Množství, obsahy, objemy a taky délky a povrchy

Určitý integrál

Petr Liška

Masarykova univerzita

12.11.2019

(Riemannův) určitý integrál

Jedna z mnoha definic

Definice

Nechť f je funkce ohraničená na $[a, b]$. Nechť $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ jsou body dělící interval $[a, b]$ na n stejných subintervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a nechť $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. *Určitým integrálem funkce f od a do b* rozumíme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na $[a, b]$.
Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez* a funkci f *integrand*.

Jak určitý integrál spočítat?

Věta (Newton-Leibnitzova formule)

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a, b]$.

Věta (Linearita určitého integrálu)

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, pak platí tyto vztahy:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Vlastnosti určitého integrálu)

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, pak platí následující:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *kde* $a < c < b$;

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, *jestliže* $f(x) \geq 0$ *na intervalu* $[a, b]$;

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *jestliže* $f(x) \geq g(x)$ *na intervalu* $[a, b]$;

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Věta (Integrál jako funkce horní meze)

Buď f spojitá funkce na intervalu I a $a \in I$. Funkce $F(x)$ definovaná vztahem

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

má na intervalu I derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Geometrické (a jiné) aplikace

Obsah rovinného obrazce

Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Obsah podgrafu funkce f je dán vzorcem

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Délka křivky

Nechť funkce f je spojitá a má spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Délka grafu této funkce na intervalu $[a, b]$ je dána

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačního tělesa

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f

$$P = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

kolem osy x je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obsah pláště rotačního tělesa

Nechť f je nezáporná funkce mající spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$. Obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x, je dán určitým integrálem

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Střední hodnota

Nechť f je funkce definovaná a integrovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Číslo μ definované vztahem

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Můžeme formulovat vorzce pro různé momenty, těžiště, hmotnost, práci atd.

Metody výpočtu

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Substituce pro určitý integrál)

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$ a $\varphi(x)$ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ do intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jedna z možností numerické integrace

Věta (Lichoběžníkové pravidlo)

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Rozdělme interval na n intervalů stejné délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\,.$$