Kombinatorika

M1030 19. 9. 2019

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Výběry bez opakování (vracení)

Základní soubor – n různých rozlišitelných prvků

1. **Variace k-té třídy z n prvků**
   Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

   $$v(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. **Permutace n prvků**
   Vybíráme všechny prvky, přihlížíme k pořadí, tj. prvky uspořádáme

   $$p(n) = v(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \text{ (faktoriál)}$$

3. **Kombinace k-té třídy z n prvků**
   Vybíráme k prvků,k pořadí nepřihlížíme

   $$c(n,k) = \frac{v(n,k)}{p(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} \text{ (kombinační číslo)}$$

Výběry s opakováním (s vracením)

Základní soubor – prvky rozděleny do n druhů, v rámci druhu jsou nerozlišitelné

1. **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním**
   Prvků každého druhu je alespoň k. Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

   $V(n,k) = n \cdot n \cdots n = n^k$

2. **Permutace s opakováním v situaci** $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$
   Počet prvků prvního druhu je k_1, druhého druhu k_2, atd. až n-tého druhu je k_n

   $$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{p(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)}{p(k_1)p(k_2)\cdots p(k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \,\cdots\, k_n!}$$

3. **Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním**
   Prvků každého druhu je alespoň k. Vybíráme k prvků a k pořadí nepřihlížíme

   $$C(n,k) = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Příklady

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

$$c(58,3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

$$v(58,3) = 58 \cdot 57 \cdot 56 = 185\,136$$

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$c(50,35) = \binom{50}{35} = \binom{50}{15} =$$
$$= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$$
$$= 2{,}250\,829\,575 \cdot 10^{12}$$

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$c(50,35) = \binom{50}{35} = \binom{50}{15} =$$
$$= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$$
$$= 2{,}250\,829\,575 \cdot 10^{12}$$

- Z hlediska ubytovaných:

$$v(50,35) = \frac{50!}{15!} = 2{,}325\,815\,505 \cdot 10^{52}$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$
Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$
Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1,3,1,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$
Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8,3)$
Celkem: $p(7)c(8,3) = 7!\binom{8}{3} = 7!\,\frac{8!}{5!\,3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 282\,240$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Souhlásky: K, L, M, T, V, samohlásky: A, I, O, O, O

$$2\cdot p(5)\cdot P(1,1,3) = 2\cdot 5!\cdot\frac{5!}{3!} = \frac{(5!)^2}{3} = 4\,800$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3,50) = \frac{53!}{3!\,50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4,50)$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3,50) = \frac{53!}{3!\,50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4,50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3,50) = \frac{53!}{3!\,50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4,50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Každém dítěti přidělíme 5 kuliček a rozdělujeme pouze zbývající:

$$P(50 - 4 \cdot 5, 3) = P(30,3) = \frac{33!}{30!\,3!} = \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2} = 11 \cdot 16 \cdot 31 = 5\,456$$

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25, 2)$$

způsoby.

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25, 2)$$

způsoby.

Libovolnou dvojici pohlednic lze poslat libovolné osobě, tj.

$$V\big(c(25, 2), 3\big)$$

způsoby.

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25,2) = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

způsoby.

Libovolnou dvojici pohlednic lze poslat libovolné osobě, tj.

$$V\big(c(25,2),3\big) = c(25,2)^3 = 300^3 = 27\,000\,000$$

způsoby.

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2,3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2,3) \cdot 4 \cdot 5^5 = 4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2!\,3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 4\cdot 5^5 = 4\cdot 5^5\,\frac{5!}{2!\,3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 5^6 = 5^6\,\frac{5!}{2!\,3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 4\cdot 5^5 = 4\cdot 5^5\,\frac{5!}{2!\,3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 5^6 = 5^6\,\frac{5!}{2!\,3!}$$

Celkem:

$$4\cdot 5^5\,\frac{5!}{2!\,3!} + 5^6\,\frac{5!}{2!\,3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 4\cdot 5^5 = 4\cdot 5^5\frac{5!}{2!\,3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2,3)\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = P(2,3)\cdot 5^6 = 5^6\frac{5!}{2!\,3!}$$

Celkem:

$$4\cdot 5^5\frac{5!}{2!\,3!} + 5^6\frac{5!}{2!\,3!} = (4+5)5^5\frac{5!}{2!\,3!} = 9\cdot 5^5\cdot\frac{5\cdot 4}{2} = 2\cdot 3^2\cdot 5^6 = 281\,250$$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10, i) = \binom{10}{i}$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10,i) = \binom{10}{i}$

Celkem:

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5} = 1+10+45+120+210+252 = 638$$

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	○	●	●	●	○	●	○	○	●	○
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

Konkrétní hrst	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
zakódujeme	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Závěr:

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10}$$

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n = (1+1)^n$$

Princip inkluze a exkluze

Dvě vlastnosti

Množina – souhrn nějakých prvků, značení $A, B, \ldots$
Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$

Dvě vlastnosti

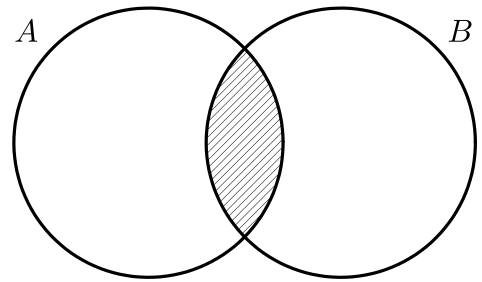
Množina – souhrn nějakých prvků, značení $A, B, \ldots$
Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení $A, B, \ldots$

$|A|$ – počet prvků množiny A, počet objektů s vlastností A
$A \cup B$ – sjednocení množin A a B, objekty mající vlastnost A nebo B
$A \cap B$ – průnik množin A a B, objekty mající obě vlastnosti A a B

Dvě vlastnosti

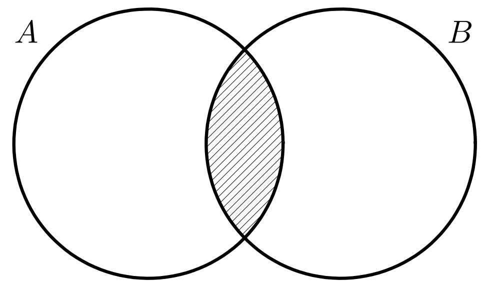
Množina – souhrn nějakých prvků, značení $A, B, \dots$
Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení $A, B, \dots$

$|A|$ – počet prvků množiny A, počet objektů s vlastností A
$A \cup B$ – sjednocení množin A a B, objekty mající vlastnost A nebo B
$A \cap B$ – průnik množin A a B, objekty mající obě vlastnosti A a B



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

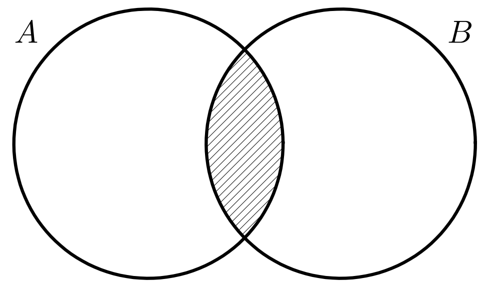
Dvě vlastnosti



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři lovili v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

Dvě vlastnosti

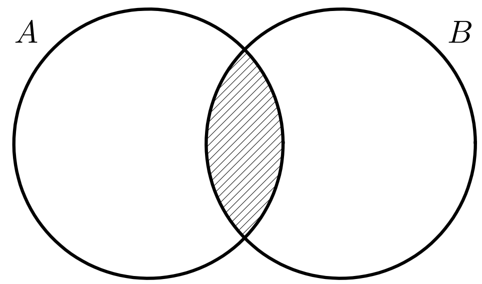


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři lovili v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

$$|K| = 8, \quad |C| = 5, \quad |K \cap C| = 3$$

Dvě vlastnosti



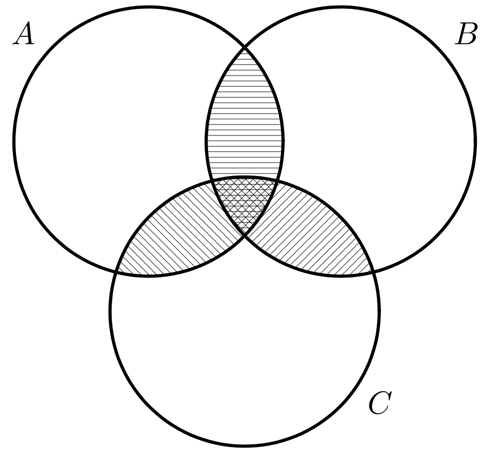
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři lovili v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

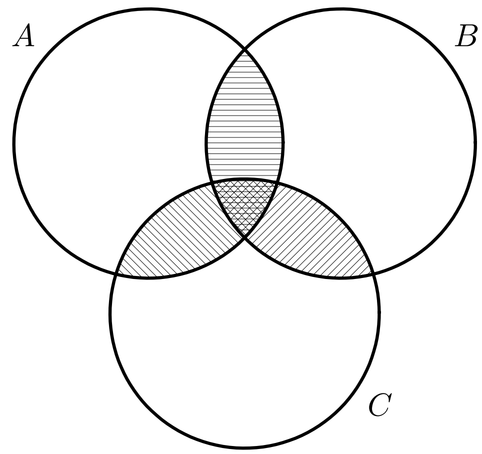
$$|K| = 8, \quad |C| = 5, \quad |K \cap C| = 3$$

$$|K \cup C| = |K| + |C| - |K \cap C| = 5 + 8 - 3 = 10$$

Tři vlastnosti



Tři vlastnosti



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8,2) = 8\binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32,2) = 2\binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8,2) = 8\binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32,2) = 2\binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

$$|R \cap S| = 0, \quad |R \cap B| = 8 \cdot 2 \cdot c(4,2) = 8 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 96, \quad |S \cap B| = 96, \quad |R \cap S \cap B| = 0$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8,2) = 8\binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32,2) = 2\binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

$$|R \cap S| = 0, \quad |R \cap B| = 8 \cdot 2 \cdot c(4,2) = 8 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 96, \quad |S \cap B| = 96, \quad |R \cap S \cap B| = 0$$

$$|R \cup S \cup B| = 224 + 224 + 992 - 0 - 96 - 96 + 0 = 1\,248$$

Přihrádkový princip

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299
Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299
Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000
Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299
Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000
Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Matematika zaručuje existenci nějakého objektu, přitom neexistuje efektivní postup, jak ho najít.

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299
Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000
Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Matematika zaručuje existenci nějakého objektu, přitom neexistuje efektivní postup, jak ho najít.

Princip: Nechť k, n jsou přirozená čísla, $k > n$. Při jakémkoliv rozdělení k předmětů do n přihrádek existuje přihrádka, v níž jsou alespoň dva předměty.

Aplikace

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet možností „nasměrování“ genu: 2^n

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet možností „nasměrování“ genu: 2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“): $\frac{1}{n}$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet možností „nasměrování“ genu: 2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“): $\frac{1}{n}$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky: $\frac{1}{2}$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet možností „nasměrování“ genu: 2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“): $\frac{1}{n}$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky: $\frac{1}{2}$

Celkem

$$\frac{2^n n!}{2n} = 2^{n-1}(n-1)!$$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n
Gen má směr
Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů: $n!$

Počet možností „nasměrování“ genu: 2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“): $\frac{1}{n}$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky: $\frac{1}{2}$

Celkem

$$\frac{2^n n!}{2n} = 2^{n-1}(n-1)!$$

Pro $n = 4\,000$ je výsledný počet $3{,}013\,417\,773 \cdot 10^{13\,873}$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Počet fylogenetických stromů

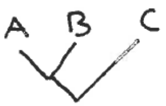
n taxonů

Stromy s kořenem

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

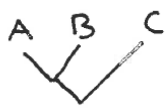
Stromy s kořenem

n			
2			
3			

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

n	
2	
3	  

x_n – počet stromů, v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \qquad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \qquad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

x_n – počet stromů, v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \qquad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \qquad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

$$v_n = 2 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 2, \qquad x_n = x_{n-1}(2n-3)$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

x_n – počet stromů, v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \qquad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \qquad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

$$v_n = 2 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 2, \qquad x_n = x_{n-1}(2n-3)$$

$x_2 = 1$
$x_3 = 3 \cdot 1$
$x_4 = 5 \cdot 3 \cdot 1$
$\vdots$
$x_n = (2n-3)(2n-5) \cdots 3 \cdot 1 = \dfrac{(2n-3)!}{(2n-4)(2n-6) \cdots 2} = \dfrac{(2n-3)!}{2^{n-1}(n-2)!}$

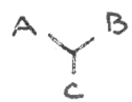
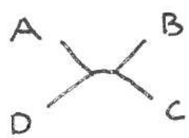
Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

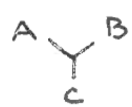
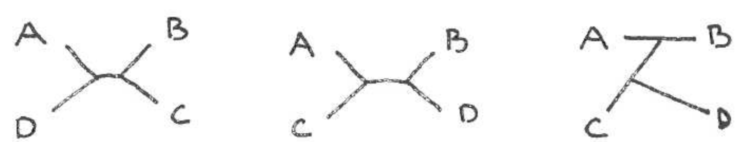
n taxonů

Stromy bez kořene

n			
2			
3			
4			

n taxonů

Stromy bez kořene

n	
2	
3	
4	

y_n – počet stromů, w_n – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \qquad y_n = y_{n-1} w_{n-1}, \qquad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

y_n – počet stromů, w_n – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \qquad y_n = y_{n-1} w_{n-1}, \qquad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

$$w_n = 1 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 3, \qquad y_n = y_{n-1}(2n-5)$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

y_n – počet stromů, $\quad w_n$ – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \qquad y_n = y_{n-1} w_{n-1}, \qquad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

$$w_n = 1 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 3, \qquad y_n = y_{n-1}(2n-5)$$

$y_2 = 1$
$y_3 = 1$
$y_4 = 3 \cdot 1$
$y_5 = 5 \cdot 3 \cdot 1$
$\vdots$
$n_n = (2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1 = \dfrac{(2n-5)!}{(2n-6)(2n-8)\cdots 2} = \dfrac{(2n-5)!}{2^{n-3}(n-3)!}$