Achilles želvu dožene

Nekonečné řady

Petr Liška

Masarykova univerzita

26.11.2019

Posloupnosti

Posloupnosti

Definice

Posloupnost je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{N}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-tý prvek označujeme nejčastěji a_n.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > M$.

Pokud takováto limita existuje, říkáme, že posloupnost *konverguje*. Má-li posloupnost limitu ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že *diverguje*. Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad

Určete součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad \text{kde} \quad a \neq 0,\ q \neq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Příklad

Ukažte, že tzv. *harmonická řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Kritéria konvergence

Věta (Limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n\to\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$*, pak* $\sum_{n\to\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$*, pak řada* $\sum_{n\to\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad

Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Kritéria konvergence

Věta (Limitní odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n\to\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde} \quad q \in \mathbb{R}^{\star}.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum_{n\to\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$, *pak řada* $\sum_{n\to\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad

Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n}\right)^n, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Kritéria konvergence

Věta (Integrální kritérium)

Nechť funkce f je kladná a klesající na intervalu $[1, \infty)$. Nechť $a_n = f(n)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad

Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

Alternující řady

Definice

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Leibnitzovo kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně*.

Pravidla pro počítání s nekonečnými řadami

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = v$*. Pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = u + v$*.*

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$ *konverguje též řada* $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naopak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$*, kde* $k \in \mathbb{R}$*,* $k \neq 0$*, konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní řada a nechť* $\{n_k\}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme* $n_0 = 0$ *a pro* $k \in \mathbb{N}$ *označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdot a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *vzniklá přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$