

Obsah

Předmluva	2
2 Lineární algebra	3
3 Polynomy, racionální lomené funkce a parciální zlomky	5
4 Vlastnosti funkce a jednoduché limity	6
5 Derivace funkce	8
6 L'Hospitalovo pravidlo, aplikace derivací	10
7 Průběh funkce	12
8 Neurčitý integrál I	14
9 Neurčitý integrál II	16
10 Výpočet určitého integrálu	17
11 Aplikace určitého integrálu	18
12 Nevlastní integrály a interpolace	19
13 Nekonečné řady	21

Předmluva

Tato sbírka slouží jako doplněk knihy Matematika pro nematematické obory (Došlá, Liška), případně skript Matematika pro chemiky I (Došlá). Obsahem jsou příklady, které mohou být použity ve výuce předmětu M1020 Matematika I - seminář, případně při domácí přípravě. Řazení jednotlivých kapitol se řídí orientačním harmonogramem předmětu M1020.

Sbírka rozšiřuje uvedené učebnice o příklady, které se typicky vyskytují na zkoušce z předmětu M1010 Matematika I, případně o další příklady na důležitá témata (derivace, průběh funkce, integrální počet) tak, aby byla další možnost jejich procvičení. Přirozeným doplňkem sbírky je elektronický učební text .

Sbírka byla vytvořena v rámci projektu Matematika pro chemiky podpořeného Fondem rozvoje Masarykovy univerzity.

Týden 2

Lineární algebra

1. Uveďte příklad matice 3×2 , která má hodnost 2.
2. Uveďte příklad matice 3×3 , která má hodnost 2.
3. Udejte příklad systému dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, který nemá žádné řešení.
4. Udejte příklad systému dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, který má nekonečně mnoho řešení.
5. Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

6. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (jedno řešení)

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 7 \\ 3x - y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y &= -1 \\ 3x - y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

a) $[\frac{17}{11}, \frac{12}{11}, \frac{19}{11}]$, b) $[1 - 1, 0]$, c) $[2, -2, -1]$, d) $[2, 1, 1]$.

7. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (nemá řešení)

a)
$$\begin{aligned} a + 3b - 2c + d &= 0 \\ 2a + 5b - 3c + 3d &= 0 \\ a + 2c - 2d &= 9 \\ 4a + 10b - 6c + 6d &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a - 2b + 3c - d + 2e &= 2 \\ 3a - b + 5c - 3d - e &= 6 \\ 2a + b + 2c - 2d - 3e &= 8 \end{aligned}$$

8. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (nekonečně mnoho řešení)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x - 2y + z = 4 \\ & 2x + 3y - z = 3 \\ & 4x - y + z = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & a + 3b + 5c - 4d = 1 \\ & a + 3b + 2c - 2d + e = -1 \\ & a - 2b + c - d - e = 3 \\ & a - 4b + c + d - e = 3 \\ & a + 2b + c - d + e = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & a + b + c + d = 1 \\ & 2a + 2b + 2c = 0 \\ & a + b + 5c - d + 6e = 1 \\ & a + b - 3c + d - 6e = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & a - 2b + c + d - e = 0 \\ & 2a + b - c - d + e = 0 \\ & a + 7b - 5c - 5d + 5e = 0 \\ & 3a - b - 2c + d - e = 0 \end{aligned}$$

$$\text{a)} \left(\frac{18}{7} - \frac{1}{7}t, \frac{3}{7}t - \frac{5}{7}, t\right), \text{ b)} (-t, -1 - t, 0, -1 - t, 2t), \text{ c)} \left(-\frac{1}{2} - s + \frac{3}{2}t, s, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, 1, t\right), \text{ d)} (0, 0, 0, t, t).$$

9. Vypočtete determinant matice:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{a)} 3, \text{ b)} -34, \text{ c)} 14, \text{ d)} -248.$$

Týden 3

Polynomy, racionální lomené funkce a parciální zlomky

1. Vyřešte nerovnici $(x^3 - x^2)(x - 2) \geq 0$.

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

2. Určete intervaly, kde je funkce $y = x^2(x - 1)$ kladná, resp. záporná, a načrtněte její graf.

$$\text{kladná pro } x > 1, \text{ záporná pro } x < 1$$

3. Určete všechny reálné kořeny polynomu $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$$

4. Určete reálné kořeny polynomu $P(x) = (x^3 - 1)(x - 2)$. Načrtněte graf tohoto polynomu.

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

5. Napište polynom třetího stupně, který má jednoduché kořeny $x = -1$, $x = 0$ a $x = 1$. Načrtněte graf tohoto polynomu.

$$x(x^2 - 1)$$

6. Napište polynom třetího stupně, který má jednoduchý kořen $x = 2$ a dvojnásobný kořen $x = 0$. Určete, kde je tento polynom kladný a kde záporný. Načrtněte jeho graf.

$$x^2(x - 2)$$

7. Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

a) $R(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2}$,

b) $R(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$,

c) $R(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x(x^2 + 1)}$,

d) $R(x) = \frac{2x - 1}{x(x+1)^2}$,

e) $R(x) = \frac{5x - 14}{(x-1)(x^2 - 4)}$,

f) $R(x) = \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6}$,

g) $R(x) = \frac{x^2 - x}{(x+1)^3}$,

h) $R(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 4)(x + 2)}$.

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2}$, b) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}$, c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+1}$, d) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$, e) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2}$, f) $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-2}$,
g) $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$, h) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+4}$.

Týden 4

Vlastnosti funkce a jednoduché limity

1. Najděte inverzní funkci k dané funkci (a nakreslete graf)

a) $y = \ln(x - 2)$,

b) $y = \frac{1}{x+1}$,

c) $y = 10^{x-1}$,

d) $y = e^{-x}$,

e) $y = 3e^x$,

f) $y = 2 \log x$,

g) $y = e^x + 1$,

h) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $y = e^x + 2$, b) $y = \frac{1}{x} - 1$, c) $y = \log x + 1$, d) $y = -\ln x$, e) $y = \ln \frac{x}{3}$, f) $y = 10^{\frac{x}{2}}$, g) $y = \ln(x - 1)$,
h) $y = \operatorname{arctg} 3x$

2. Nakreslete graf závislosti pH

$$\text{pH} = -\log[H_3O^+]$$

na koncentraci oxoniových kationtů v dané látce. Co se stane s hodnotou pH, zvýší-li se koncentrace oxoniových kationtů?

3. Nakreslete graf závislosti objemu plynu $V = \frac{RT}{P}$ na tlaku P . S rostoucím tlakem objem roste nebo klesá?

4. Množství dané látky x je v čase t dáno vztahem

$$x(t) = \frac{2e^t - 2}{e^t - 1}.$$

Pomocí limity určete, kolik bude této látky pro $t \rightarrow \infty$.

5. Množství dané látky x je v čase t dáno vztahem

$$x(t) = 100 - e^{-2t}.$$

S rostoucím časem bude této látky přibývat nebo ubývat? Kolik jí bude pro $t \rightarrow \infty$?

6. Vypočtěte limity v nevlastním bodě

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 - x^3 + 2x + 1)$,

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x + 6)$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 2}{x^3 - x + 1}$,

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 5x - 1}{x^3 + 2x + 7}$,

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 2x + 7}$,

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x + 9}{5x^3 - x^2 + 3x}$.

a) ∞ , b) $-\infty$, c) 0, d) $-\infty$, e) ∞ , f) $\frac{1}{5}$.

7. Vypočtete limity ($\frac{\text{číslo}}{0}$).

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-3},$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{(x-2)^2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x}{\ln x},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x}{1-\cos x}.$

a) neexistuje, b) ∞ , c) neexistuje, d) ∞ .

Týden 5

Derivace funkce

1. Určete derivaci funkce (základní vzorce a úpravy)

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$,

b) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 5$,

c) $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} + 2e^x + \frac{x}{2}$,

d) $f(x) = e + 3 \cos x - 4$,

e) $f(x) = \ln x - \log x$,

f) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}$,

h) $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{x}$.

a) $3x^2+6x-5$, b) $8x^3-6x^2+1$, c) $2e^x+\frac{1}{2}$, d) $-3 \sin x$, e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln 10}$, f) $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, g) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{5x^3} + \frac{18}{5x^{\frac{5}{2}}}$,
h) $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} - 1$

2. Určete derivaci funkce (derivace součinu a podílu)

a) $f(x) = x^3 \ln x$,

b) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$,

c) $f(x) = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x$,

d) $f(x) = 3 \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,

e) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$,

f) $f(x) = x^2 e^x \ln x$,

g) $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$,

h) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$,

i) $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$,

j) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$,

k) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$,

l) $f(x) = \frac{3-x}{\ln x}$.

a) $x^2(3 \ln x + 1)$, b) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$, c) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{\ln x}{x^2+1}$, d) $3 \cos x$, e) $e^x(x^2 + 2)$, f) $xe^x[(x+2) \ln x + 1]$,
g) $-\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$, h) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$, i) $-\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$, j) $-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$, k) $\frac{1}{1-\sin x}$, l) $\frac{x-x \ln x-3}{x \ln^2 x}$

3. Určete derivaci funkce (derivace složené funkce)

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^4,$

b) $f(x) = \ln(5x + 1),$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$

d) $f(x) = \sin^2 x,$

e) $f(x) = \ln \sqrt{\cos x},$

f) $f(x) = \ln^3(x^2 - 1),$

g) $f(x) = \cos^2(3x + 2),$

h) $f(x) = \cos(3x + 2)^2,$

i) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1},$

j) $f(x) = x \sin 2x,$

k) $f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5,$

l) $f(x) = \ln \ln(x^2 - 3),$

m) $f(x) = \frac{1}{\ln(\sin^2 x)},$

n) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$

a) $4(x^2 + 3x)^3(2x + 3),$ b) $\frac{5}{5x+1},$ c) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$ d) $2 \sin x \cos x$ e) $-\frac{\operatorname{tg} x}{2},$ f) $\frac{6x \ln^2(x^2-1)}{x^2-1},$
 g) $-6 \sin(3x + 2) \cos(3x + 2),$ h) $-6(3x + 2) \sin(3x + 2)^2,$ i) $-\frac{1}{x^2+1},$ j) $\sin 2x + 2x \cos 2x,$
 k) $-30x^4 \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos^3 x^5,$ l) $\frac{2x}{(x^2-3) \ln(x^2-3)},$ m) $-\frac{\operatorname{cotg} x}{\ln^2 \sin^2 x},$ n) $-\frac{1}{\cos x}$

Týden 6

L'Hospitalovo pravidlo, aplikace derivací

1. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limity (základní použití)

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}},$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x},$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x},$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x \ln x}.$

a) 1, b) $\frac{4}{3}$, c) -4, d) 2, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{4}$, g) ∞ , h) 0.

2. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limity (těžší příklady)

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}},$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x,$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right),$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right),$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}},$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sin x}.$

a) ∞ , b) 0, c) 0, d) 0, e) $-\frac{1}{2}$, f) 0, g) $e^{-\frac{9}{2}}$, h) 1.

3. Napište rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 a nakreslete obrázek.

a) $f(x) = \sin x, x_0 = \pi$

b) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}, x_0 = 0$

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x, x_0 = 0.$

a) $y = -x + \pi$, b) $y = x - 1$, c) $y = -x + 1$, d) $y = x.$

4. Určete lokální extrémy funkce (tréninkové příklady)

a) $y = x^3 - 12x - 6,$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1,$

c) $y = \frac{2x}{x^2-4},$

d) $y = \frac{x^2}{x^2-1},$

e) $y = \ln(x^2 + x + 1),$

f) $y = \frac{\ln x}{x},$

g) $y = x^2 e^x,$

h) $y = \operatorname{arctg} x^2.$

a) $\max[-2, 10], \min[2, -22],$ b) $\max[1, 3], \min[3, -1],$ c) nejsou, d) $\max[0, 0],$ e) $\min[-\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4}],$
 f) $\max[e, \frac{1}{e}],$ g) $\max[-2, \frac{4}{e^2}], \min[0, 0],$ h) $\min[0, 0].$

5. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní/konkávní (tréninkové příklady)

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4,$

b) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3,$

c) $y = \frac{x^2}{x^2-1},$

d) $y = \frac{6x}{(x-1)^3},$

e) $y = \frac{1}{1-e^x},$

f) $y = x - \ln^2 x.$

a) konvexní na $(1, \infty),$ konkávní na $(-\infty, 1),$ b) konvexní na $(-\infty, -1) \cup (2, \infty),$ konkávní na $(-1, 2),$
 c) konvexní na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty),$ konkávní na $(-1, 1),$ d) konvexní na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty),$
 konkávní na $(-1, 1),$ e) konvexní na $(-\infty, 0),$ konkávní na $(0, \infty),$ f) konvexní na $(\frac{1}{e}, \infty),$
 konkávní na $(0, \frac{1}{e}).$

Týden 7

Průběh funkce

1. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf (písemkové příklady)

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2}$,

b) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$,

c) $y = \frac{x+2}{x^2}$,

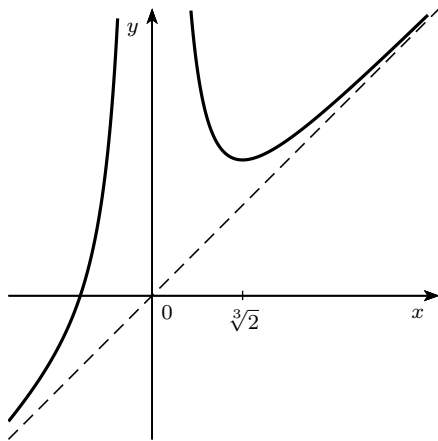
d) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$,

e) $y = \frac{x}{1+x^2}$,

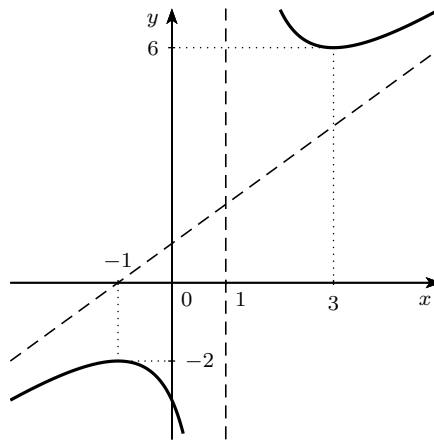
f) $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$,

g) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$,

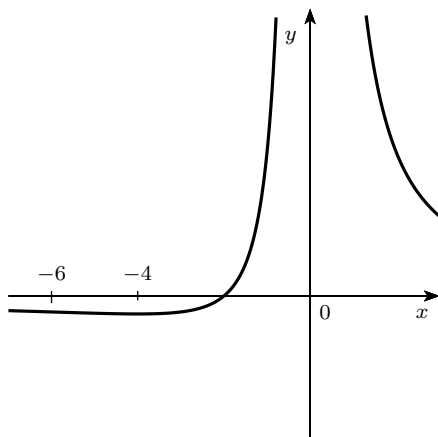
h) $y = \frac{e^x}{x+1}$.



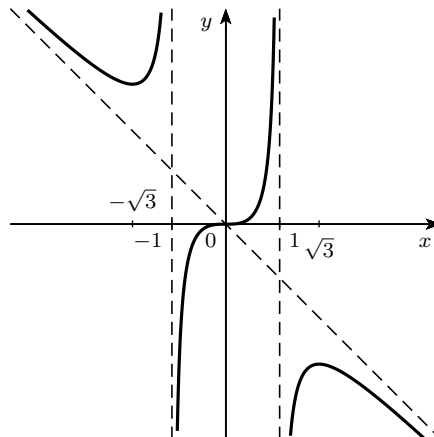
a)



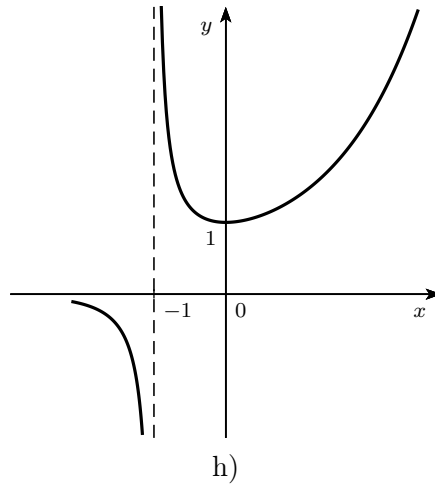
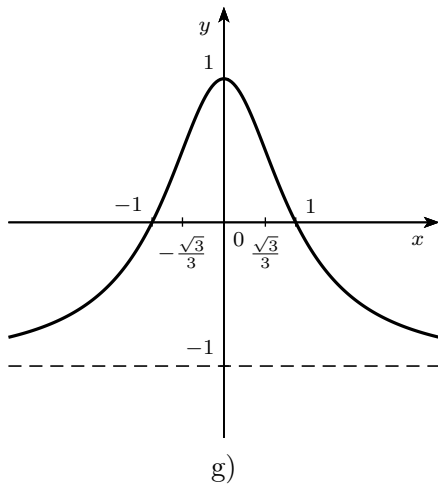
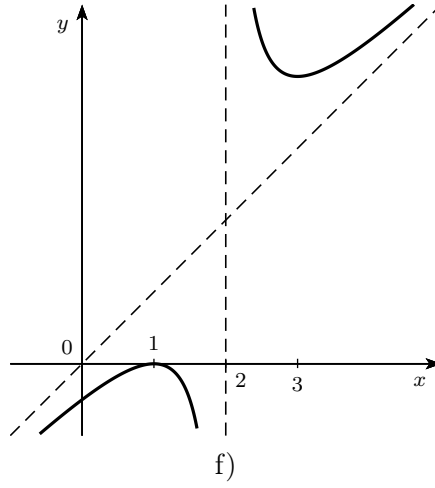
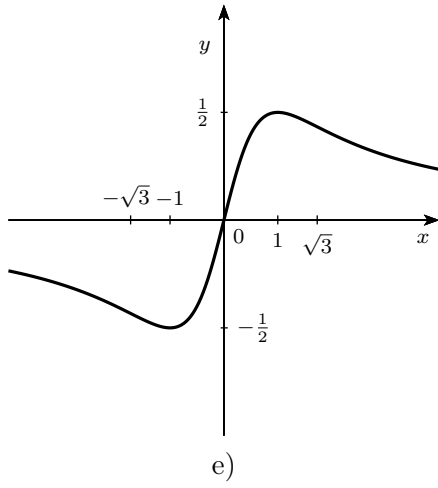
b)



c)



d)



Týden 8

Neurčitý integrál I

1. Vypočtete neurčitý integrál (základní vzorce a úpravy)

a) $\int (2x^3 - x^2 + 3x + 2) dx$, b) $\int (x^5 - 3x^2 - x + 5) dx$,

c) $\int \left(2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$, d) $\int \sqrt{x} \left(3\sqrt{x} + 2x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$,

e) $\int (x+1)^2 (\sqrt{x}-1) dx$, f) $\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} \right) \sqrt[3]{x} dx$.

a) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$, b) $\frac{1}{6}x^6 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$, c) $\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 5x$,
e) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3}x^3$, f) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}$.

2. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$)

a) $\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x-1} \right) dx$, b) $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx$,

c) $\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2} dx$, d) $\int \frac{2x^2}{x^3+2} dx$,

e) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$, f) $\int 2\cotg x dx$.

a) $\ln|x+1| + 2\ln|2x-1|$, b) $\frac{1}{3}\ln|x^3+5|$, c) $-\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + 2)$, d) $\frac{2}{3}\ln|x^3+2|$, e) $\ln|e^x-1|$, f) $2\ln|\sin x|$.

3. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$)

a) $\int e^{3x+2} dx$, b) $\int \sqrt{5x-1} dx$,

c) $\int \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx$, d) $\int \frac{1}{(2x+1)^5} dx$,

e) $\int \left(\frac{1}{4}x + 9 \right)^3 dx$, f) $\int \cos 2x dx$.

a) $\frac{1}{3}e^{3x+2}$, b) $\frac{2}{15}\sqrt{(5x-1)^3}$, c) $-\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, d) $-\frac{1}{8(2x+1)^4}$, e) $\left(\frac{1}{4}x + 9 \right)^4$, f) $\frac{1}{2}\sin 2x$.

4. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce $\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctg \frac{x-x_0}{a} + c$, případně kombinace)

a) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$, b) $\int \frac{3}{9x^2+1} dx$,

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$, d) $\int \frac{x^2+4x+29}{x^2+6x+10} dx$,

e) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$, f) $\int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx$.

a) $\frac{1}{2}\arctg \frac{1}{2}$, b) $\arctg 3x$, c) $\frac{1}{2}\arctg \frac{x+1}{2}$, d) $\frac{1}{5}\arctg \frac{x+2}{5}$, e) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| + \arctg \frac{x-1}{2}$, f) $\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 5\arctg(x+3)$.

5. Vypočtete neurčitý integrál (rozklad na parciální zlomky)

a) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-x^2} dx,$

b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} dx,$

c) $\int \frac{2x^2+2x+2}{x(x^2+1)} dx,$

d) $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx,$

e) $\int \frac{5x-14}{(x-1)(x^2-4)} dx,$

f) $\int \frac{3x+16}{x^2-x-6} dx,$

g) $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^3} dx,$

h) $\int \frac{x^2-3x-2}{(x^2+4)(x+2)} dx.$

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2}, \ln|x-1| - \frac{2}{x},$ b) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}, 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1},$ c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+1}, 2 \ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x,$
 d) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}, \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{3}{x+1},$ e) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2}, 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| - \ln|x-2|,$
 f) $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-2}, 5 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2|,$ g) $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}, \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2},$ h) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+4},$
 $\ln|x+2| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$

Týden 9

Neurčitý integrál II

1. Vypočtete neurčitý integrál (metoda per-partes)

- a) $\int x \cos 2x \, dx$, b) $\int (3x + 2)e^x \, dx$,
c) $\int x^2 \ln x^2 \, dx$, d) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$,
e) $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$, f) $\int x \ln^2 x \, dx$,
g) $\int x e^{-x} \, dx$, h) $\int (x^2 + 1) \cos x \, dx$.

a) $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$, b) $(3x - 1)e^x$, c) $\frac{x^2}{9}(3 \ln x^2 - 2)$, d) $\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x$, e) $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x$, f) $\frac{1}{4}x^2(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1)$, g) $-(x + 1)e^{-x}$, h) $(x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x$.

2. Vypočtete neurčitý integrál (základní substituce)

- a) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$, b) $\int \frac{x}{x^4 + 16} \, dx$,
c) $\int x \sin(3x^2 + 2) \, dx$, d) $\int x \cotg x^2 \, dx$,
e) $\int \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$, f) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx$,
g) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} \, dx$, h) $\int x^2 e^{-x^3} \, dx$.

a) $\ln |\ln x|$, b) $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4}$, c) $-\frac{1}{6} \cos(3x^2 + 2)$, d) $\frac{1}{2} \ln |\sin x^2|$, e) $6\sqrt{x^2 + 1}$, f) $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x}$, g) $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}$, h) $-\frac{1}{3} e^{-x^3}$.

3. Vypočtete neurčitý integrál

- a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} \, dx$, b) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$,
c) $\int \cos^3 x \, dx$, d) $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$.

a) $\cos x - 2 \operatorname{arctg} \cos x$, b) $-\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, c) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$, d) $\frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x$.

4. Vypočtete neurčitý integrál

- a) $\int \frac{3}{x\sqrt{x+4}} \, dx$, b) $\int \frac{1}{(3-x)\sqrt{x+1}} \, dx$,
c) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x+3\sqrt{x}})} \, dx$, d) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} \, dx$.

a) $-\frac{3}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{x+4}}{2 - \sqrt{x+4}} \right|$, b) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 - \sqrt{x+1}} \right|$, c) $6 \ln \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[6]{x}}$, d) $\frac{\sqrt{x+1}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt[6]{x+1})$.

Týden 10

Výpočet určitého integrálu

1. Vypočtete určité integrál

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx,$

b) $\int_{-1}^2 x^3 \, dx,$

c) $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2} \, dx,$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

a) 1, b) $\frac{15}{4}$, c) $\frac{3}{4}\pi$, d) $\frac{\pi}{3}$.

2. Vypočtete určitý integrál (metoda per-partes)

a) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx,$

b) $\int_1^e x \ln^2 x \, dx,$

c) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx,$

d) $\int_0^1 x e^{3x} \, dx.$

a) π , b) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$, c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$, d) $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$.

3. Vypočtete určitý integrál (metoda substituce)

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx,$

b) $\int_1^{\sqrt{6}} x \sqrt{x^2 + 3} \, dx,$

c) $\int_1^{e^8} \frac{1}{x \sqrt{\ln x + 1}} \, dx,$

d) $\int_2^3 \frac{x-3}{4+2\sqrt{x-2}} \, dx.$

a) $\frac{2}{3}$, b) 4, c) $\frac{19}{3}$, d) $\frac{7}{3} + 6 \ln \frac{2}{3}$.

Týden 11

Aplikace určitého integrálu

1. Vypočítejte neurčitý integrál (zkouškové příklady)

- a) $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 2, y = 0$
- b) $y = \frac{2}{x}, y = 3 - x,$
- c) $y = 2x^3, y = \frac{2}{x}, x = e, y = 0$
- d) $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14$
- e) $y = 8 - x^2, y = x^2 - 6x,$
- f) $y = x^2 + 4x, y = x + 4.$

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \ln 2, \text{ b) } \frac{3}{2} - \ln 4, \text{ c) } \frac{5}{2}, \text{ d) } \frac{343}{3}, \text{ e) } \frac{125}{3}, \text{ f) } \frac{125}{6}.$$

2. Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru ohraničeného zadanými křivkami kolem osy x :

- a) $y = \sqrt{x}, y = x$
- b) $y = \sin x, x \in [0, \pi].$

$$\text{a) } \frac{\pi}{6}, \text{ b) } \frac{\pi^2}{2}.$$

3. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu

- a) válce o poloměru podstavy r a výšce v ,
- b) koule o poloměru r ,
- c) komolého kužele s poloměry podstavy r_1, r_2 a výškou v .

$$\text{a) } \pi r^2 v, \text{ b) } \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ c) } \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

4. Jsou dány funkce

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x + 4.$$

Načrtněte obrázek a počítaný objekt vyznačte.

- a) Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí f a g .
- b) Přímka g vytíná z paraboly f ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly f kolem osy x .
- c) Parabola f ohraničuje kus přímky g . Jaký je povrch pláště komolého kužele, který vznikne rotací tohoto kusu přímky kolem osy x ?
- d) Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy těmito funkcemi omezené kolem osy x .
- e) Parabola f ohraničuje kus přímky g . Určete délku tohoto kusu přímky g .

$$\text{a) } \frac{32}{3}, \text{ b) } \frac{1072}{15} \pi, \text{ c) } 48\pi\sqrt{5}, \text{ d) } \frac{1408}{15} \pi, \text{ e) } 4\sqrt{5}.$$

Týden 12

Nevlastní integrály a interpolace

1. Vypočtěte nevlastní integrál (zkouškové)

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

c) $\int_1^\infty e^{-3x} dx,$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$

e) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx,$

f) $\int_0^1 \frac{1}{x^4} dx.$

a) 2, b) diverguje, c) $\frac{1}{3e^3}$, d) 1, e) $\frac{1}{3}$, f) diverguje.

2. Určete obsah P plochy pod grafem funkce $y = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1, \infty]$. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto útvaru? Odhadněte povrch tohoto tělesa.

$$P = \infty, V = \pi, S = \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} dx > \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty.$$

3. Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom funkce f :

a) $f(-1) = 12, f(0) = 6, f(1) = 0, f(2) = 0,$

b) $f(-1) = 8, f(-2) = 12, f(1) = 6, f(2) = 44,$

c) $f(1) = 0, f(-1) = 0, f(0) = 3, f(2) = 15.$

$$\text{a) } L(x) = x^3 - 7x + 6, \text{ b) } L(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4x, \text{ c) } L(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

4. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce f , je-li známo

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 8, \quad f(-2) = 0, \quad f(-1) = 2.$$

Vypočtěte hodnotu polynomu v bodě $x = 0$.

$$L(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad L(0) = 0.$$

5. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce f , je-li známo

$$f(-2) = 0, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -4, \quad f(2) = 0.$$

Vypočtěte hodnotu polynomu v bodě $x = 1$.

$$L(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4, \quad L(1) = -9.$$

6. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce f , je-li známo

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 5, \quad f(2) = -7.$$

Najděte lokální extrémy tohoto polynomu.

$$L(x) = x^2 - 5x - 1, \text{ min v } \left[\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right].$$

7. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce f , je-li známo

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 5, \quad f(2) = -7.$$

Určete hodnotu derivace tohoto polynomu pro $x = 2$.

$$L(x) = x^2 - 3x + 3, \quad L'(2) = 1.$$

Týden 13

Nekonečné řady

1. Určete součet řady

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{11}{18}$.

2. Rozhodněte, zda-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

konverguje nebo diverguje.

konverguje (srovnávací nebo integrální kritérium)

3. Rozhodněte, zda-li řada

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

konverguje. Pokud ano, určete její součet.

$$\frac{3}{2}$$

4. Určete součet řady

$$x - x^2 + x^3 - x^4 \dots$$

Pro která x tento součet platí?

$$\frac{x}{1+x}, |x| < 1.$$