Počet pravděpodobnosti

M1030 3. 10. a 10. 10. 2019

Základní pojmy

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo
- Zjišťování teploty varu vody – nějaká hodnota mezi 70°C a 105°C

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo
- Zjišťování teploty varu vody – nějaká hodnota mezi 70°C a 105°C
- Střelba do terče – bod na terči

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: $\{$avers, revers$\}$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: $\{$avers, revers$\}$
- Zplození dítěte: $\{♀,♂\}$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}
- Zjišťování teploty varu vody: $(70, 105)$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

neprázdná množina Ω

Příklady:

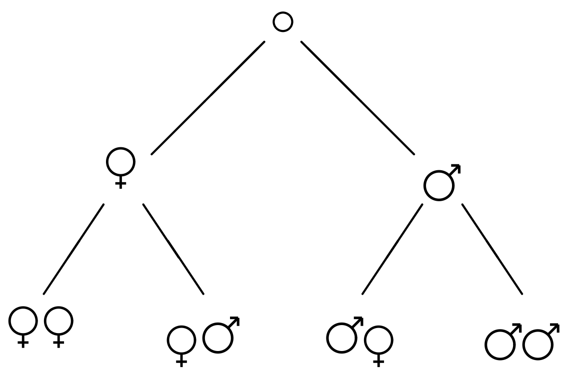
- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}
- Zjišťování teploty varu vody: $(70, 105)$
- Střelba do terče: $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Strom průběhu pokusu

Strom průběhu a výsledků náhodného pokusu

Strom průběhu a výsledků náhodného pokusu

Příklad: Zplození dvou dětí



kořen

větve

zplození prvního dítěte

zplození druhého dítěte

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

1. Pokus – střelba do terče, $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Jev – zásah do černého kolečka (o poloměru r) uprostřed,

$$A = \left\{(x, y) : (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 < r^2\right\}$$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

2. Pokus – hod kostkou, $\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$

Jev –	padne pětka	$A = \{⚄\}$
	padne sudý počet ok	$B = \{⚁, ⚃, ⚅\}$
	padne lichý počet ok	$C = \{⚀, ⚂, ⚄\}$
	padnou nejvýše dvě oka	$D = \{⚀, ⚁\}$
	padne více než šest ok	$E = \emptyset$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

2. Pokus – hod kostkou, $\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$

Jev –	padne pětka	$A = \{⚄\}$
	padne sudý počet ok	$B = \{⚁, ⚃, ⚅\}$
	padne lichý počet ok	$C = \{⚀, ⚂, ⚄\}$
	padnou nejvýše dvě oka	$D = \{⚀, ⚁\}$
	padne více než šest ok	$E = \emptyset$

Jev *nemožný* (prázdný) – nemůže nastat, $E = \emptyset$
Jev *jistý* – určitě nastane, Ω
Jevy *slučitelné* – mají neprázdný průnik, $A \cap C = \{⚄\}$, $B \cap D = \{⚁\}$
Jevy *neslučitelné* – mají prázdný průnik, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$
Jevy *opačné*, *komplementární* – neslučitelné, jejich sjednocením je jev jistý Ω,

$$C = \Omega \setminus B, \; B \cup C = \Omega$$

Definice pravděpodobnosti jevu

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.
Jevy: A – narození děvčete, B – narození chlapce. Jsou komplementární.

$$n = 228\,531,\ f_A = 111\,394,\ f_B = 228\,531 - 111\,394 = 117\,137$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{111\,394}{228\,531} \doteq 0{,}4874, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{117\,137}{228\,531} \doteq 0{,}5126$$

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Vlastnosti empirické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{f_A + f_B}{n} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

$$\Omega = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}, \quad |\Omega| = 6,$$

$$A = \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad |A| = 2,$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{2}{6} \doteq 0{,}333$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se třemi dětmi je holčička?

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se třemi dětmi je holčička?

$$\Omega = \{♀♀♀, ♂♀♀, ♀♂♀, ♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♀, ♂♂♂\}, \quad |\Omega| = 8$$
$$A = \{♀♀♀, ♂♀♀, ♀♂♀, ♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♀\}, \quad |A| = 7$$
$$P(A) = \frac{7}{8} \doteq 0{,}875$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Vlastnosti klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega\in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega\in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

$$\Omega = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{avers}, \text{revers}), (\text{revers}, \text{revers})\},$$

$$w(\text{avers}, \text{avers}) = w(\text{revers}, \text{revers}) = 1, \quad w(\text{avers}, \text{revers}) = 2,$$

$$A = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{revers}, \text{revers})\}$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1+1}{1+2+1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Uvažujme velkou populaci, u níž sledujeme jeden dialelický gen. Předpokládejme, že dominantní alela je stejně častá jako recesivní. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má recesivní fenotyp?

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Uvažujme velkou populaci, u níž sledujeme jeden dialelický gen. Předpokládejme, že dominantní alela je stejně častá jako recesivní. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má recesivní fenotyp?

$$\Omega = \left\{\text{AA}, \text{Aa}, \text{aa}\right\}, \qquad w(\text{AA}) = w(\text{aa}) = 1, \quad w(\text{Aa}) = 2, \qquad A = \left\{\text{aa}\right\},$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Vlastnosti zobecněné klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při střelbě do terče tvaru čtverce o straně 1 m zasáhneme střed, což je kolečko o průměru 1 cm?

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při střelbě do terče tvaru čtverce o straně 1 m zasáhneme střed, což je kolečko o průměru 1 cm?

$$\Omega = \{(x, y) :\, 0 \leq x \leq 100,\, 0 \leq y \leq 100\}, \quad \mu(\Omega) = 100 \cdot 100 = 10\,000,$$

$$A = \left\{(x, y) :\, (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right\}, \quad \mu(A) = \pi \cdot 0{,}5^2 \doteq 0{,}7854,$$

$$P(A) = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{10\,000} \doteq 0{,}000\,078\,54$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Geometrická pravděpodobnost

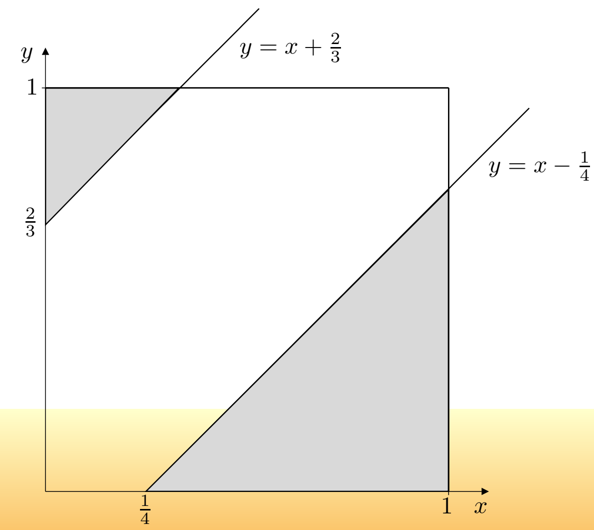
Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Označení: x ... čas, kdy přišel On, y ... čas, kdy přišla Ona

$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}, \quad \mu(\Omega) = 1,$
$A = \left\{(x,y) \in \Omega : y > x + \frac{2}{3} \text{ nebo } y < x - \frac{1}{4}\right\},$
$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{32} + \frac{1}{18} \doteq 0{,}3368,$



$$\mathrm{P}(A) \doteq 0{,}3368$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Vlastnosti geometrické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: P : $\mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro jevy platí:

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$

  D.: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset,\ \Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \le 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A),\ A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze
  D.: $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cup B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, jevy vzájemně neslučitelné $\Rightarrow$
  $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \mathsf{P}(A \cup B) + \mathsf{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big) =$
  $= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$P(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze
  D.: $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cup B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, jevy vzájemně neslučitelné $\Rightarrow$
  $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \mathsf{P}(A \cup B) + \mathsf{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big) =$
  $= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B)$
- $\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C)$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\,\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\,\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$,

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$, $\mathsf{P}(B_2) = \dfrac{c(10,2)c(90,8)}{c(100,10)} \doteq 0{,}2015$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2) \doteq 0{,}94$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$, $\mathsf{P}(B_2) = \dfrac{c(10,2)c(90,8)}{c(100,10)} \doteq 0{,}2015$

Příklady

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{c(8^2,1)c(7+7,1)\frac{1}{2}}{c(8^2,2)} = \frac{64\cdot 14\frac{1}{2}}{\frac{64\cdot 63}{2}} = \frac{2}{9} \doteq 0{,}222$$

Příklady

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{c(8^2,1)c(7+7,1)\frac{1}{2}}{c(8^2,2)} = \frac{64 \cdot 14\frac{1}{2}}{\frac{64\cdot 63}{2}} = \frac{2}{9} \doteq 0{,}222$$

b) neohrožují?

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \doteq 0{,}778$$

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned}
1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^n &\geq \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{1}{2} &\geq \left(\tfrac{5}{6}\right)^n \\
\log \tfrac{1}{2} &\geq n \log \tfrac{5}{6} \\
n &\geq \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{5}{6}} \doteq 3{,}8
\end{aligned}$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n &\geq \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{1}{2} &\geq \left(\tfrac{35}{36}\right)^n \\
n \log \tfrac{36}{35} &\geq \log 2 \\
n &\geq \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} \doteq 24{,}6
\end{aligned}$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n,$$

$n \geq 25$

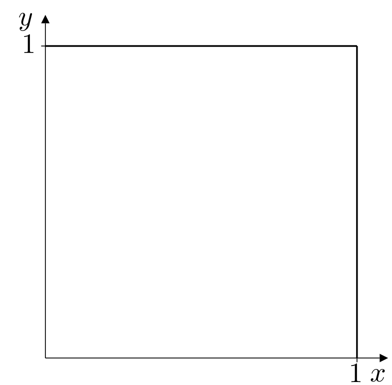
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

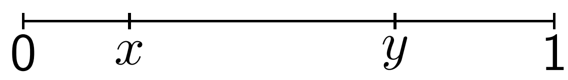
Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



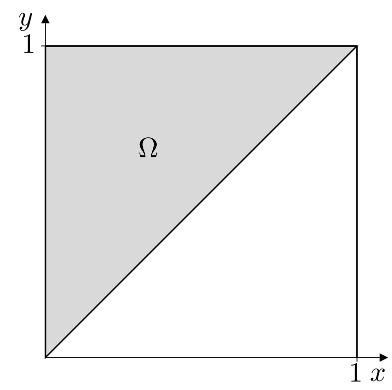
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

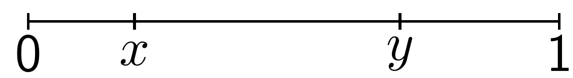


1. $x < y$ („řez jedním nožem“)

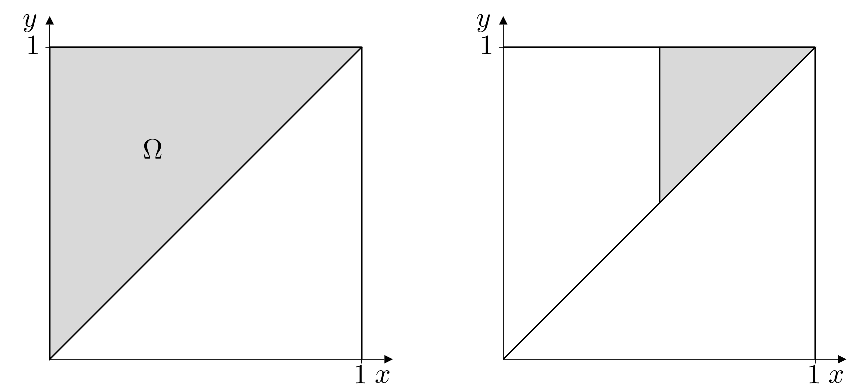


Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



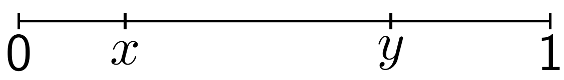
1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,



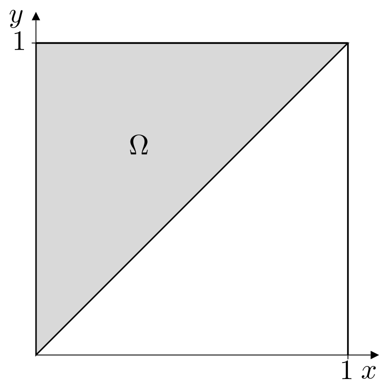
Příklady

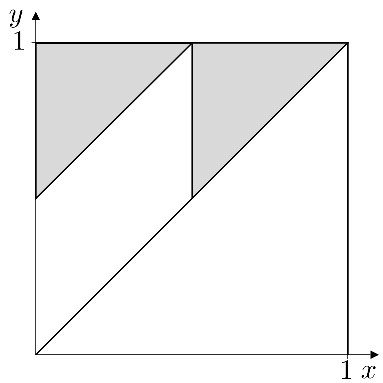
Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,



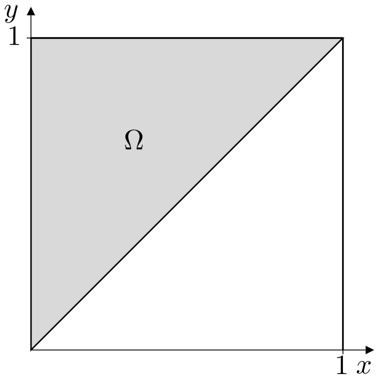


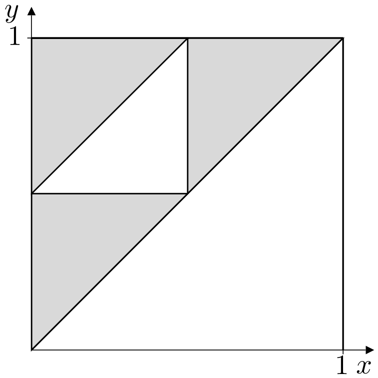
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

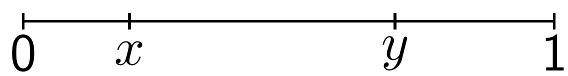
1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.



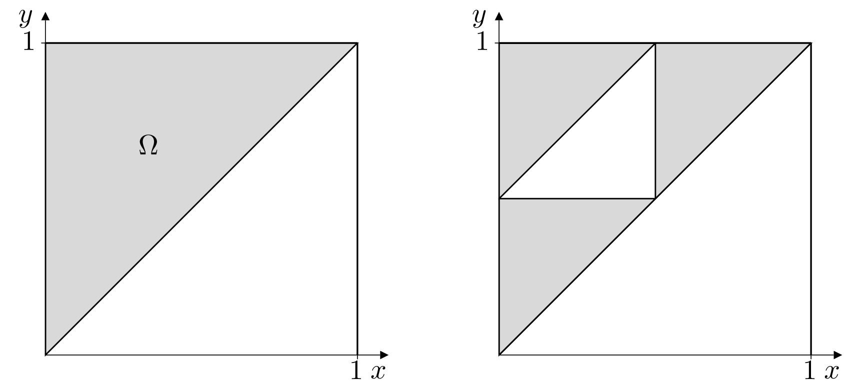


Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



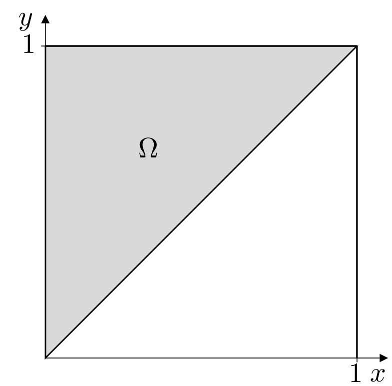
1. $x < y$ („řez jedním nožem")
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$

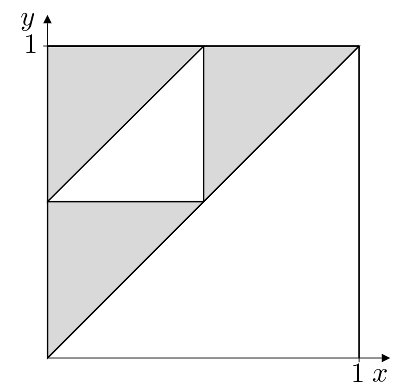


Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4}$





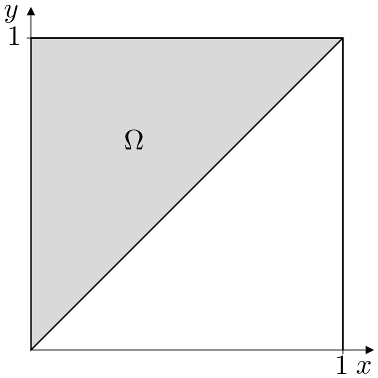
1. bez předpokladu $x < y$ („řez dvěma noži“)

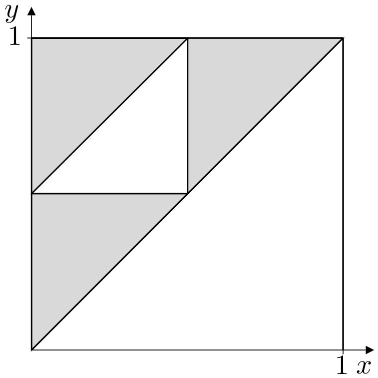
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

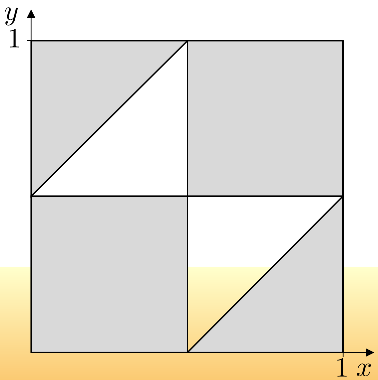
Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4}$





1. bez předpokladu $x < y$ („řez dvěma noži“)
   $\mathsf{P}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.



Závislost a nezávislost jevů

Deterministická závislost a nezávislost

Jevy A a B jsou (deterministicky) závislé, pokud

$$A \subseteq B, \text{ nebo } B \subseteq A \text{ nebo } A \cap B = \emptyset$$

Deterministická závislost a nezávislost

Jevy A a B jsou (deterministicky) závislé, pokud

$$A \subseteq B, \text{ nebo } B \subseteq A \text{ nebo } A \cap B = \emptyset$$

$A \subseteq B$ – pokud nastane jev A, víme, že také nastane jev B

Deterministická závislost a nezávislost

Jevy A a B jsou (deterministicky) závislé, pokud

$$A \subseteq B, \text{ nebo } B \subseteq A \text{ nebo } A \cap B = \emptyset$$

$A \subseteq B$ – pokud nastane jev A, víme, že také nastane jev B

$A \cap B = \emptyset$ – pokud nastane jev A, víme, že určitě nenastane jev B

Stochastická závislost

Jevy A a B jsou (stochasticky) nezávislé, pokud

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

Stochastická závislost

Jevy A a B jsou (stochasticky) nezávislé, pokud

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

Pokud nastane (nenastane) jev A, pravděpodobnost jevu B se nezmění

Stochastická závislost

Jevy A a B jsou (stochasticky) nezávislé, pokud

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

Pokud nastane (nenastane) jev A, pravděpodobnost jevu B se nezmění

$B \subseteq A \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B)$

Empirické vyšetřování závislosti jevů

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

Empirické vyšetřování závislosti jevů

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m_1}{N}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{n_1}{N}, \quad \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{p_{11}}{N}$$

Empirické vyšetřování závislosti jevů

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m_1}{N}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{n_1}{N}, \quad \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{p_{11}}{N}$$

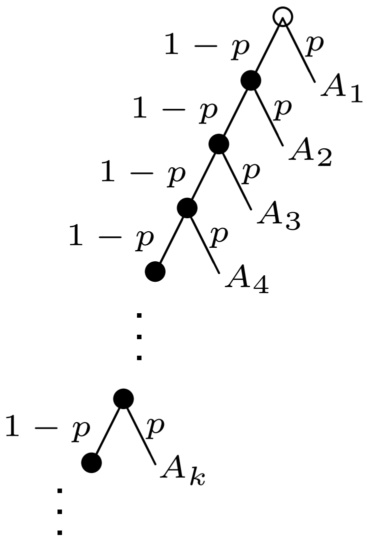
Pokud se hodnoty $\frac{m_1 n_1}{N}$ a $\frac{p_{11}}{N}$ „příliš neliší“, tj. pokud $m_1 n_1 \approx p_{11}$, pak považujeme jevy A a B za stochasticky nezávislé.

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

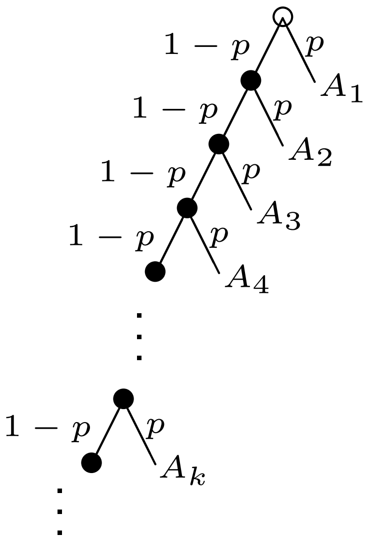
Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?



Příklady

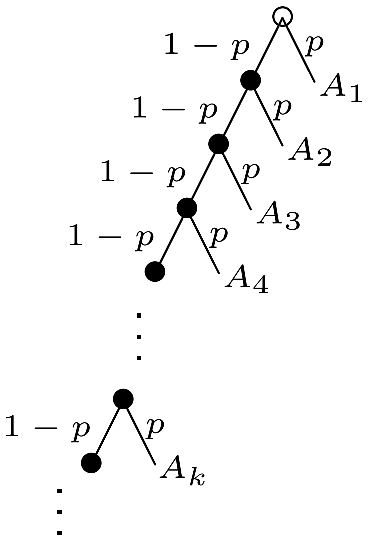
Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?



$\mathsf{P}(A_1) = p$

Příklady

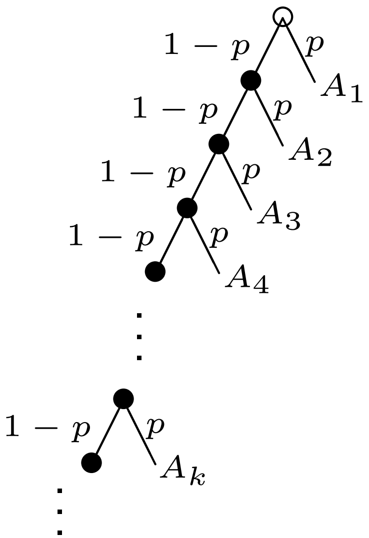
Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?



$\mathsf{P}(A_1) = p$
$\mathsf{P}(A_2) = (1-p)p$

Příklady

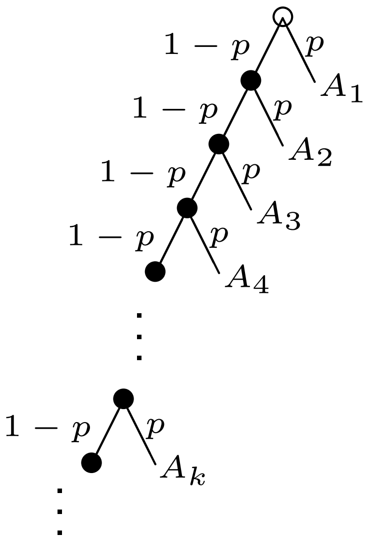
Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?



$\mathsf{P}(A_1) = p$
$\mathsf{P}(A_2) = (1-p)p$
$\mathsf{P}(A_3) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

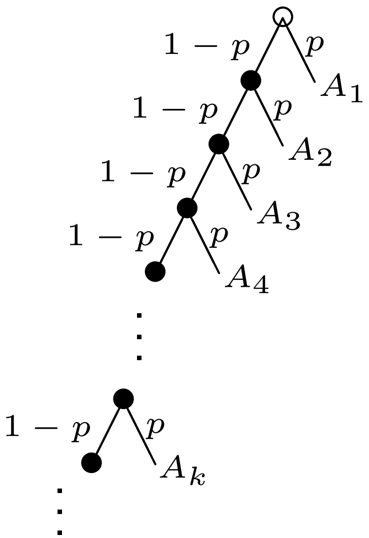


$\mathsf{P}(A_1) = p$
$\mathsf{P}(A_2) = (1-p)p$
$\mathsf{P}(A_3) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$
$\mathsf{P}(A_4) = (1-p)^3 p$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_1) &= p\\
\mathsf{P}(A_2) &= (1-p)p\\
\mathsf{P}(A_3) &= (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p\\
\mathsf{P}(A_4) &= (1-p)^3 p\\
&\vdots\\
\mathsf{P}(A_k) &= (1-p)^{k-1} p
\end{aligned}
$$



Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathsf{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathsf{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné.

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathsf{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné. Proto

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p$$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathsf{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné. Proto

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k} = p\,\frac{1}{1-(1-p)}$$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Pravděpodobnost k úspěchů a $n-k$ neúspěchů: $p^k(1-p)^{n-k}$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Pravděpodobnost k úspěchů a $n-k$ neúspěchů: $p^k(1-p)^{n-k}$

Celkem: $\mathsf{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$$\mathsf{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$$\mathsf{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$.

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$\mathsf{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Proto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Příklady

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$\mathsf{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Proto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1^n$$

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$.

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathrm{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

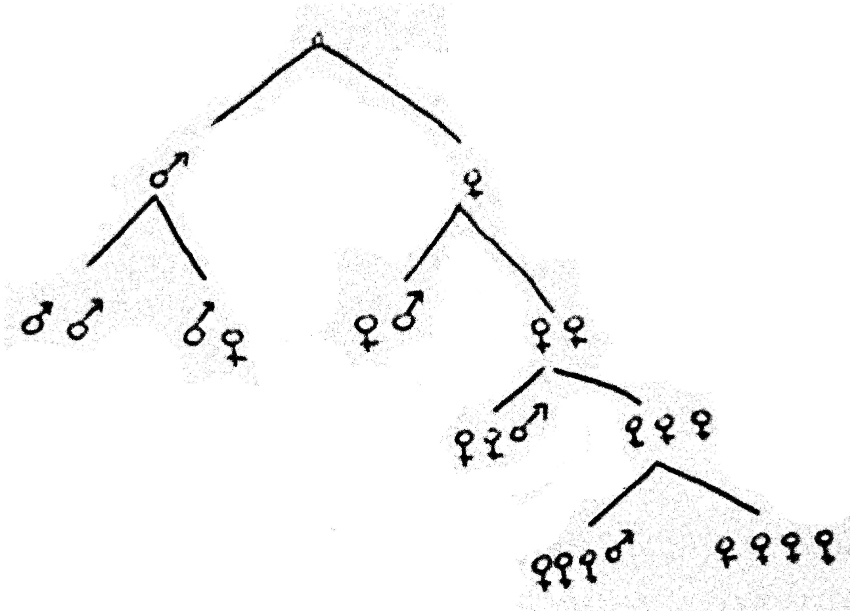
Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

P(♂ ◦ ◦◦) $= 0{,}52$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

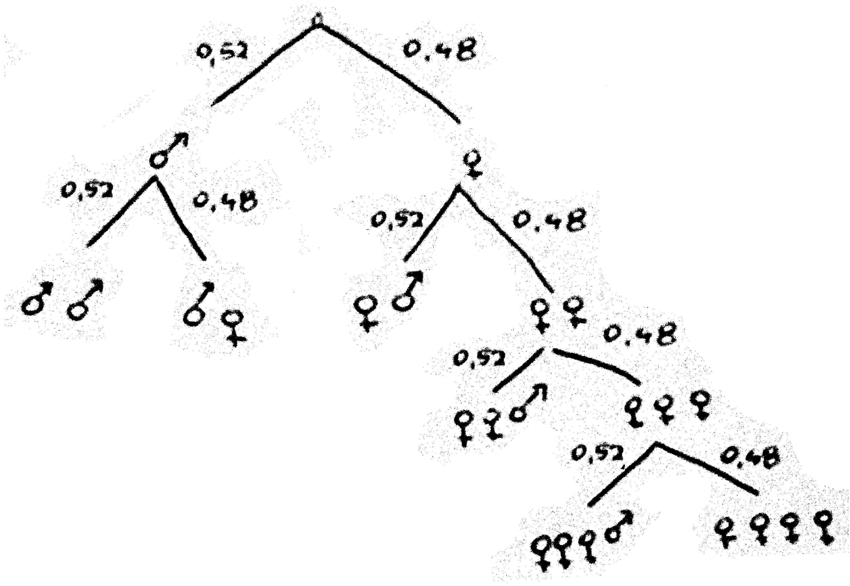


Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathrm{P}(\male \circ \circ\circ) = \color{red}{0{,}52}$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

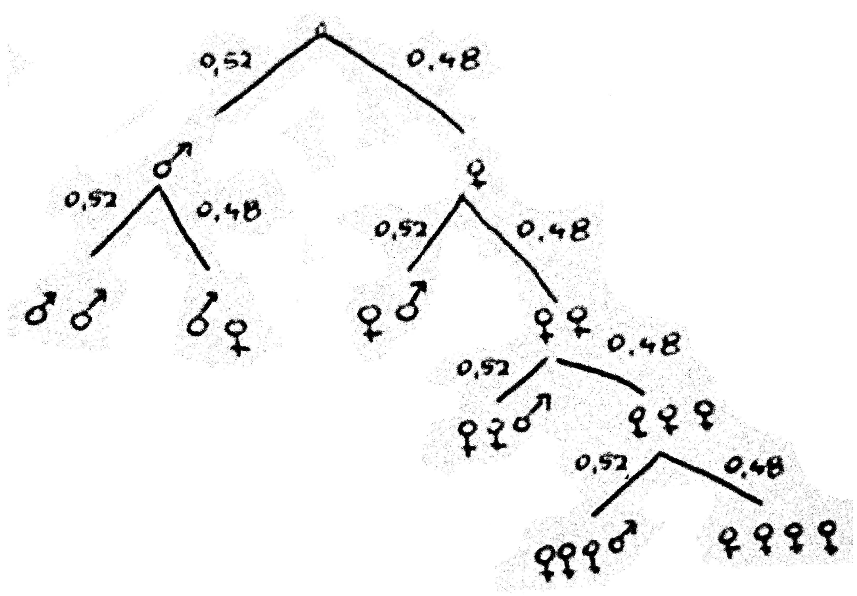


Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male\male) + \mathsf{P}(\male\female) = 0{,}52^2 + 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52$



Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male\male) + \mathsf{P}(\male\female) = 0{,}52^2 + 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52$

V rodině jsou dvě děti, nejsou to dvojčata. Víme, že jedno z dětí je děvče. Jaká je pravděpodobnost, že starší dítě je chlapec? A jaká je pravděpodobnost že mladší dítě není děvče?

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zplodí se další dítě. Pokud ani mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je pravděpodobnost, že v takové rodině je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(\male\male) + \mathsf{P}(\male\female) = 0{,}52^2 + 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52$

V rodině jsou dvě děti, nejsou to dvojčata. Víme, že jedno z dětí je děvče. Jaká je pravděpodobnost, že starší dítě je chlapec? A jaká je pravděpodobnost že mladší dítě není děvče?

„Víme, že jedno z dětí je děvče“ interpretujeme: „pokud je prvorozený chlapec, pak pohlaví druhého dítěte není náhodné, ale je to jistě dívka.“

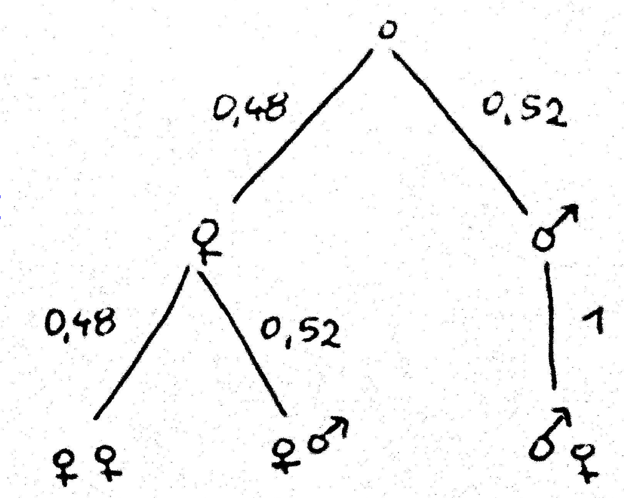
Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathrm{P}(\male \circ \circ\circ) = 0{,}52$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zp
mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je
v takové rodině je nejstarší dítě syn?

$\mathrm{P}(\male\male) + \mathrm{P}(\male\female) = 0{,}52^2 + 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52$



V rodině jsou dvě děti, nejsou to dvojčata. Víme, že jedno z dětí je děvče. Jaká je pravděpodobnost, že starší dítě je chlapec? A jaká je pravděpodobnost že mladší dítě není děvče?

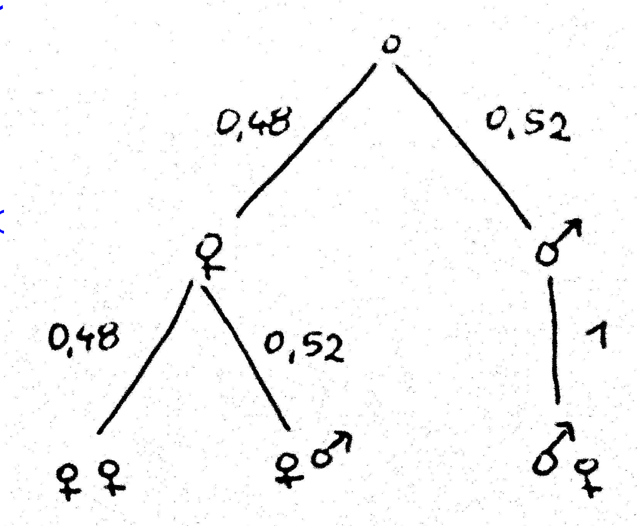
„Víme, že jedno z dětí je děvče“ interpretujeme: „pokud je prvorozený chlapec, pak pohlaví druhého dítěte není náhodné, ale je to jistě dívka.“

Příklady

Pravděpodobnost narození děvčete je $0{,}48$, pravděpodobnost narození chlapce je $0{,}52$. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je nejstarší dítě syn?

$\mathsf{P}(♂\circ\circ\circ) = \color{red}{0{,}52}$

Nejprve se zplodí dvě děti. Pokud mezi nimi není syn, zp
mezi třemi dětmi není syn, zplodí se dítě čtvrté. Jaká je
v takové rodině je nejstarší dítě syn?



$\mathsf{P}(♂♂) + \mathsf{P}(♂♀) = 0{,}52^2 + 0{,}48 \cdot 0{,}52 = \color{red}{0{,}52}$

V rodině jsou dvě děti, nejsou to dvojčata. Víme, že jedno z dětí je děvče. Jaká je pravděpodobnost, že starší dítě je chlapec? A jaká je pravděpodobnost že mladší dítě není děvče?

„Víme, že jedno z dětí je děvče“ interpretujeme: „pokud je prvorozený chlapec, pak pohlaví druhého dítěte není náhodné, ale je to jistě dívka.“

$\mathsf{P}(♂♀) = 0{,}52 \cdot 1 = \color{red}{0{,}52}$, $\mathsf{P}(♀♂) = 0{,}48 \cdot 0{,}52 = \color{red}{0{,}2496}$

Podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathsf{P}(A|H)$

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathsf{P}(A|H)$

$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \le \mathsf{P}(A|H)$

$$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) =$$

$$= \frac{\mathsf{P}\big((A\cup B)\cap H\big)}{\mathsf{P}(H)} = \frac{\mathsf{P}\big((A\cap H)\cup(B\cap H)\big)}{\mathsf{P}(H)} = \frac{\mathsf{P}(A\cap H)+\mathsf{P}(B\cap H)}{\mathsf{P}(H)} =$$

$$= \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H)$$

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathsf{P}(A|H)$

$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$

$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) = \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H)$

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathsf{P}(A|H)$
$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$
$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) = \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H)$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A|H)$$
$$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) = \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H)$$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(A|B) = \tfrac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \tfrac{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A)$$
$$\mathsf{P}(B|A) = \tfrac{\mathsf{P}(B\cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \tfrac{\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B)$$
$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A) \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$
$$\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\mathsf{P}(B\cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B) \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B \cap A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A)$$

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathsf{P}(A|H)$
$\mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1$
$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) = \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H)$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \\
& \quad \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) \\
\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \\
\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(B \cap A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A)
\end{aligned}$$

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathsf{P}(A|H) = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathsf{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:
$$\begin{aligned} & 0 \leq \mathsf{P}(A|H) \\ & \mathsf{P}(\Omega|H) = \mathsf{P}(H|H) = 1 \\ & A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B|H) = \mathsf{P}(A|H) + \mathsf{P}(B|H) \end{aligned}$$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \neq 0 & \Rightarrow & \mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \\ & & \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) \\ \mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) & \Rightarrow & \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \\ \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) & \Rightarrow & \mathsf{P}(B \cap A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A) \end{array}$$

Tedy: Jevy A a B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$.

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(H)\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Příklad:
Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Příklad:
Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět
H – firma umí vyvolat cunami
$\mathsf{P}(A|H) = 0{,}99$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Příklad:
Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathsf{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathsf{P}(H) = 0{,}0001$.
$\mathsf{P}(A|H) = 0{,}99$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Příklad:
Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathsf{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathsf{P}(H) = 0{,}0001$.
$\mathsf{P}(A|H) = 0{,}99$

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H) = {\color{red}0{,}000099}$$

Inverzní pravděpodobnost a induktivní úsudek

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Příklad:
Developerská firma chce postavit resort na pozemku poblíž pláže, ktarý je však již obsazený. Pokud by uměla vyvolat cunami, s velkou pravděpodobností to udělá, pozemek tak uvolní a začne stavět. K cunami došlo a brzy se na uvolněném pozemku skutečně začalo stavět. Jaká je pravděpodobnost, že příslušná firma cunami vyvolala?

A – k cunami došlo a firma začala stavět, $\mathsf{P}(A) = 1$.
H – firma umí vyvolat cunami, $\mathsf{P}(H) = 0{,}0001$.
$\mathsf{P}(A|H) = 0{,}99$

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H) = 0{,}000099$$

Induktivní úsudek: Je-li $\mathsf{P}(H|A) > \mathsf{P}(\Omega \setminus H|A)$, pak ze skutečnosti, že nastal jev A usuzujeme, že platí hypotéza H.

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\big((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2)\big) = \mathsf{P}(A \cap H_1) + \mathsf{P}(A \cap H_2) = \\ = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)\end{aligned}$$

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Srpkovou anémii má 20% obyvatel USA západoafrického původu. Mezi ostatními má tuto genetickou odchylku 1% obyvatel. USA má 35% obyvatel západoafrického původu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný občan USA má srpkovou anémii?

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Srpkovou anémii má 20% obyvatel USA západoafrického původu. Mezi ostatními má tuto genetickou odchylku 1% obyvatel. USA má 35% obyvatel západoafrického původu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný občan USA má srpkovou anémii?

A – člověk má anemii,
H_1 – člověk je západoafrického původu,
H_2 – člověk je jiného původu.

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Srpkovou anémii má 20% obyvatel USA západoafrického původu. Mezi ostatními má tuto genetickou odchylku 1% obyvatel. USA má 35% obyvatel západoafrického původu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný občan USA má srpkovou anémii?

A – člověk má anemii, $\mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}2$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}01$,
H_1 – člověk je západoafrického původu, $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}35$,
H_2 – člověk je jiného původu, $\mathsf{P}(H_2) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Srpkovou anémii má 20% obyvatel USA západoafrického původu. Mezi ostatními má tuto genetickou odchylku 1% obyvatel. USA má 35% obyvatel západoafrického původu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný občan USA má srpkovou anémii?

A – člověk má anemii, $\mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}2$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}01$,
H_1 – člověk je západoafrického původu, $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}35$,
H_2 – člověk je jiného původu, $\mathsf{P}(H_2) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}65 \cdot 0{,}01 = 0{,}0765$$

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď,

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathsf{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathsf{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,

$$\mathsf{P}(A) = \frac{100-k}{100}\frac{1}{4} + \frac{k}{100} = \frac{100+3k}{400}$$

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{100 + 3k}{400}$$

b) Kolik musí zkoušený znát odpovědí, aby pravděpodobnost úspěchu byla větší než $\frac{1}{2}$?

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Příklady:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že správně odpoví?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{100 + 3k}{400}$$

b) Kolik musí zkoušený znát odpovědí, aby pravděpodobnost úspěchu byla větší než $\frac{1}{2}$?

$$\frac{100 + 3k}{400} > \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; k > \frac{100}{3}, \quad k \geq 34$$

Celková pravděpodobnost

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

Zobecnění:
Nechť základní prostor Ω je rozdělen na n po dvou neslučitelných jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Pak pro každý jev $A \subseteq \Omega$ platí

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A|H_i).$$

Bayesův vzorec

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Vzorec pro inverzní pravděpodobnost: $\mathsf{P}(H_i|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H_i)$, $i = 1, 2$

Vzorec pro celkovou pravděpodobnost: $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$,

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$$

Bayesův vzorec

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Příklad:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

c) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušený odpověď pouze hádal, když odpověděl správně?

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Příklad:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

c) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušený odpověď pouze hádal, když odpověděl správně?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathsf{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,
$\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100+3k}{400}$

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Příklad:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

c) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušený odpověď pouze hádal, když odpověděl správně?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathsf{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,
$\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100+3k}{400}$

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\frac{100-k}{100} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{100+3k}{400}} = \frac{100-k}{100+3k}$$

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Příklad:
Test obsahuje 100 otázek, zkoušený zná odpověď na k otázek. Vylosuje si jednu otázku. Pokud zná odpověď, odpoví správně, pokud odpověď nezná, náhodně zvolí jednu ze čtyř nabízených odpovědí.

c) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušený odpověď pouze hádal, když odpověděl správně?

A – zkoušený odpoví správně, $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 1$,
H_1 – vylosuje si otázku, na niž nezná odpověď, $\mathsf{P}(H_1) = \frac{100-k}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{k}{100}$,
$\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100+3k}{400}$

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\frac{100-k}{100} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{100+3k}{400}} = \frac{100-k}{100+3k}$$

Pro $k = 34$ je $\mathsf{P}(H_1|A) = 0{,}3267$.

Bayesův vzorec

Nechť H_1 a H_2 jsou komplementární. Pak platí

Bayesův vzorec: $\mathsf{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$

Zobecnění:
Nechť základní prostor Ω je rozdělen na n po dvou neslučitelných jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Pak platí

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(H_k)\mathsf{P}(A|H_k)}{\mathsf{P}(A)\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A|H_i)}.$$

Princip maximální věrohodnosti

„Jest zcela nezpochybnitelným faktem, že nemůžeme-li se poznat nejpravdivější soudy, musíme se řídit soudy nejpravděpodobnějšími.

René Descartes, Rozprava o metodě“

Aplikace

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$: $c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$: $c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$: $c(n - m, r - k) = \binom{n-m}{r-k}$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathsf{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$: $c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathsf{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathsf{P}(A_n^{mrk})$ maximální.

Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců

a spočítáme počet označených mezi nimi.

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$: $c(n - m, r - k) = \binom{n-m}{r-k}$

A_n^{mrk} ... jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathsf{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathsf{P}(A_n^{mrk})$ maximální.
Je $n \in \left\langle \frac{mr}{k}, \frac{mr}{k} + 1 \right)$.

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.
incidence ... počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence ... celkový počet nemocných

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.

incidence . . . počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence . . . celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní[negativní] výsledek? $\mathrm{P}(H|+) =$? [$\mathrm{P}(H|-) =$?]

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathsf{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathsf{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathsf{P}(H)$.

incidence ... počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence ... celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní[negativní] výsledek? $\mathsf{P}(H|+) =$? [$\mathsf{P}(H|-) =$?]

Označení jevů: H ... objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' ... objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathsf{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathsf{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathsf{P}(H)$.
incidence ... počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence ... celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní[negativní] výsledek? $\mathsf{P}(H|+) =?$ [$\mathsf{P}(H|-) =?$]

Označení jevů: H ... objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' ... objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Jevy $+$ a $-$, H a H' jsou komplementární:

$$\mathsf{P}(H') = 1 - r,\ \mathsf{P}(+|H') = 1 - q,\ \mathsf{P}(-|H) = 1 - p$$

Diagnostické testy

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\
\mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q
\end{array}
$$

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\ \mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{\mathsf{P}(H)\mathsf{P}(+|H)}{\mathsf{P}(H)\mathsf{P}(+|H) + \mathsf{P}(H')\mathsf{P}(+|H')} = \frac{rp}{rp + (1-q)(1-r)} = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{\mathsf{P}(H)\mathsf{P}(-|H)}{\mathsf{P}(H)\mathsf{P}(-|H) + \mathsf{P}(H')\mathsf{P}(-|H')} = \frac{r(1-p)}{r(1-p) + (1-r)q} = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\ \mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$
	senzitivita	$p = 0{,}998$
	specificita	$q = 0{,}99$

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\ \mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS

incidence	$r = 0,001$	
senzitivita	$p = 0{,}998$	
specificita	$q = 0{,}99$	$\mathsf{P}(H|+) = 0{,}091$

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1 - p \\ \mathsf{P}(H') = 1 - r & \mathsf{P}(+|H') = 1 - q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathsf{P}(H\|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\ \mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathsf{P}(H|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$r_1 = 0{,}091 :$ $\qquad \mathsf{P}(H|++) = 0{,}909$

Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(H) = r & \mathsf{P}(+|H) = p & \mathsf{P}(-|H) = 1-p \\ \mathsf{P}(H') = 1-r & \mathsf{P}(+|H') = 1-q & \mathsf{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathsf{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathsf{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathsf{P}(H\|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$r_1 = 0{,}091$: $\mathsf{P}(H| + +) = 0{,}909$

$r_2 = 0{,}909$: $\mathsf{P}(H| + ++) = 0{,}999$, $\mathsf{P}(H| + +-) = 0{,}020$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ . . . množství jedinců v čase t
f . . . očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ . . . P(jedinec přežije jednotku času)

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ . . . množství jedinců v čase t
f . . . očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ . . . P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D$$

$$B = fx(t)$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ . . . množství jedinců v čase t
f . . . očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ . . . P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D$$

$$B = f x(t), \qquad 1 - \sigma = \frac{D}{x(t)}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D$$

$$B = fx(t), \qquad 1-\sigma = \frac{D}{x(t)} \Rightarrow D = (1-\sigma)x(t)$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D =$$
$$= x(t) + fx(t) - (1-\sigma)x(t) = (\sigma + f)x(t)$$

$$B = fx(t), \qquad 1 - \sigma = \frac{D}{x(t)} \Rightarrow D = (1-\sigma)x(t)$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D = \\ &= x(t) + fx(t) - (1-\sigma)x(t) = (\sigma + f)x(t) \end{aligned}$$

$$B = fx(t), \qquad 1 - \sigma = \frac{D}{x(t)} \;\Rightarrow\; D = (1-\sigma)x(t)$$

Označení: $r = \sigma + f$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná

$x = x(t)$ ... množství jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků jedince za jednotku času
σ ... P(jedinec přežije jednotku času)

$$x(t+1) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství uhynulých} = x(t) + B - D =$$
$$= x(t) + fx(t) - (1-\sigma)x(t) = (\sigma + f)x(t) = rx(t)$$

$$B = fx(t), \qquad 1 - \sigma = \frac{D}{x(t)} \;\Rightarrow\; D = (1-\sigma)x(t)$$

Označení: $r = \sigma + f$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje)
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času)
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času)

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$x(t+1) =$ množství juvenilních, kteří přežili a nedospěli $+$ množství nově narozených
$y(t+1) =$ množství juvenilních, kteří přežili a dospěli $+$ množství plodných, kteří přežili

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$x(t+1) =$ množství juvenilních, kteří přežili a nedospěli $+ fy(t)$
$y(t+1) =$ množství juvenilních, kteří přežili a dospěli $+$ množství plodných, kteří přežili

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \text{množství juvenilních, kteří přežili a nedospěli} + fy(t) \\ y(t+1) &= \text{množství juvenilních, kteří přežili a dospěli} + \sigma_2 y(t) \end{aligned}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)x(t) + fy(t) \\ y(t+1) &= \text{množství juvenilních, kteří přežili a dospěli} + \sigma_2 y(t) \end{aligned}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ . . . množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ . . . množství plodných jedinců v čase t
f . . . očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ . . . P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 . . . P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 . . . P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)x(t) + fy(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t) \end{aligned}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné

$x = x(t)$ ... množství juvenilních jedinců v čase t
$y = y(t)$ ... množství plodných jedinců v čase t
f ... očekávaný (průměrný) počet potomků plodného jedince za jednotku času
γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje), $0 < \gamma \leq 1$
σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije jednotku času), $0 < \sigma_1 < 1$
σ_2 ... P(plodný jedinec přežije jednotku času), $0 \leq \sigma_2 < 1$

Předpokládáme, že rození a dospívání jsou nezávislé jevy

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t)$$

Růst populace

- Populace nestrukturovaná: $x(t+1) = rx(t)$
- Populace strukturovaná na juvenilní a plodné: $\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t)$