Derivace a integrál aneb cesta tam a zase zpátky

Od rychlosti k množství

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.10.2019 – 5.11.2019

Neurčitý integrál

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I*. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazýváme *neurčitý integrál* funkce f a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta

Je-li funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci f má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Věta

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť α je libovolná konstanta. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f+g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
&(1) && \int 1\,\mathrm{d}x = x + c,\\
&(2) && \int x^n\,\mathrm{d}x = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,\\
&(3) && \int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c,\\
&(4) && \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,\\
&(5) && \int a^x\,\mathrm{d}x = \tfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1,\\
&(6) && \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c,\\
&(7) && \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\\
&(8) && \int \tfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c,\\
&(9) && \int \tfrac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{x-x_0}{a}\right) + c,\\
&(10) && \int \tfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\tfrac{x}{a} + c,\\
&(11) && \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c,\\
&(12) && \int \tfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,\\
&(13) && \int \tfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,\\
&(14) && \int \tfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.
\end{aligned}
$$

Metoda per partes

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substituční metoda

Věta

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + c.$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrace racionální lomené funkce

$$K_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2-2n} K_{n-1}(x),$$

kde

$$K_1(x) = \operatorname{arctg} x,$$

$$\int \frac{Ax+B}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^n}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{A}{2}\frac{1}{(1-n)\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{B+Ax_0}{a^{2n-1}} K_n\left(\frac{x-x_0}{a}\right).$$

Integrace funkcí s odmocninami

Integrál z funkce typu

$$R\left(x,\ \sqrt[q_1]{x^{p_1}},\ \sqrt[q_2]{x^{p_2}}, \dots,\ \sqrt[q_n]{x^{p_n}}\right),$$

kde $p_1 \dots, p_n, q_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$, můžeme substitucí

$$x = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1, \dots, q_n$, převést na integraci racionální lomené funkce. Integrály z funkcí tvaru

$$R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

převedeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Integrace funkcí typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$

1. Je-li integrovaná funkce lichá vůči cosinu, tj. platí-li
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
pak volíme substituci $t = \sin x$.
2. Je-li integrovaná funkce lichá vůči sinu, tj. platí-li
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
pak volíme substituci $t = \cos x$.
3. Platí-li
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$
volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$.

Univerzální substituce je
$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$