Úvod do matematiky pro biology a biochemiky

M1030 19. 9. 2019

Historické poznámky

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*

Vývoj matematiky

Poznámka ke slovu „matematika“:

$\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$	poučení, naučení
$\mu\alpha\vartheta\eta\tau\eta\varsigma$	učedník
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$	nauka, to co je k naučení
	něco mezi $\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (známost, lat. scientia)
	$\gamma\nu\omega\sigma\iota\varsigma$ (poznání, lat. cognitio)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$	náležející k nauce (učedník i pojednání)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$	všechny věci, které jsou této naučné povahy (plurál středního rodu)

Vlivem pýthagorejských učedníků ($\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) se význam slova „matematika“ zúžil na zabývání se čísly a geometrickými objekty.

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o\gamma o\varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Isaac Newton (1643-1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)

Vývoj matematiky

Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, $\lambda o \gamma o \varsigma$

Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

René Descartes (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

Isaac Newton (1643-1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)
- Krize: infinitesimál je logicky sporný objekt

Fibonacci (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Fibonacci (1170–1250)
  V *Liber abaci* úloha o množení králíků
Leonhard Euler (1707–1783)
  V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)
    V *Liber abaci* úloha o množení králíků
Leonhard Euler (1707–1783)
    V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace
Daniel Bernoulli (1700–1782)
    Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování

Fibonacci (1170–1250)
: V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)
: V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782)
: Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)
: Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)
V *Liber abaci* úloha o množení králíků

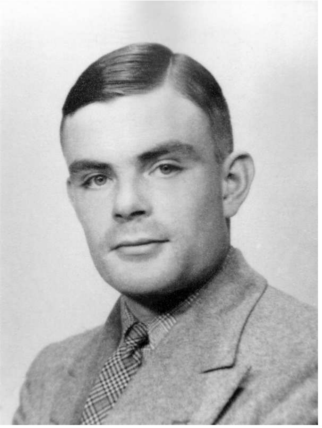
Leonhard Euler (1707–1783)
V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu

Daniel Bernoulli (1700–1782)
Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)
Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Matematika a biologie



Fibonacci (1170–1250)
V *Liber abaci* úloha o množení králíků
Leonhard Euler (1707–1783)
V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace
Daniel Bernoulli (1700–1782)
Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování
Johann Gregor Mendel (1822–1884)
Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů
Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)
Alan Turing (1912–1954)
Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)
V *Liber abaci* úloha o množení králíků

Leonhard Euler (1707–1783)
V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

Daniel Bernoulli (1700–1782)
Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování

Johann Gregor Mendel (1822–1884)
Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

Alan Turing (1912–1954)
Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

Aristid Lindenmayer (1925–1989)
Popis růstu organismů (formální gramatika)

Matematika a biologie

Fibonacci (1170–1250)
V *Liber abaci* úloha o množení králíků
Leonhard Euler (1707–1783)
V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace
Daniel Bernoulli (1700–1782)
Matematický model šíření neštovic a vlivu očkování
Johann Gregor Mendel (1822–1884)
Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů
Vito Volterra (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)
Alan Turing (1912–1954)
Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)
Aristid Lindenmayer (1925–1989)
Popis růstu organismů (formální gramatika)
John Maynard Smith (1920–2004)
Matematický model evoluce (teorie her)

Příklady

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

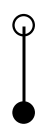
> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

$\circ$ 1

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



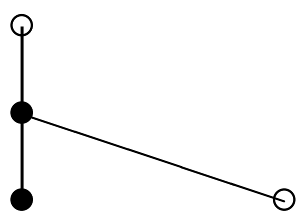
1

1

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



1

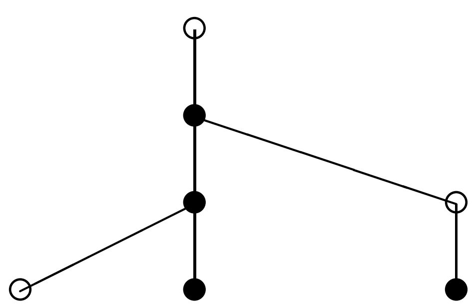
1

2

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



1

1

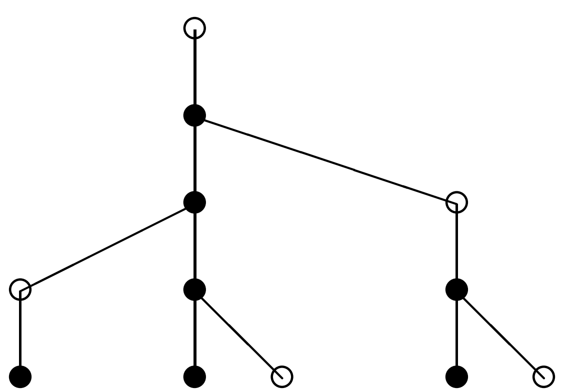
2

3

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

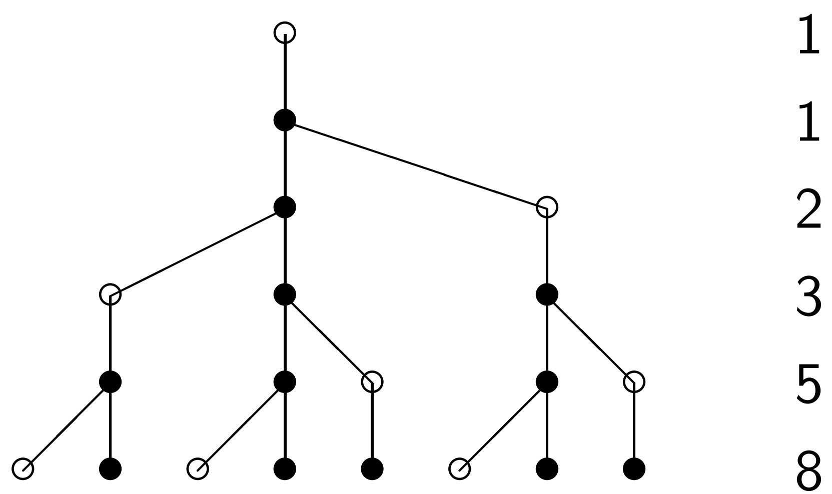


1
1
2
3
5

Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



Množení králíků

$x(t)$ . . . počet párů králíků v měsíci t

Množení králíků

$x(t)$ . . . počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) =$$

Množení králíků

$x(t)$ ... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t-1)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Množení králíků

$x(t)$ . . . počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce
Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

Množení králíků

$x(t)$ ... počet párů králíků v měsíci t

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce
Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

t	$x(t)$	t	$x(t)$
1	1	7	13
2	1	8	21
3	2	9	34
4	3	10	55
5	5	11	89
6	8	12	144

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ . . . velikost populace v čase t

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ ... velikost populace v čase t

$$x(t+1) \quad = \quad x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců}$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ . . . velikost populace v čase t
b . . . porodnost (*b*irth rate)
d . . . úmrtnost (*d*eath rate)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) \end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství $\left.\begin{array}{l}\text{narozených, vylíhnutých, vyklíčených . . .}\\ \text{uhynulých}\end{array}\right.$ je úměrné množství žijících.

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ ... velikost populace v čase t
b ... porodnost (*b*irth rate)
d ... úmrtnost (*d*eath rate)
r ... koeficient růstu (intrinsic g*r*owth rate)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) \end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství $\begin{matrix}\text{narozených, vylíhnutých, vyklíčených ...} \\ \text{uhynulých}\end{matrix}$ je úměrné množství žijících.

Označení: $r = 1 + b - r$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ . . . velikost populace v čase t
r . . . koeficient růstu (intrinsic g*r*owth rate)

$$x(t+1) = rx(t)$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ ... velikost populace v čase t
r ... koeficient růstu (intrinsic g*r*owth rate)

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

Eulerův model růstu populace

$x(t)$ ... velikost populace v čase t
r ... koeficient růstu (intrinsic g*r*owth rate)

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

$r > 1 \Rightarrow$ populace neomezeně roste
$r = 1 \Rightarrow$ populace má stálou velikost
$r < 1 \Rightarrow$ populace vymírá

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: množina nějakých rozlišitelných symbolů A
Stav: konečná posloupnost prvků z A, slovo vytvořené z písmen abecedy
Přepisovací pravidla: přiřazení nějakého slova každému písmenu abecedy
Počáteční stav: s_0
Stav s_{i+1} vznikne ze stavu s_i tak, že každý člen x v s_i se nahradí slovem podle přiřazovacího pravidla

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$

$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 23
\end{aligned}
$$

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:	$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
	$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23$$
$$s_2 = 224$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:	$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
	$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23$$
$$s_2 = 224$$
$$s_3 = 2254$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23$$
$$s_2 = 224$$
$$s_3 = 2254$$
$$s_4 = 22654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 =1$

$s_1 =23$

$s_2 =224$

$s_3 =2254$

$s_4 =22654$

$s_5 =227654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: 1 $\mapsto$ 23 2 $\mapsto$ 2 3 $\mapsto$ 24 4 $\mapsto$ 54 5 $\mapsto$ 6
6 $\mapsto$ 7 7 $\mapsto$ 8(1) 8 $\mapsto$ 8 ($\mapsto$ ( ) $\mapsto$)

Počáteční stav: 1

s_0 =1

s_1 =23

s_2 =224

s_3 =2254

s_4 =22654

s_5 =227654

s_6 =228(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23 \qquad s_5 = 227654$$
$$s_2 = 224 \qquad s_6 = 228(1)7654$$
$$s_3 = 2254 \qquad s_7 = 228(23)8(1)7654$$
$$s_4 = 22654 \qquad s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

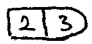
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 =1$ 

$s_1 =23$ 

$s_2 =224$

$s_3 =2254$

$s_4 =22654$

$s_5 =227654$

$s_6 =228(1)7654$

$s_7 =228(23)8(1)7654$

$s_8 =228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 =228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} =228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

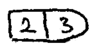
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

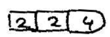
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Počáteční stav: 1

$s_0 =$1 

$s_1 =$23 

$s_2 =$224 

$s_3 =$2254

$s_4 =$22654

$s_5 =$227654

$s_6 =$228(1)7654

$s_7 =$228(23)8(1)7654

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$

$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

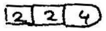
Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

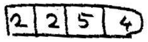
$s_5 = 227654$

$s_2 = 224$



$s_6 = 228(1)7654$

$s_3 = 2254$



$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_4 = 22654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

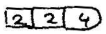
Přepisovací pravidla:

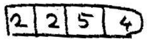
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

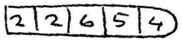
Počáteční stav: 1

$s_0 =$1 

$s_1 =$23 

$s_2 =$224 

$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654

$s_6 =$228(1)7654

$s_7 =$228(23)8(1)7654

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

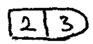
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

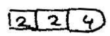
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$

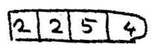
$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

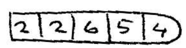
Počáteční stav: 1

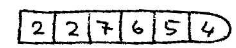
$s_0 =$1 

$s_1 =$23 

$s_2 =$224 

$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654

$s_7 =$228(23)8(1)7654

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

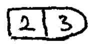
Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

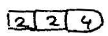
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

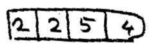
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

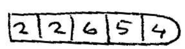
Počáteční stav: 1

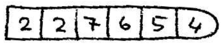
$s_0 =$1 

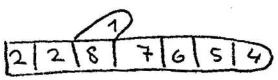
$s_1 =$23 

$s_2 =$224 

$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

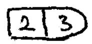
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

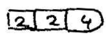
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

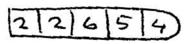
Počáteční stav: 1

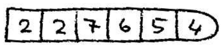
$s_0 =$1 

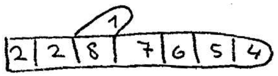
$s_1 =$23 

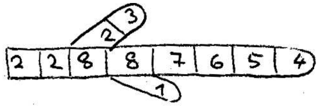
$s_2 =$224 

$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654 

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

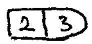
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

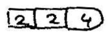
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$

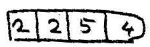
$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

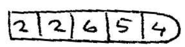
Počáteční stav: 1

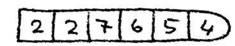
$s_0 =$1 

$s_1 =$23 

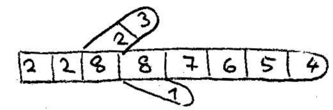
$s_2 =$224 

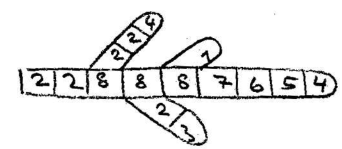
$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654 

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654 

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

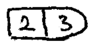
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

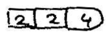
Přepisovací pravidla:

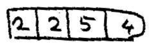
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

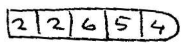
Počáteční stav: 1

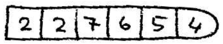
$s_0 =$1 

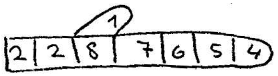
$s_1 =$23 

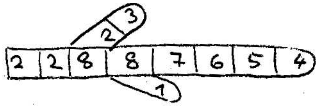
$s_2 =$224 

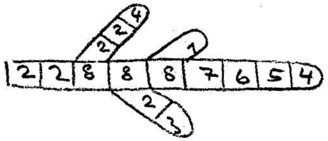
$s_3 =$2254 

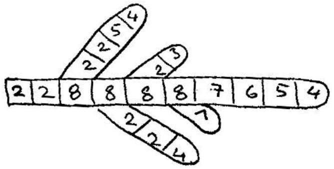
$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654 

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654 

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654 

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

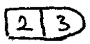
Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

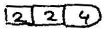
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

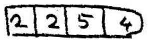
Přepisovací pravidla:					
	$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
	$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

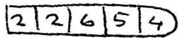
Počáteční stav: 1

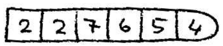
s_0 =1 

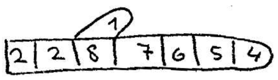
s_1 =23 

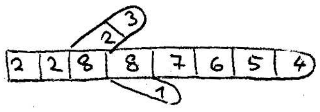
s_2 =224 

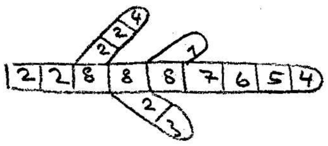
s_3 =2254 

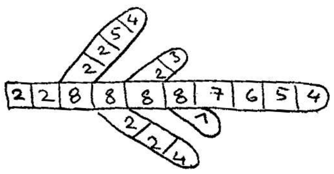
s_4 =22654 

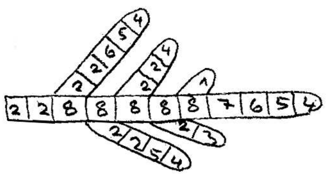
s_5 =227654 

s_6 =228(1)7654 

s_7 =228(23)8(1)7654 

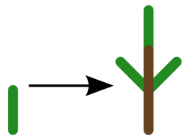
s_8 =228(224)8(23)8(1)7654 

s_9 =228(2254)8(224)8(23)8(1)7654 

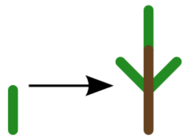
s_{10} =228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654 

Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad S \mapsto SS$

Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\quad$ $S \mapsto SS$

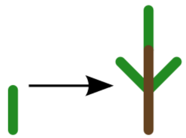


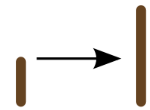
Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\quad S \mapsto SS$



$i = 0$

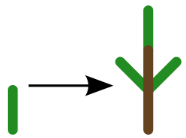
Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$

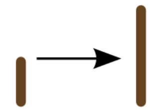




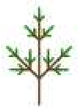
$i = 1$

Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\quad S \mapsto SS$

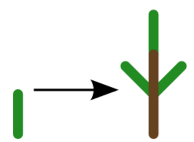




$i = 2$

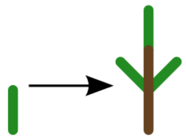


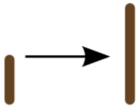
Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\quad$ $S \mapsto SS$

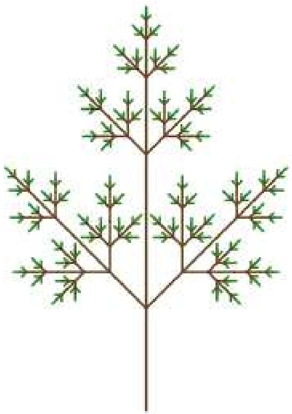


$i = 3$

Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad S \mapsto SS$

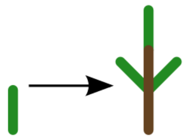


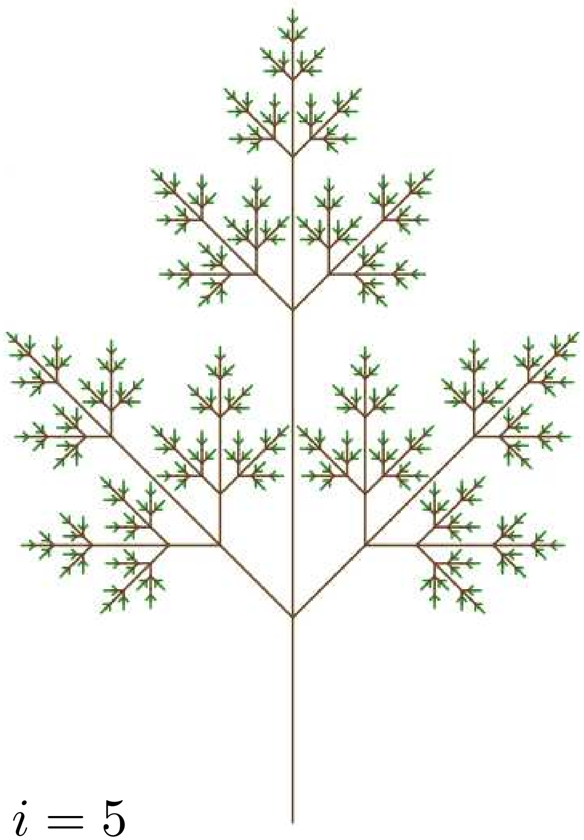




$i = 4$

Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Počáteční stav: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$





$i = 5$