Odsud až do nekonečna

Nevlastní integrál

Petr Liška

Masarykova univerzita

19.11.2019

Nevlastní integrál prvního typu

Definice

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, \infty)$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

říkáme, že *nevlastní integrál*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konverguje. Jeho hodnota je

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V opačném případě, kdy je limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje*.

Příklad

Rozhodněte, zda-li následující integrály konvergují nebo divergují

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;
b) $\int_1^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;
c) $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$;
d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Příklad

Pro které hodnoty parametru p je integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

konvergentní?

Nevlastní integrál druhého typu

Definice

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $(a, b]$ a funkce f není ohraničená na $[a, b]$. Pak bod a nazýváme singulárním bodem a definujeme *nevlastní integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže je tato limita vlastní, říkáme, že integrál *konverguje*. V opačném případě, kdy je limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Příklad

Rozhodněte, zda-li následující integrály konvergují nebo divergují

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

d) $\int_{-1}^1 \ln|x|\,\mathrm{d}x$;

Příklad

Pro které hodnoty parametru p je integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

konvergentní?

Srovnávací věta

Věta

Nechť f a g jsou spojité funkce takové, že $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pro $x \geq a$.

a) Konverguje-li integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, pak konverguje i integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Diverguje-li integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, pak diverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad

Ukažte, že integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

konverguje a integrál

$$\int_1^\infty \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

diverguje.

Příklad

Užitím vztahu $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ vypočtěte

a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$, kde $a > 0$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad

Určete obsah oblasti ohraničené grafem funkce $y = \frac{1}{x}$ a osou x na intervalu $[1, \infty)$. Dále určete objem a povrch pláště tělesa, které vznikne rotací této oblasti kolem osy x.

Příklad

Průměrná rychlost molekul ideálního plynu je

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \mathrm{e}^{-Mv^2/(2RT)} \, \mathrm{d}v,$$

kde M molekulární hmotnost, R je konstanta, T je teplota a v rychlost molekul. Ukažte, že

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Příklad

Pro množství látky při radioaktivním rozpadu platí $m(t) = m(0)\mathrm{e}^{-kt}$, kde k je kladná konstanta. Střední doba života je

$$M = k \int_0^\infty t \mathrm{e}^{kt} \, \mathrm{d}t.$$

Určete M pro $^{14}\mathrm{C}$, pro který platí $k = 0{,}000121$.

Laplaceova transformace

Je-li f spojitá funkce pro $t \geq 0$, pak Laplaceovou transformací funkce f rozumíme funkci F definovanou

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Určete Laplaceovu transformaci následujících funkcí

a) $f(t) = 1$;

b) $f(t) = \mathrm{e}^t$;

c) $f(t) = t$.