_{max}[S]}{K_M + [S]}.$$

Jak se dá tato rovnice zjednodušit pro malé hodnoty $[S]$?

Odhad chyby

Jaké chyby se dopustíme při výpočtu objemu koule, jestliže její poloměr $r = 21\,\mathrm{cm}$ byl změřen s chybou maximálně $0{,}05\,\mathrm{cm}$?

Co když přímka nestačí?

Definice

Nechť má funkce f v bodě x_0 všechny derivace až do řádu n, které jsou vlastní. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme Taylorův polynom stupně n pro funkci f se středem v bodě x_0.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \textit{kde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ je vhodné číslo mezi x_0 a x.

Příklad

Napište Taylorův polynom n-tého stupně se středem v bodě x_0 funkce f:

a) $n = 3$, $x_0 = 1$, $f = \ln x$

b) $n = k$, $x_0 = 0$, $f = \mathrm{e}^x$.

Lennard-Jonesův potenciál

Napište Taylorův polynom druhého stupně pro funkci

$$V(r) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{2}{r^6}$$

se středem v bodě $r = 1$.

Interpolace

Lagrangeův interpolační polynom

Věta

Pro každou množinu navzájem různých bodů $[x_0, y_0], \dots, [x_n, y_n]$ v rovině existuje právě jeden polynom P stupně nejvýše n, pro který platí

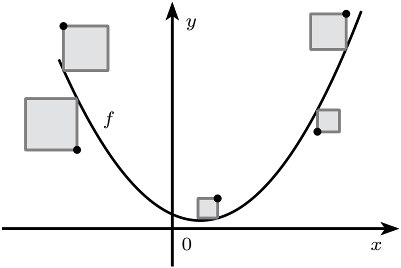
$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

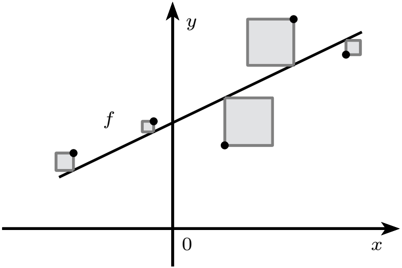
$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x),$$

kde

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \\ &= \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}. \end{aligned}$$

Metoda nejmenších čtverců





Věta

Nechť $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\dots$, $[x_n, y_n]$ *jsou body v rovině, které prokládáme přímkou* $y = ax + b$ *metodou nejmenších čtverců, tj. hledáme minimum funkce* $S(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$.
Pak pro koeficienty a, b platí:

$$\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn \quad &= \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{aligned}$$