Limita a spojitost

M1030 7. a 14. 11. 2019

Aplikace – motivace
Růst homogenní populace
Růst homogenní populace s omezenými zdroji
Posloupnosti
Spojité funkce
Limita funkce

Aplikace – motivace

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost
$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

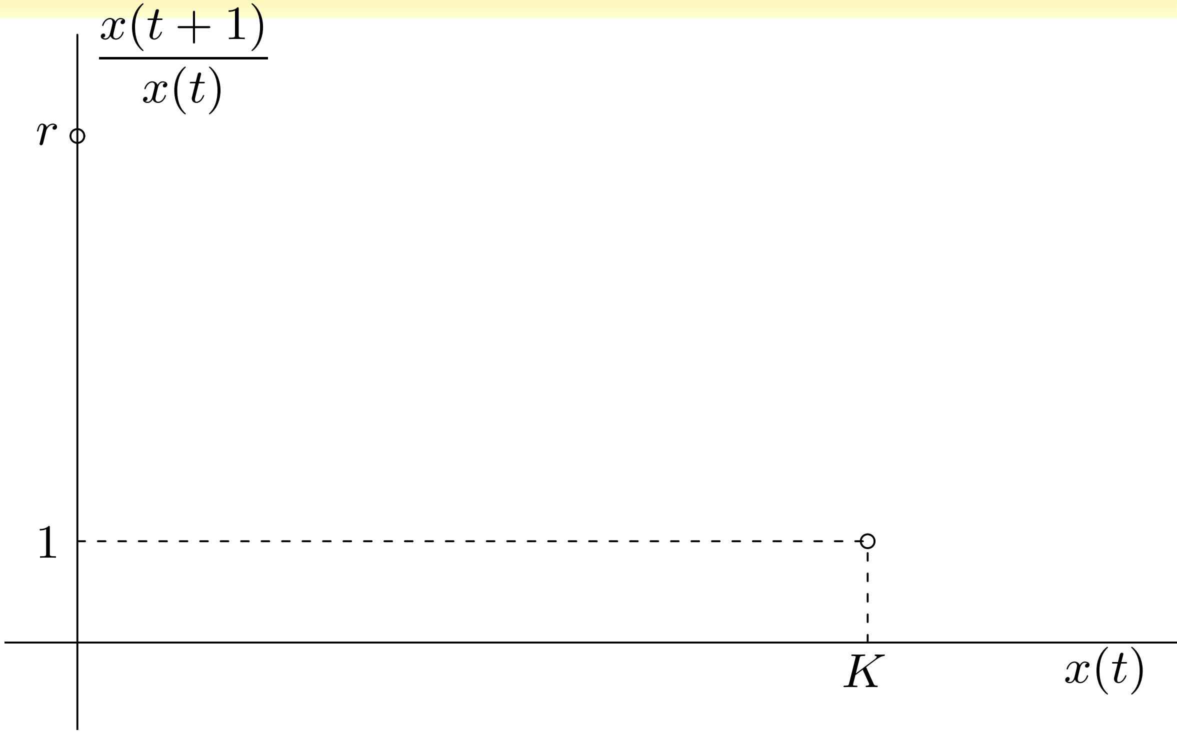
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

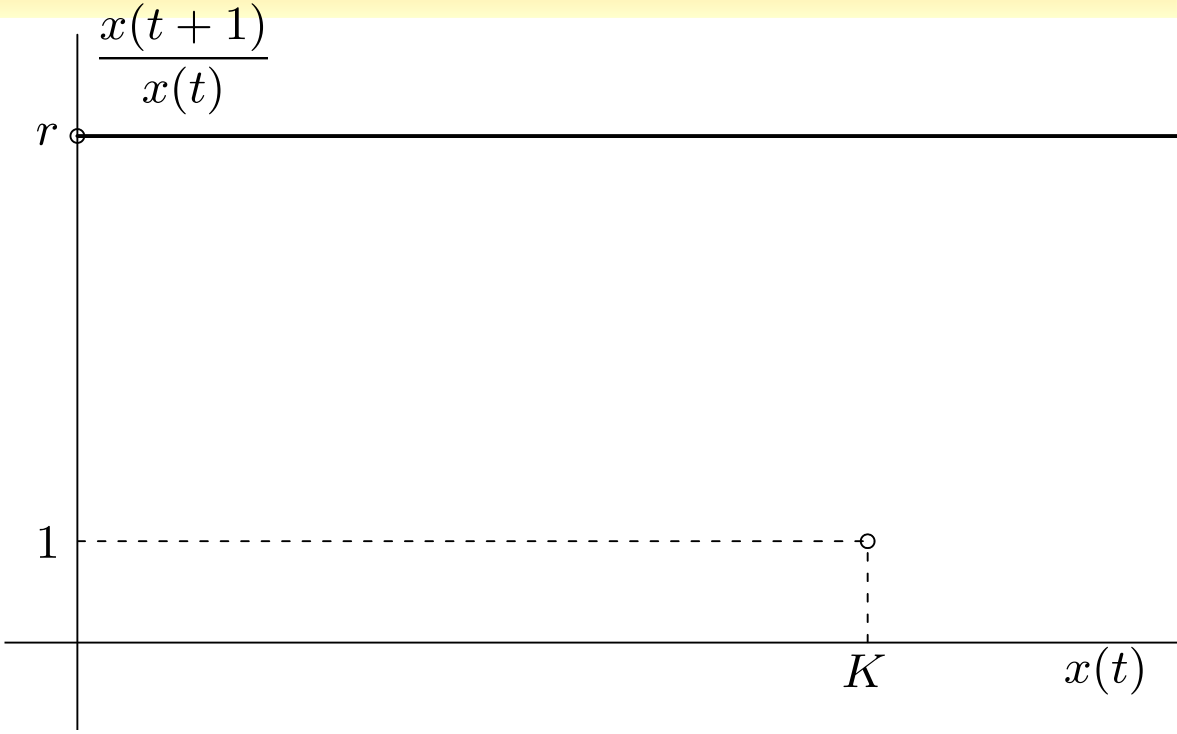
$$r = r\big(x(t)\big)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

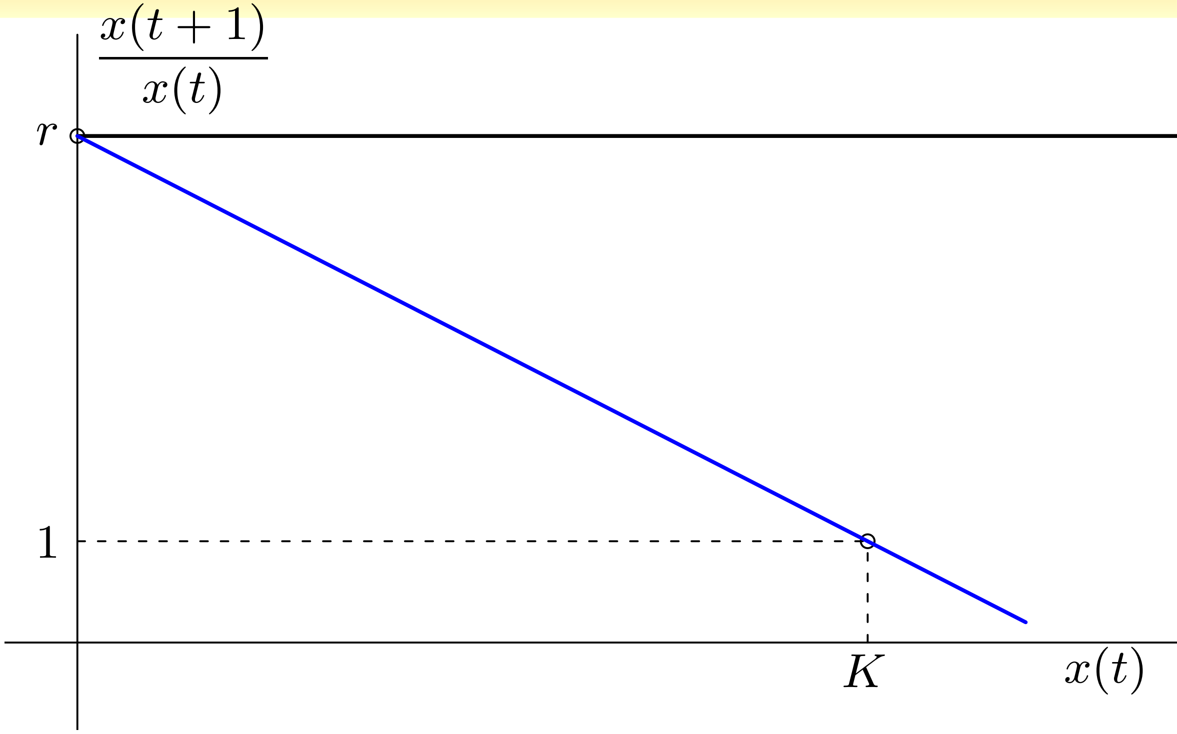
Malthus, Euler:
$x(t+1) = rx(t)$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus, Euler:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst, May:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus, Euler:

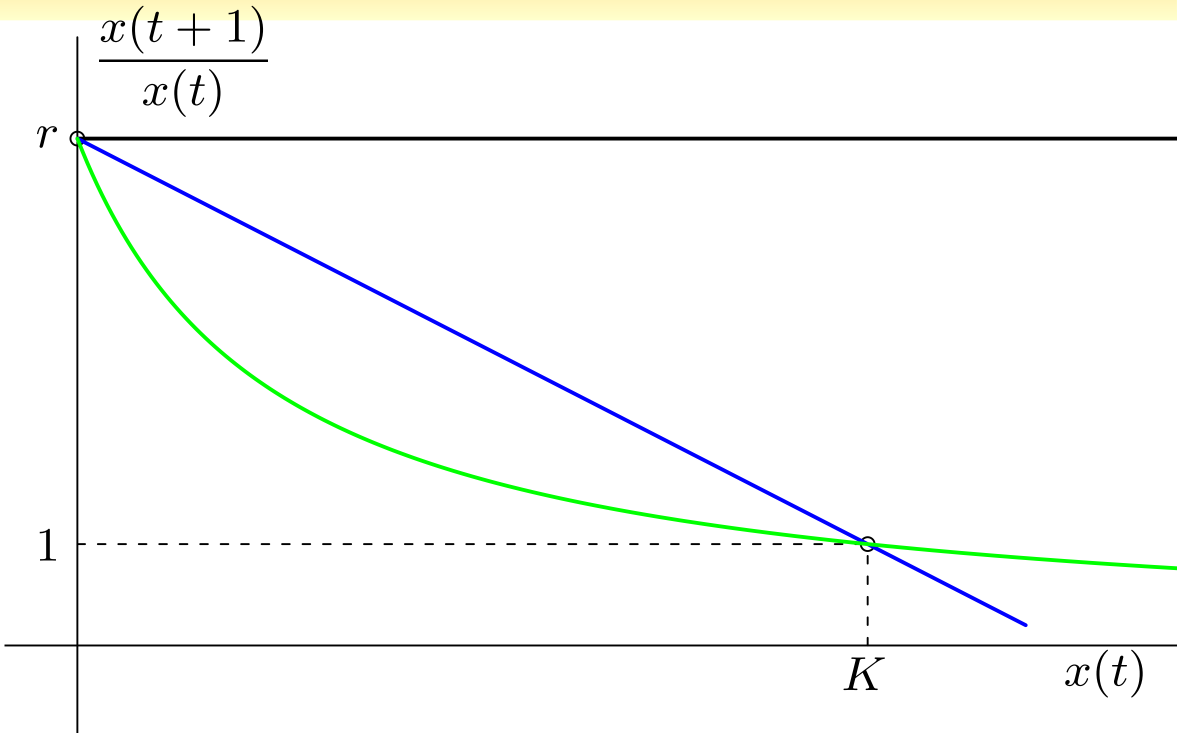
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst, May:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Beverton a Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\dfrac{x(t)}{K}}\,x(t)$$



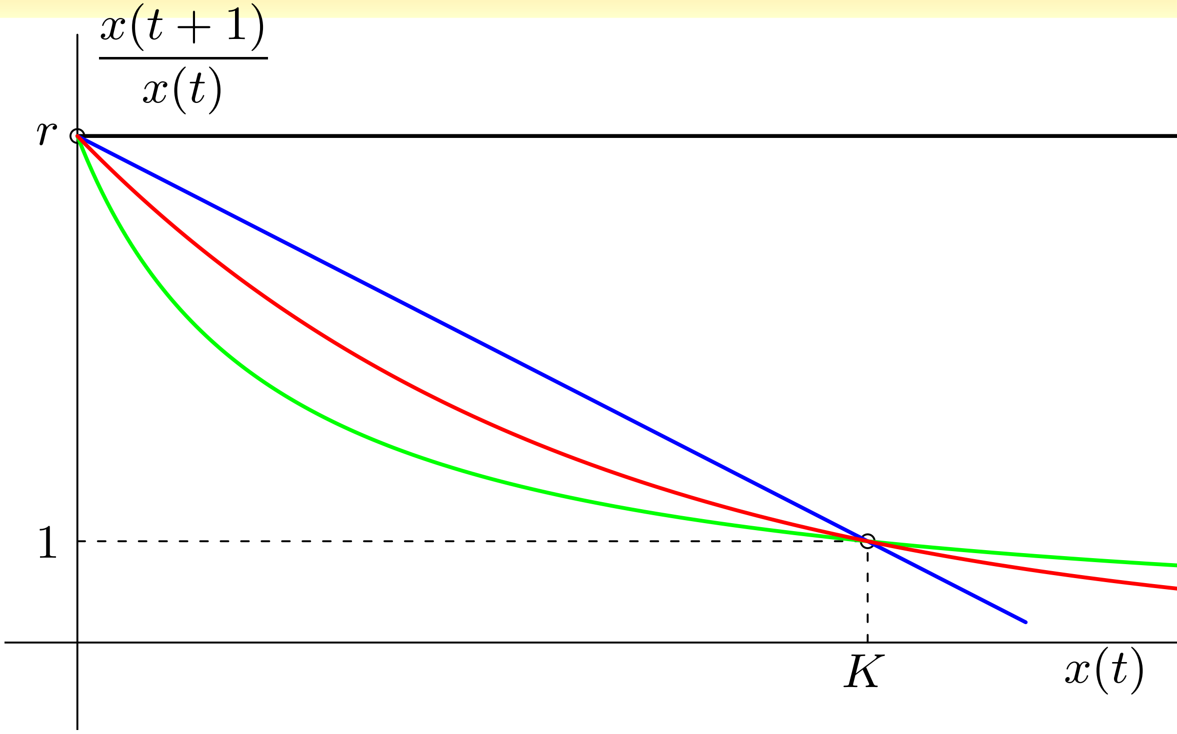
Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus, Euler:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst, May:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton a Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Aplikace – motivace

Posloupnosti
Pojem posloupnosti
Příklady posloupností
Diference a její význam
Limita
Vlastnosti limity
Příklady
Nevlastní limita
Vlastnosti nevlastní limity
Příklady – nevlastní limity

Spojité funkce

Limita funkce

Posloupnosti

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Rekurentní zápis posloupnosti: předpis pro výpočet n-tého členu posloupnosti pomocí jednoho (nebo několika předchozích) současně se zadáním počátečního členu (nebo několika počátečních členů)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

$d > 0$ neohraničená rostoucí
$d < 0$ neohraničená klesající,

$d = 0$ ohraničená stacionární

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$

$q > 1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, $a_0 > 0$ rostoucí, $a_0 < 0$ klesající
$q = 1$	ohraničená (stacionární)
$0 < q < 1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ klesající, $a_0 < 0$ rostoucí
$q = 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ nerostoucí, $a_0 < 0$ neklesající
$-1 < q < 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, „tlumené oscilace“
$q = -1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, periodická s periodou 2
$q < -1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, „netlumené oscilace“

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_a = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_a = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

pro „velká“ n „se chová“ jako geometrická s kvocientem $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ a počátečním členem $\frac{1}{5}(5+\sqrt{5})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_a = 1$	$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
Mayova (logistická)	$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_a = 1$	$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
Mayova (logistická)	$a_{n+1} = ra_n\left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

$$r = 2,\ \ K = \tfrac{1}{2},\ a_n = 2(1-a_n)\colon\ a_n = \tfrac{1}{2}\left(1 - (1-2a_0)^{2^n}\right)$$

$$r = 4,\ \ K = \tfrac{3}{4},\ a_n = 4(1-a_n)\colon\ a_n = \left[\sin\left(2^n \arcsin\sqrt{a_0}\right)\right]^2$$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_a = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
Mayova (logistická)	$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)
Bevertonova-Holtova	$a_{n+1} = \dfrac{Kr}{K + (r-1)a_n}$	$\dfrac{Ka_0}{a_0 + (K - a_0)r^{-n}}$	
Rickerova	$a_n = r^{1-a_n/K}a_n$		

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \;\Rightarrow\; \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \;\Rightarrow\; \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Rekurentní formuli lze přepsat pomocí diference:

Příklad:

$$a_{n+1} = r a_n \left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = r a_n - (r-1)\frac{a_n^2}{K} - a_n$$

$$\Delta a_n = (r-1)a_n \left(1 - \frac{a_n}{K}\right)$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α.

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Vlastnosti limity

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 - 3(\frac{3}{2})^n} - \frac{1}{2(\frac{2}{3})^n - 3} \right) = 0 - \frac{1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} =$$

$$= \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} = \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0,\ \ k\in\mathbb{N},\qquad \lim_{n\to\infty}q^n=0 \text{ pro } |q|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

$$0<\frac{n^2}{2^n}=\frac{n^2}{(1+1)^n}=\frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+1}<\frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}=$$

$$=\frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}=\frac{6n^2}{6+5n+n^3}=\frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1} < \frac{n^2}{1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}} =$$

$$= \frac{6n^2}{6 + 6n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)} = \frac{6n^2}{6 + 5n + n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n} + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n} + n} = 0$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Nevlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“ H jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti větší než hranice H a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“ H jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti větší než hranice H a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n < H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do minus nekonečna.*

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

$$a_n = n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$$

$$a_n = n^2,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$$a_n = n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy: $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \dfrac{0}{0},\ 0 \cdot \infty = 0 \cdot \dfrac{1}{0} = \dfrac{0}{0},\ \infty - \infty = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = \dfrac{0-0}{0^2} = \dfrac{0}{0}\right)$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3)$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{n^3} - \tfrac{3}{n^2} + \tfrac{2}{n} - 1\right) n^3 = -\infty$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(1+n)(1-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1-n} - 1\right) = -1$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(1+n)(1-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1-n} - 1\right) = -1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1} = \frac{1+0+0}{0-1} = -1$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^5}}{3 + \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^5}} = \frac{0 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 0$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 3 + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^5}} = \infty$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\frac{a_k}{b_m})\infty, & k > m \\ \frac{a_k}{b_m}, & k = m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

Aplikace – motivace

Posloupnosti

Spojité funkce
Spojitost
Spojitost v bodě
Exkurs: výroky s kvantifikátory
Operace se spojitými funkcemi
Spojitost na intervalu
Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Limita funkce

Spojité funkce

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou,

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

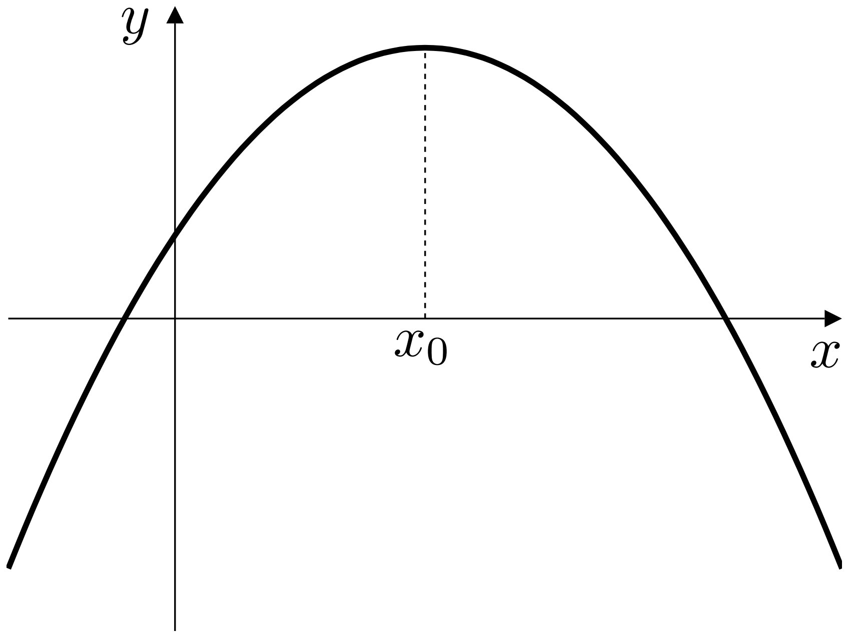
- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;

Spojitost

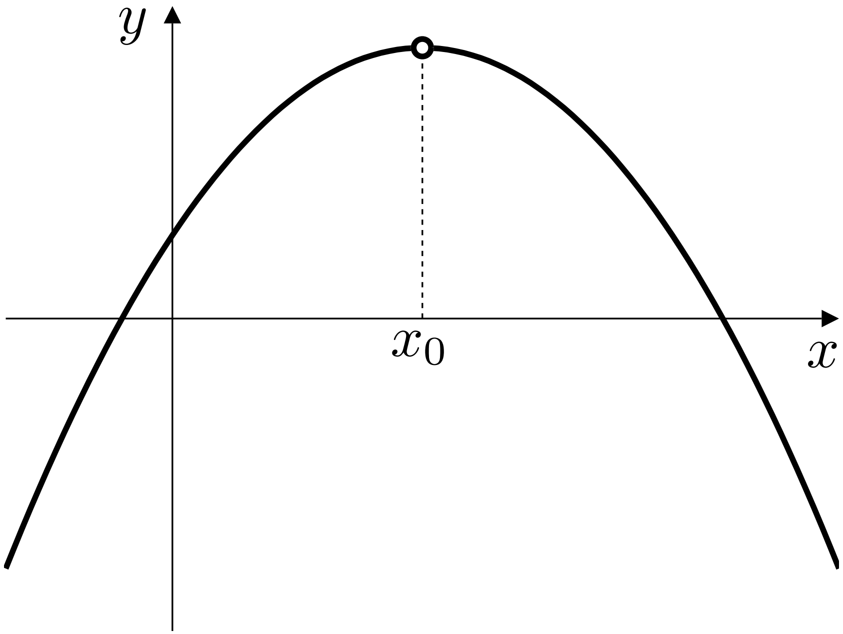
Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;
- malá změna nezávisle proměnné vyvolá malou změnu závisle proměnné.

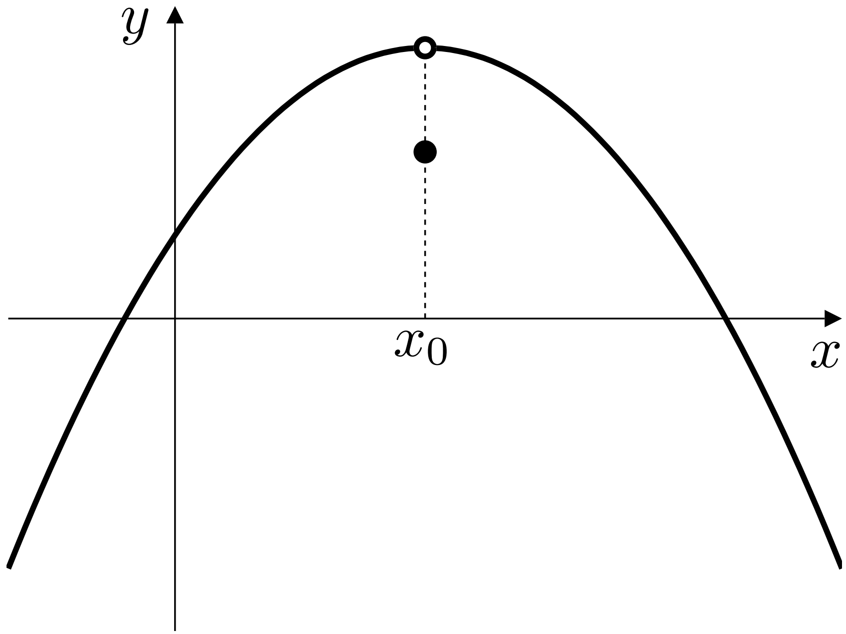
Spojitost v bodě



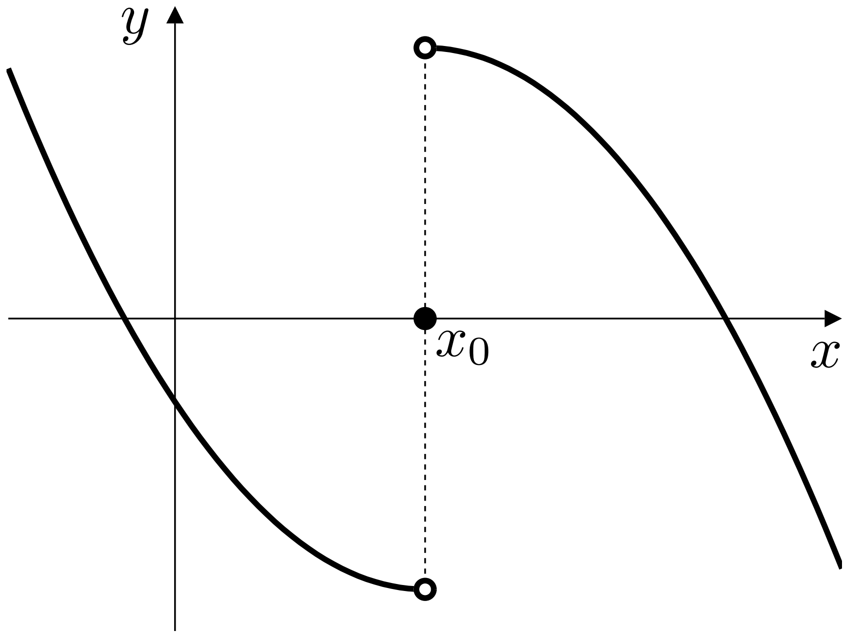
Spojitost v bodě



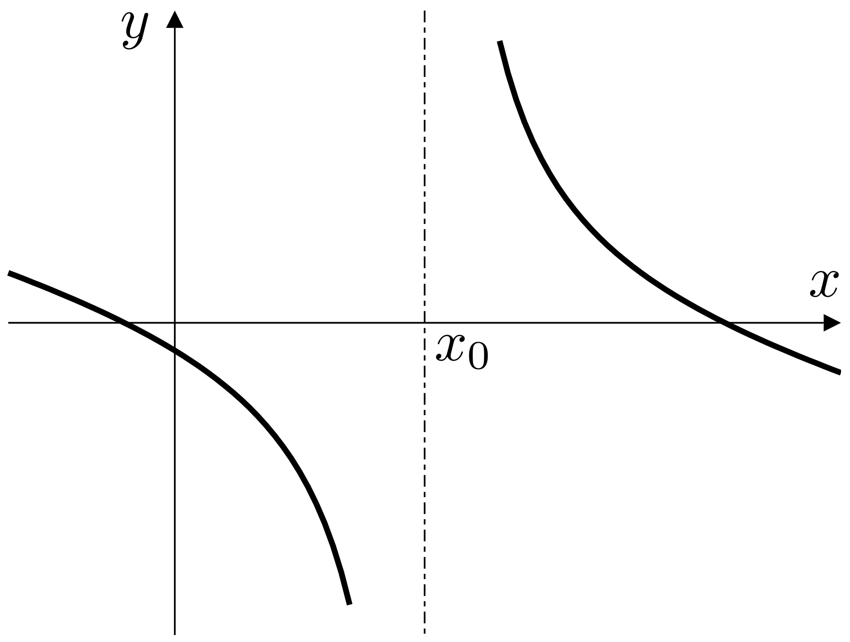
Spojitost v bodě



Spojitost v bodě

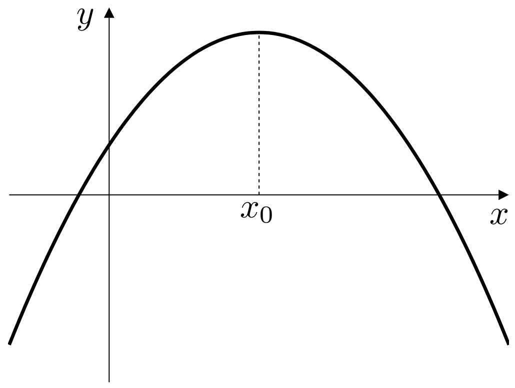


Spojitost v bodě

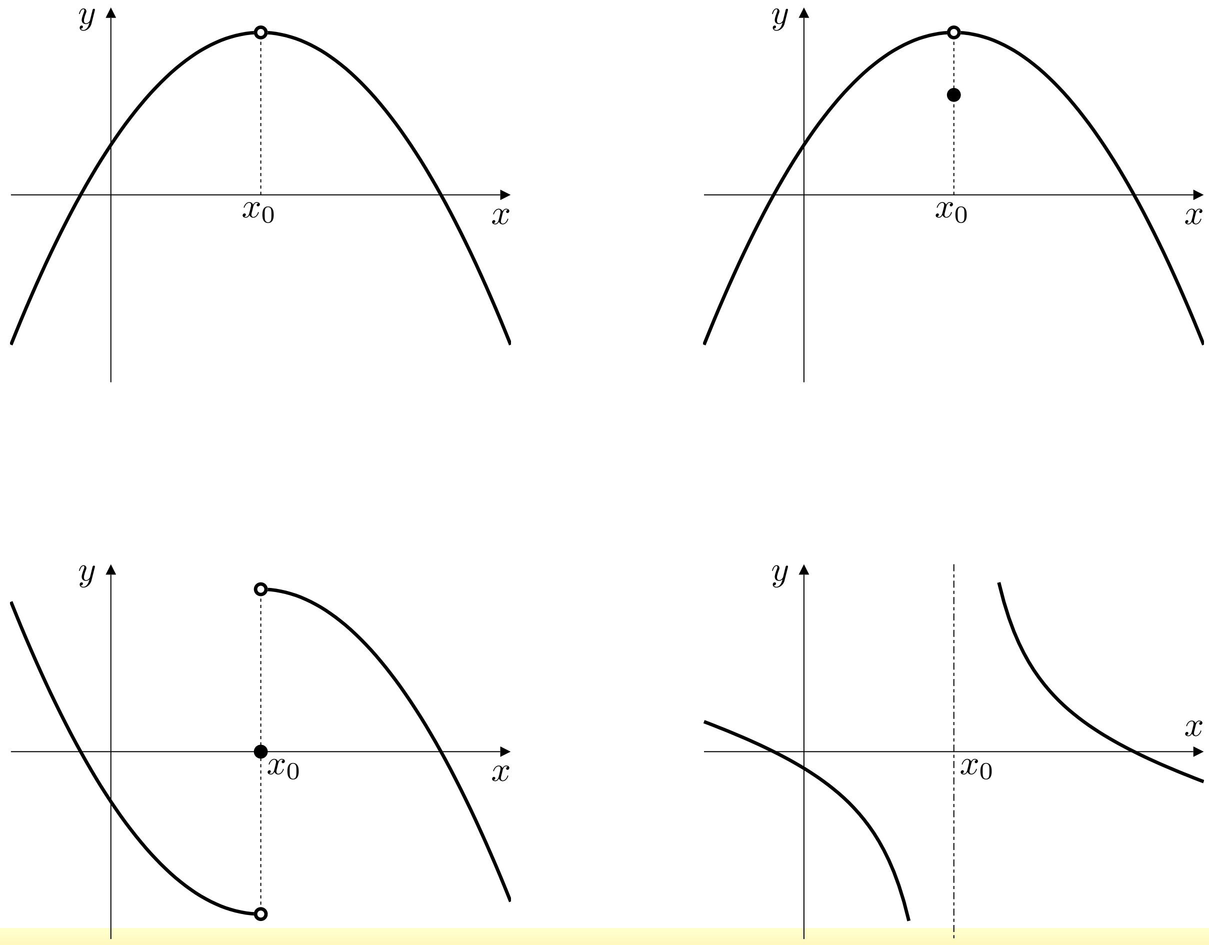


Spojitost v bodě

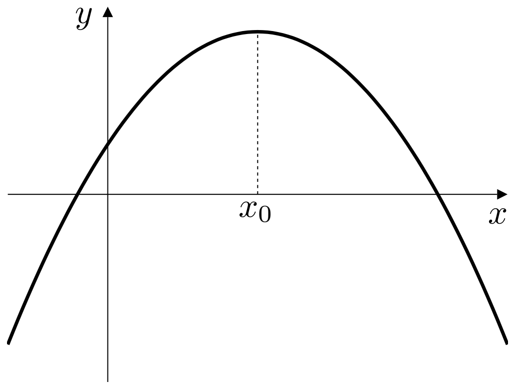
Funkce spojitá v bodě x_0



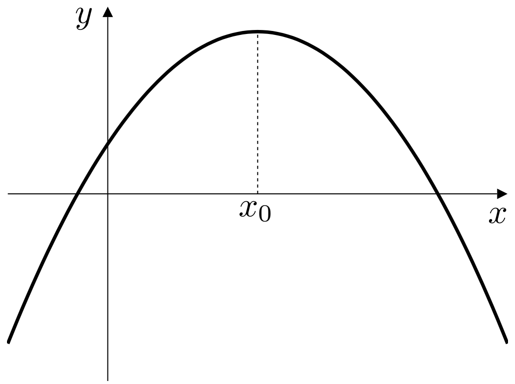
Funkce nespojité v bodě x_0



Spojitost v bodě



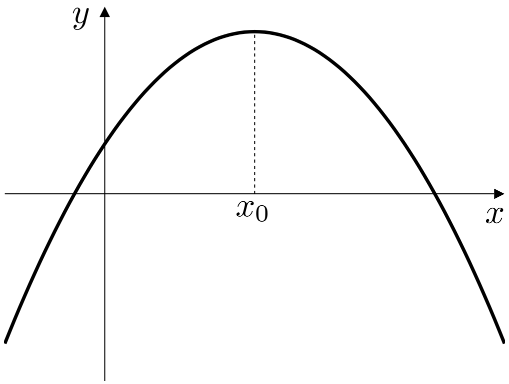
Funkce f *je spojitá v bodě* x_0:



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.

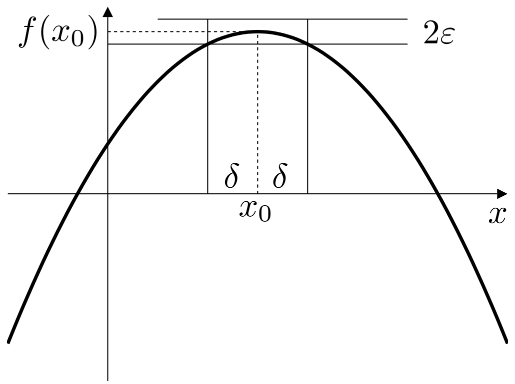
Spojitost v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.

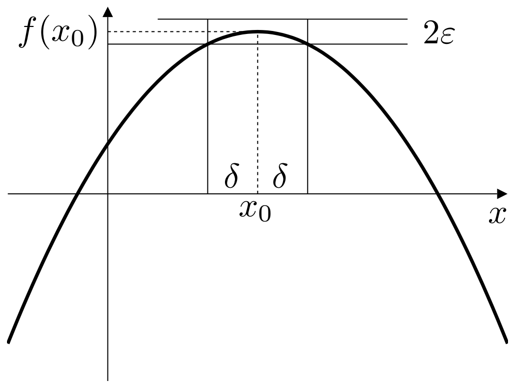
Spojitost v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko" x_0 pak je $f(x)$ „blízko" $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti" ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti" δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko" k x_0 „podle měřítka" δ, tak je $f(x)$ „blízko" $f(x_0)$ „podle měřítka" ε.

Spojitost v bodě

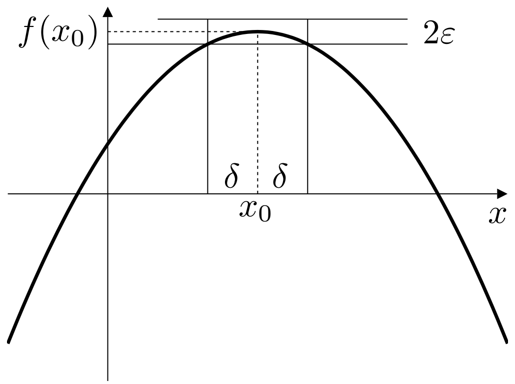


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.

$$x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

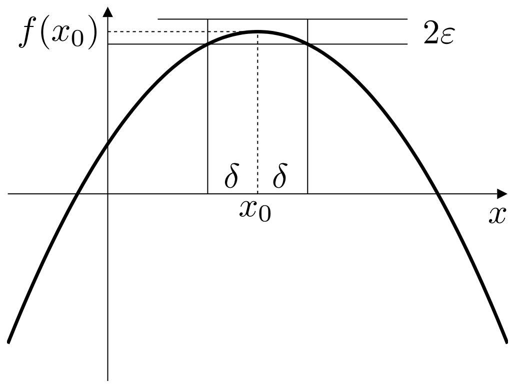


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad\qquad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

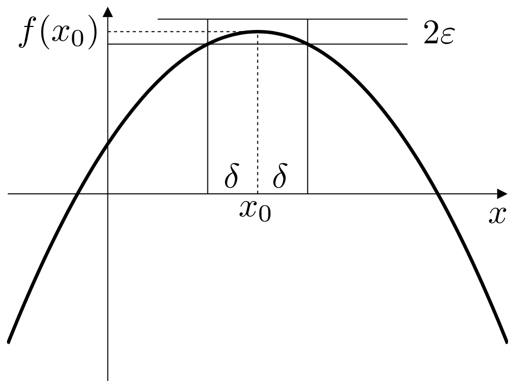


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in D(f) \;\; |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

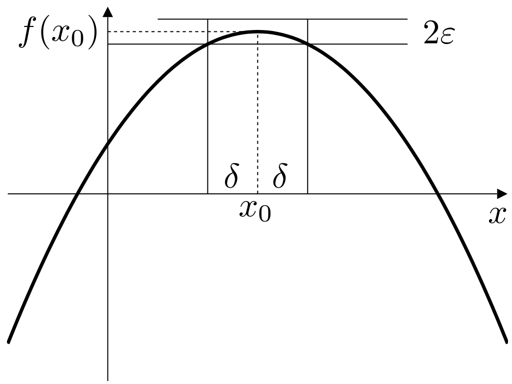


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, že pro jakékoliv $x \in D(f)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

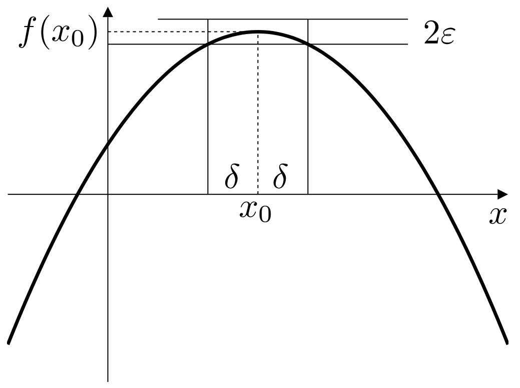


Funkce f je spojitá v bodě x_0:

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε, lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ, tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε.
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, že pro jakékoliv $x \in D(f)$ z δ-blízkosti x k x_0 nutně vyplyne ε-blízkost $f(x)$ k $f(x_0)$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

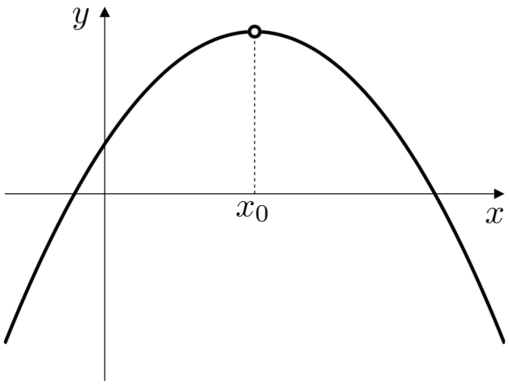


Funkce f *je spojitá v bodě* x_0:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost v bodě

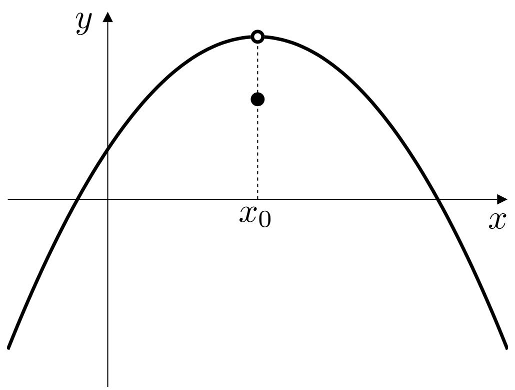
Funkce f je nespojitá v bodě x_0:



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

∗ Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.

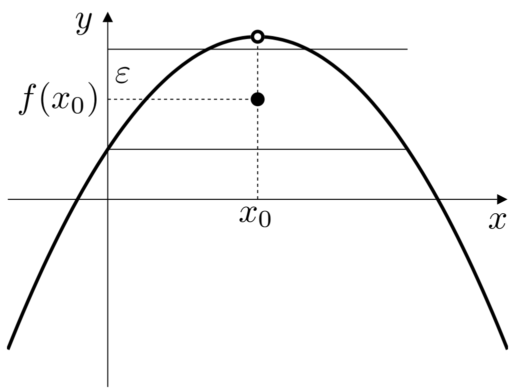
Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

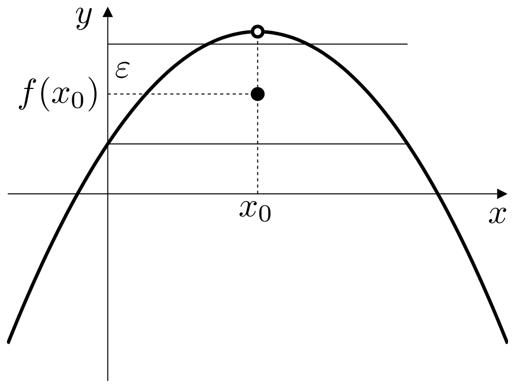
* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.

Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

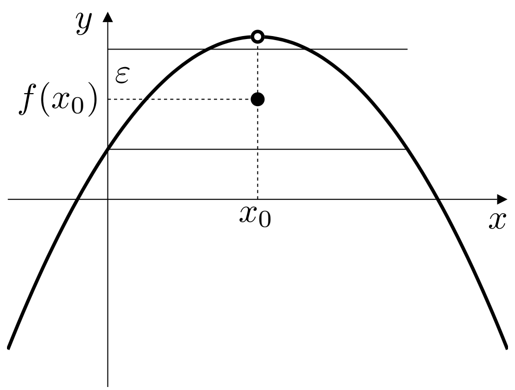


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$|x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě

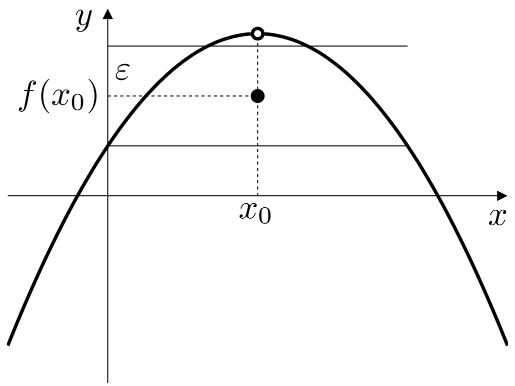


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε

$$(\exists \varepsilon > 0) \qquad\qquad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě

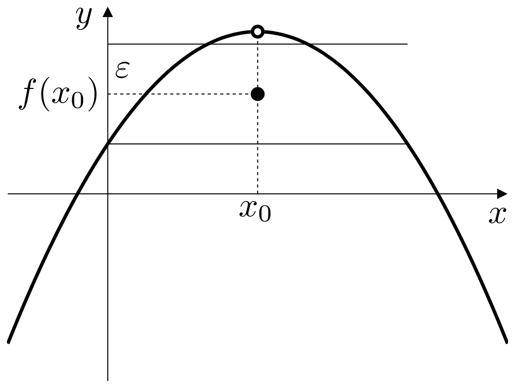


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \qquad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitost v bodě

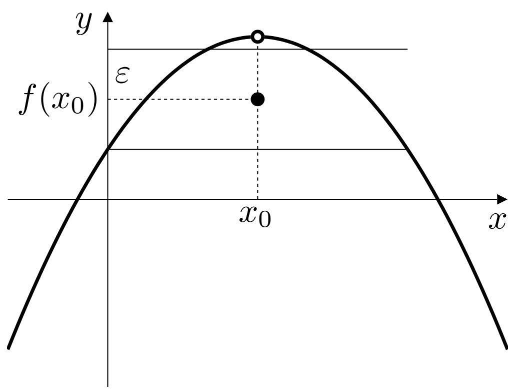


Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

- ∗ Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- ∗ Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

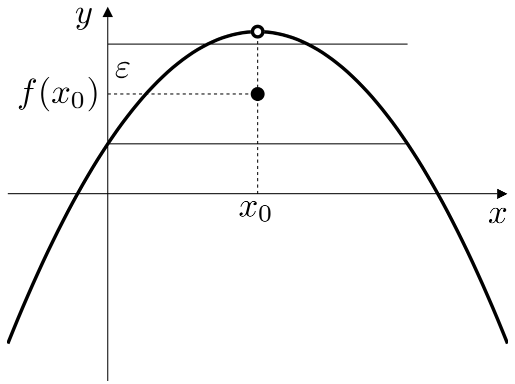
Spojitost v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0:

* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
* Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
  - Přestože x „je blízko“ k x_0, tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε, že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné „δ-blízké k x_0“, jejichž příslušné funkční hodnoty jsou „ε-vzdálené“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta\ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$



Funkce f je nespojitá v bodě $x_0 \in D(f)$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta\ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) \ |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je konstantní.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je konstantní.

$$(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$. Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| \geq \delta \ \&\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je konstantní.

$$(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f má v $x_0 \in D(f)$ ohraničenou rychlost růstu.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g,\ f - g,\ fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f+g,\ f-g,\ fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f+g, \; f-g, \; fg$$

jsou spojité v bodě x_0. Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0.

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Pokud existuje inverzní funkce f^{-1}, pak je tato funkce spojitá v bodě $f(x_0)$.

Spojitost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Každá elementární funkce je spojitá na každém intervalu, který je částí jejího definičního oboru.

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815–1897

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$\begin{aligned}(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\; f(c) \le f(x) \le f(d)& \\ \& \; (\forall y \in \langle f(c), f(d)\rangle)(\exists \xi \in \langle a, b\rangle)\; f(\xi) = y&\end{aligned}$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists c \in (a, b))\; f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$\begin{aligned}(\exists c, d \in \langle a, b\rangle)(\forall x \in \langle a, b\rangle)\; & f(c) \le f(x) \le f(d) \\ & \& \; (\forall y \in \langle f(c), f(d)\rangle)(\exists \xi \in \langle a, b\rangle)\; f(\xi) = y\end{aligned}$$

Bernard Bolzano 1781–1848

Aplikace – motivace

Posloupnosti

Spojité funkce

Limita funkce

Představa a pojem limity

Nevlastní limita

Limita v nevlastním bodě

Výpočet limit

Příklady

Limita funkce

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě x_0 limitu a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

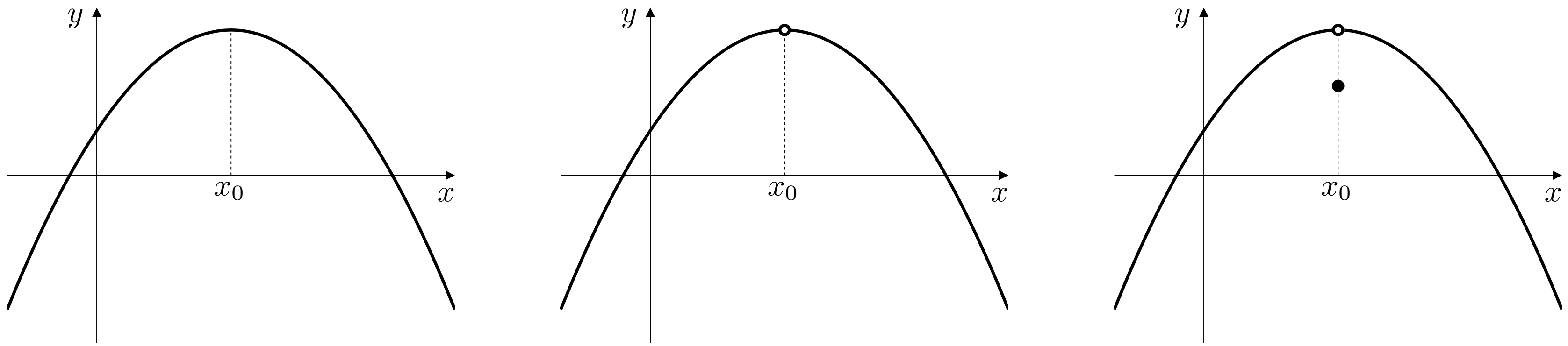
Funkce f má ve vlastním bodě x_0 vlastní limitu a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

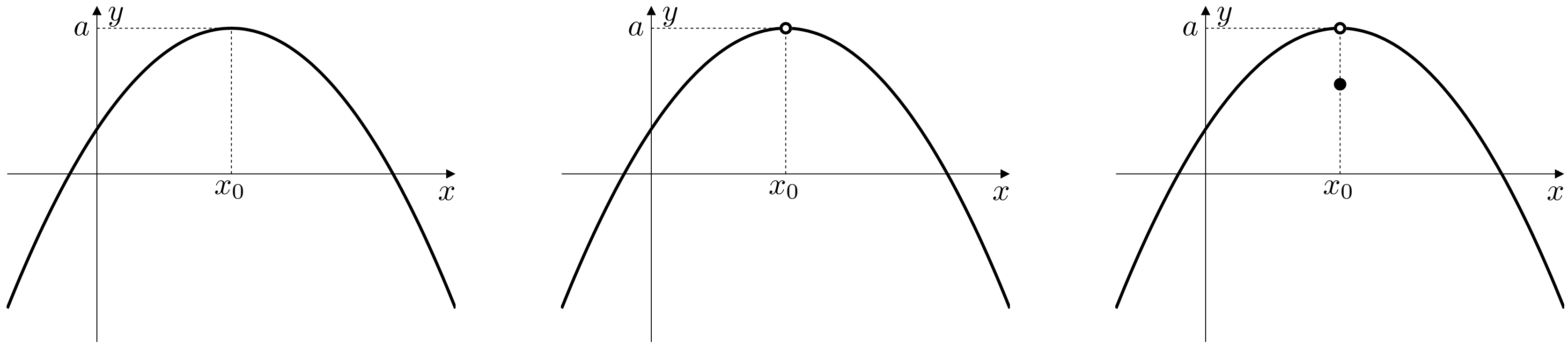
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

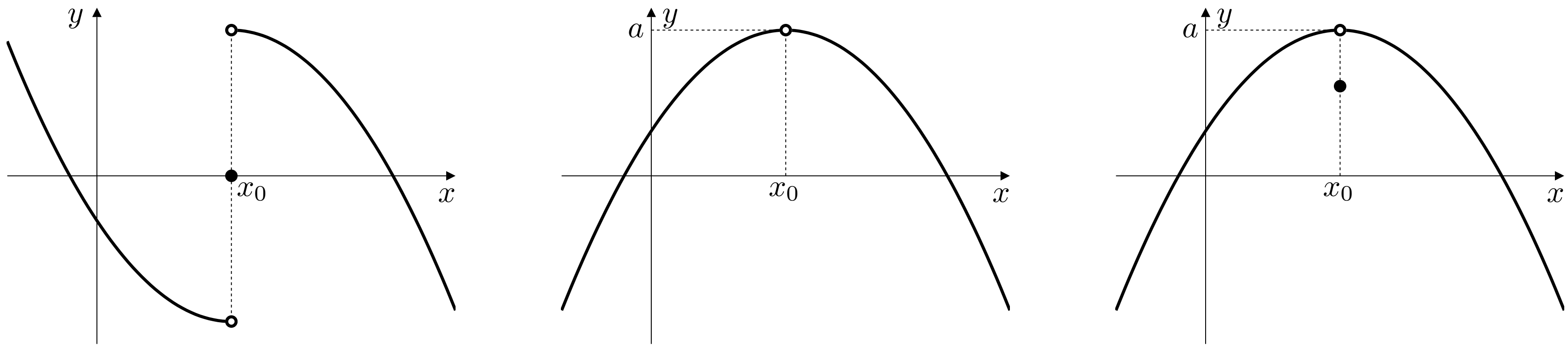


Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

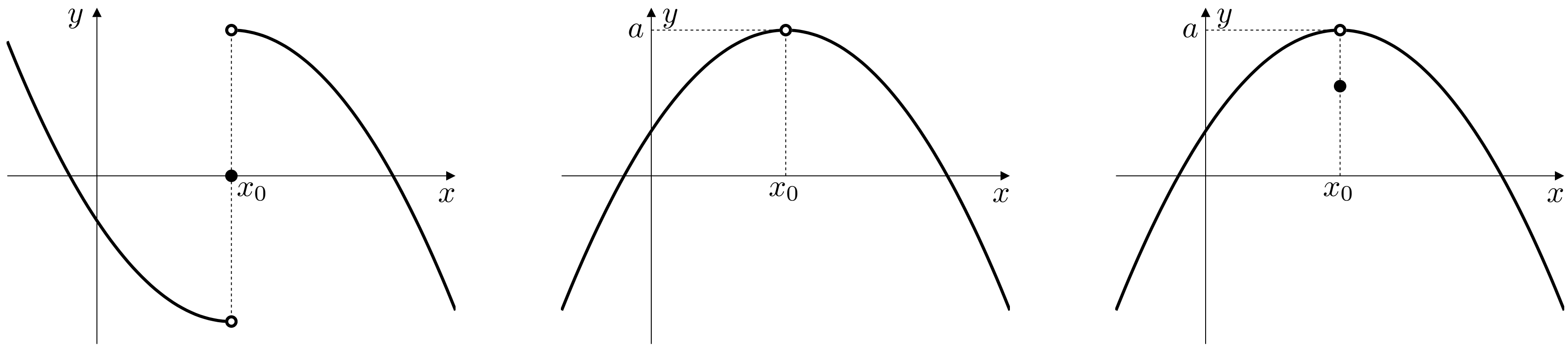
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



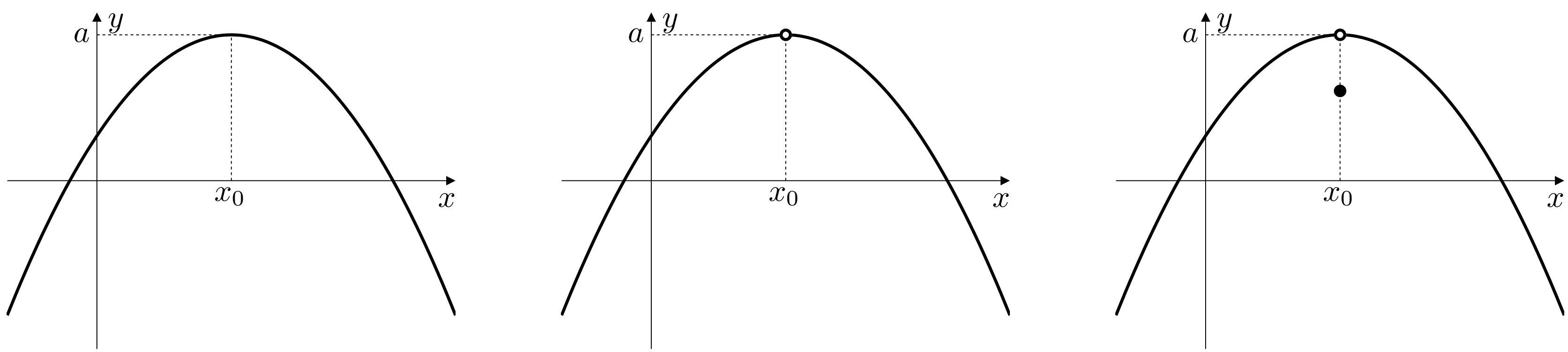
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 se příslušné hodnoty nutně přiblíží k hodnotě a.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



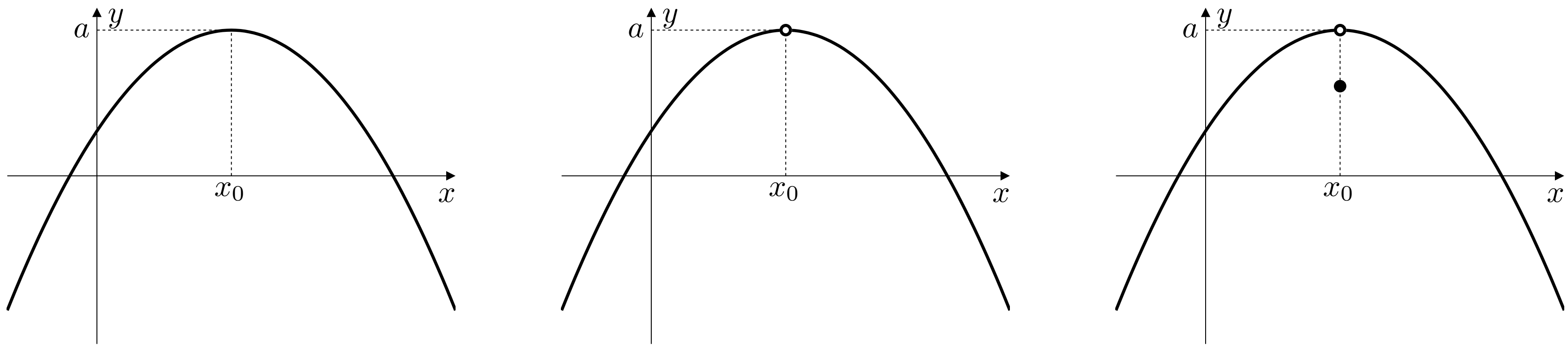
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a.

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 se příslušné hodnoty nutně přiblíží k hodnotě a.

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big) \ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

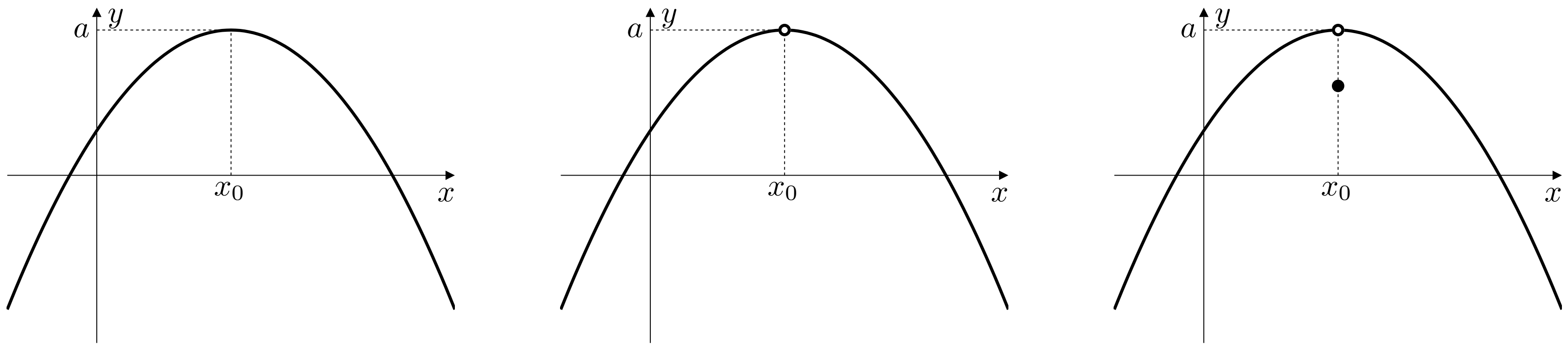


Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



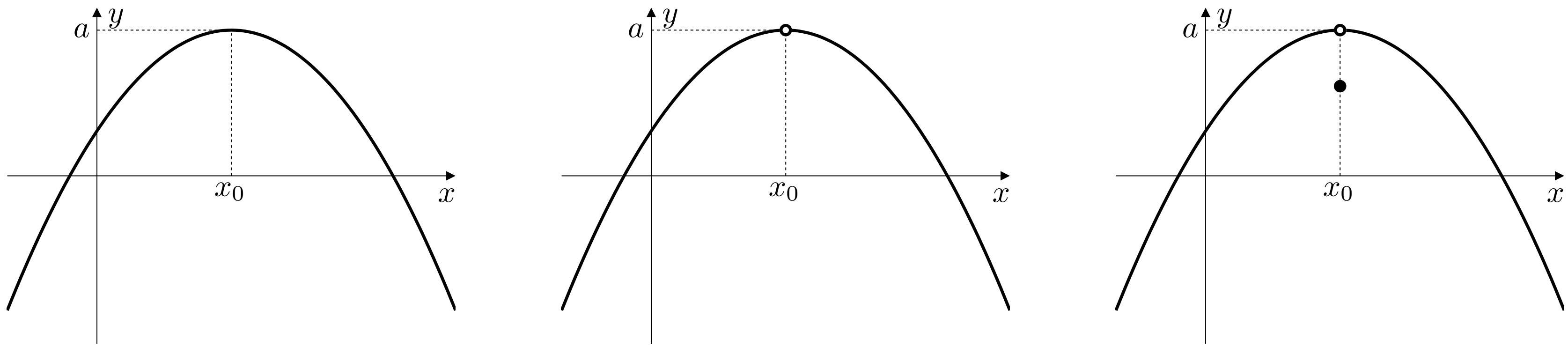
Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0, tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Pokud je funkce f spojitá v x_0, tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0, tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f),\ \lim_{n \to s} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f),\ \lim_{n \to s} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f.

x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\right)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

Nevlastní limita

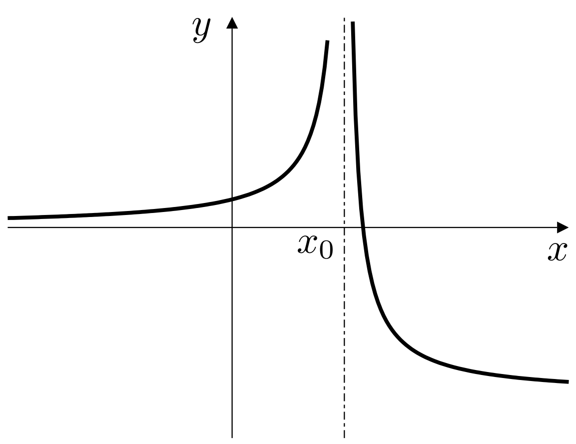
$x_0 \in \mathbb{R}$

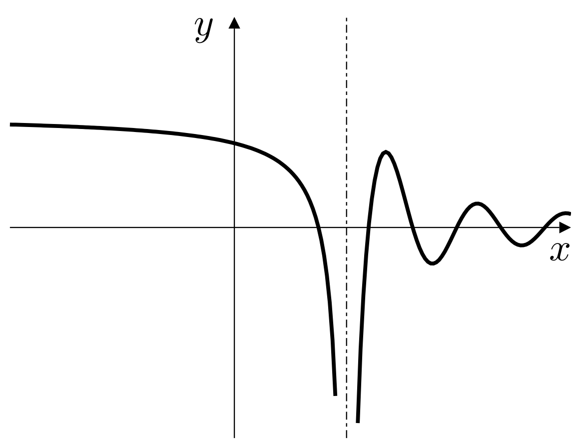
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > H$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\right)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < H$$

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\right)\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$





Vlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Limita v nevlastním bodě

Nevlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow f(x) > H$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x > h \Rightarrow f(x) < H$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow f(x) > H$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))\ x < h \Rightarrow f(x) < H$$

$$\big(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)\big)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1: \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1},$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0 < |x-x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

$$x \neq 1: \quad \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = 0$

$$x \neq 1: \quad \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) \ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)=g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big]$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \sin n\pi = 0$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g))\ \big(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)\big) \& \big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g, která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce f $\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\Big[(\exists\eta)(\exists g)(\forall x \in D(f)\cap D(g))\ \big(0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)=g(x)\big)\&\big(g \text{ spojitá v } x_0\big)\Big] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x \to \infty} \big(a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\big) = \operatorname{sgn}(a_n)\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\big) = \operatorname{sgn}(a_n)(-1)^n\infty$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} \big(a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\big) = \operatorname{sgn}(a_n)\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\big) = \operatorname{sgn}(a_n)(-1)^n\infty$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)\infty, & m < n \end{cases}$$

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)(-1)^{n+m}\infty, & m < n \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

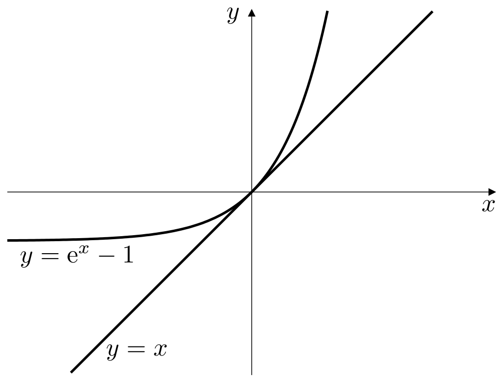
- $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

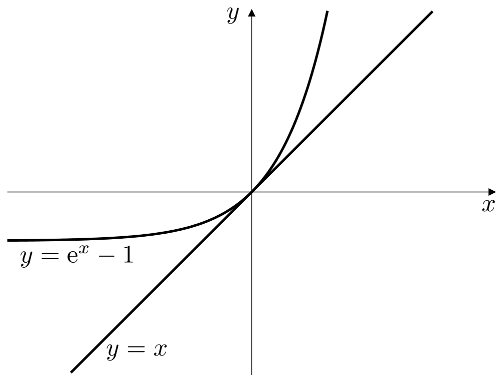
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$



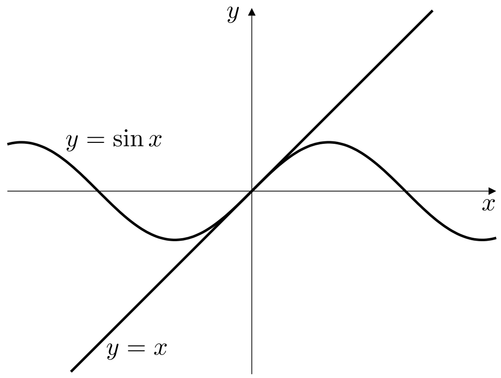
$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$



- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Příklady

$$\lim_{x\to-2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}$$

Příklady

$$\lim_{x \to -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

Příklady

$$\lim_{x\to-2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}=\frac{6+4-8}{12-8-3}=2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0=-2$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$

Příklady

$$\lim_{x\to -2} \frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3} = \frac{6+4-8}{12-8-3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$ neexistuje

Příklady

$$\lim_{x\to -2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}=\frac{6+4-8}{12-8-3}=2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0=-2$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{-4}{-1}=4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}$$ neexistuje

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2x^3-3x+2}{7-4x^3}$$

Příklady

$$\lim_{x\to-2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}=\frac{6+4-8}{12-8-3}=2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0=-2$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(3x-1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{-4}{-1}=4$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}$$ neexistuje

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+2}{7-4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^3}-4}=\frac{2-0+0}{0-4}=-\frac{1}{2}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+3}=-9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 1}{(\mathrm{e}^x)^2 + 1} = -1$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 1}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+3}=-9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\mathrm{e}^{x})^2-1}{(\mathrm{e}^{x})^2+1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=-1$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 1}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 1}{(\mathrm{e}^x)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

Příklady

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos 5x}{5\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$