Když jedna funkce nestačí

Nekonečné řady funkcí

Petr Liška

Masarykova univerzita

3.12.2019

Definice

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Poloměr konvergence r je číslo

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Mohou nastat tři možnosti:

1. Je-li $0 < r < \infty$, pak řada konverguje pro $x \in (-r, r)$ a diverguje pro $|x| > r$. Pro hodnoty $x = \pm r$ musíme rozhodnout zvlášť pomocí některého z kritérií konvergence pro číselné řady.
2. Je-li $r = \infty$, pak řada konverguje pro všechna x.
3. Je-li $r = 0$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$ a říkáme, že řada vždy diverguje.

Příklad

Určete poloměr konvergence pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Základní otázky o mocninných řadách (a celkově o funkčních řadách) jsou:

1. Je součtem řady spojitých funkcí na intervalu I také funkce spojitá na intervalu I?
2. Pro která x můžeme mocninou řadu derivovat člen po členu?
3. Pro která x můžeme mocninou řadu integrovat člen po členu?

Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$. *Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu* $(-r, r)$.

Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$. *Pak pro všechna* $x \in (-r, r)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots ,$$

a

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\, \mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots$$

Přitom výrazy na pravé straně mají stejný poloměr konvergence.

Příklad

Vyjádřete funkci $\ln(1+x)$ mocninnou řadou.

Příklad

Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \cdots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

Definice

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.*

Věta

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť pro posloupnost $\left\{f^{(n)}\right\}$ existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje na I k f, tj. platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Významné Maclaurinovy řady

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1)$$

Příklad

Odvoďte tzv. *Eulerův vztah*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

Fourierovy řady

Definice

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Nekonečná řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde pro a_n a b_n platí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

se nazývá *Fourierova řada funkce* f na intervalu $[-\pi, \pi]$ a koeficienty a_n, b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty* funkce f.

Je-li f sudá funkce, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Abelova věta

Funkci f nazveme *po částech spojitou* na intervalu $[a, b]$, jestliže na tomto intervalu existuje pouze konečný počet bodů x_0, ve kterých je nespojitá a v každém z těchto bodů má obě jednostranné limity a ty jsou vlastní. Označme $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ a $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Navíc funkci f nazveme *po částech monotonní*, jestliže existuje konečný počet bodů, které dělí interval $[a, b]$ na kratší intervaly takové, že v každém z nich je daná funkce monotonní.

Věta

Nechť f je po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven:

1. *$f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f spojitá,*
2. *$\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f nespojitá,*
3. *$\frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]$ v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Příklad

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ a pomocí získaného výsledku určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Příklad

Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$