Diferenciální rovnice

M1030 12. a 19. 12. 2019

Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Základní pojmy

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

Základní pojmy

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

Řešit tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

Základní pojmy

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

Řešit tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

Například, je-li závisle proměnná y a nezávisle proměnná x, pak takovou rovnicí je:

$$F(x, y, y') = 0$$

Základní pojmy

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

Řešit tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

Například, je-li závisle proměnná y a nezávisle proměnná x, pak takovou rovnicí je:

$$F(x, y, y') = 0$$

Alternativně: *ODR* je rovnost, v níž vystupují dvě proměnné a jejich diferenciály. Např.

$$G(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0$$

V tomto pojetí není explicitně řečeno, která z proměnných je závislá a která nezávislá.

Příklad:

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde c je libovolná konstanta.

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde a, b jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde c je libovolná konstanta.

Zkouška: $y' = c$,
$$xy' - y = xc - cx = 0$$

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde a, b jsou libovolné konstanty.

Zkouška:
$$\begin{array}{c} a\mathrm{d}x = b\mathrm{d}y \\ by = ax \\ \hline aby\mathrm{d}x = abx\mathrm{d}y \end{array}$$

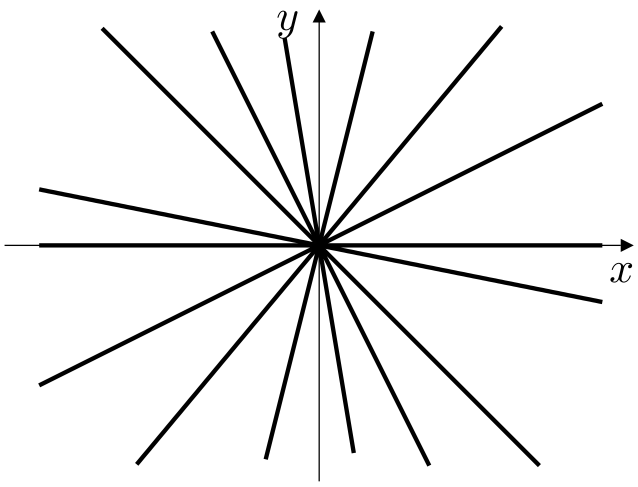
Příklad:

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde c je libovolná konstanta.

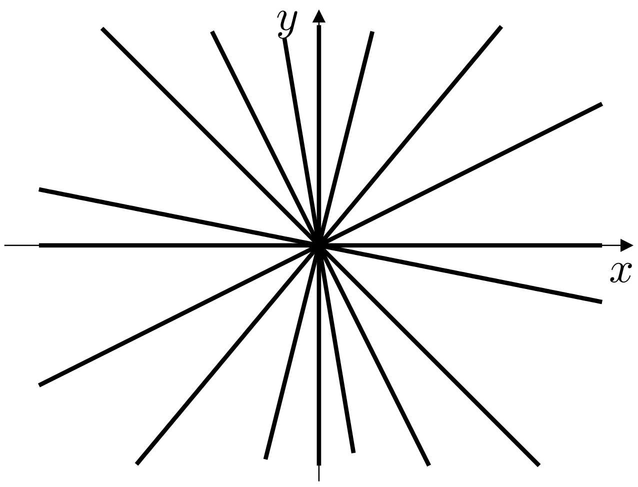


$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde a, b jsou libovolné konstanty.



Příklad:

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde c je libovolná konstanta.

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde a, b jsou libovolné konstanty.

Obecné řešení ODR: řešení vyjádřené pomocí libovolných parametrů.

Partikulární řešení ODR: jedno konkrétní řešení.

$$y = 2x$$

tj. $c = 2$

$$x = 0$$

tj. $a = 1, b = 0$

Základní pojmy

ODR vyřešená vzhledem k derivaci (*explicitní ODR*)

$$y' = f(x,y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),$$

$$\text{tj. } a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y = 0, \ \text{přitom } f(x,y) = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

Základní pojmy

ODR vyřešená vzhledem k derivaci (*explicitní ODR*)

$$y' = f(x, y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

$$\text{tj. } a(x, y)\mathrm{d}x + b(x, y)\mathrm{d}y = 0, \ \text{ přitom } f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

Cauchyova (*počáteční*) *podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

Základní pojmy

ODR vyřešená vzhledem k derivaci (*explicitní ODR*)

$$y' = f(x, y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

$$\text{tj. } a(x, y)\mathrm{d}x + b(x, y)\mathrm{d}y = 0, \text{ přitom } f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

Cauchyova (*počáteční*) *podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

Cauchyova (*počáteční*) *úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

Základní pojmy

Cauchyova (*počáteční*) *podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

Cauchyova (*počáteční*) *úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

Příklad: Řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$ s podmínkou $y(2) = 1$: $y = \frac{1}{2}x$

Základní pojmy

Cauchyova (*počáteční*) *podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

Cauchyova (*počáteční*) *úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

Příklad: Řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$ s podmínkou $y(2) = 1$: $y = \frac{1}{2}x$

Řešení rovnice $xy' = y$ s podmínkou $y(0) = 0$: $y = cx$

Základní pojmy

Cauchyova (*počáteční*) *podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

Cauchyova (*počáteční*) *úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

Příklad: Řešení rovnice $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$ s podmínkou $y(2) = 1$: $y = \frac{1}{2}x$

Řešení rovnice $xy' = y$ s podmínkou $y(0) = 0$: $y = cx$

Řešení rovnice $xy' = y$ s podmínkou $y(0) = 2$ neexistuje

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$.

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$.

$$s = \int at\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}at^2 + c$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1. - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty

Rovnice typy $y' = f(x), \; f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1. - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1. - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1.
   - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\
\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1.
   - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\ \mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}\eta &= f(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1.
   - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\ \mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}\eta &= f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\eta &= \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1.
   - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\\
\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x\\
\mathrm{d}\eta &= f(\xi)\mathrm{d}\xi\\
\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\eta &= \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\\
y - y_0 &= \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Rovnice typy $y' = f(x),\ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

1.
   - Najdeme obecné řešení rovnice,
   - dosadíme do podmínky,
   - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\
\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}\eta &= f(\xi)\mathrm{d}\xi \\
\int\limits_{y_0}^{y} \mathrm{d}\eta &= \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\
y - y_0 &= \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \to \quad y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Rovnice typy
$$y' = f(x),\ \ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Najděte řešení úlohy $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$, $s(0) = 0$.

Rovnice typy
$$y' = f(x),\ \ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Najděte řešení úlohy $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$, $s(0) = 0$.

Obecné řešení: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Najděte řešení úlohy $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$, $s(0) = 0$.

Obecné řešení: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c$, tj. $c = 0$. Tedy $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Najděte řešení úlohy $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$, $s(0) = 0$.

Obecné řešení: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c$, tj. $c = 0$. Tedy $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Přímá integrace:

$$\mathrm{d}s = at\mathrm{d}t$$

Rovnice typy
$$y' = f(x),\ \ f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci f.
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Najděte řešení úlohy $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$, $s(0) = 0$.

Obecné řešení: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c$, tj. $c = 0$. Tedy $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Přímá integrace:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= at\mathrm{d}t \\ \int_0^s \mathrm{d}\sigma &= \int_0^t a\tau\mathrm{d}\tau = a\left[\tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{\tau=0}^{t} = \tfrac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \;\; g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Nezávisle proměnnou v přírodovědeckých aplikacích bývá čas.

Procesy v přírodě probíhají podle vlastních ($\alpha\upsilon\tau o\varsigma$), tj. přírodních, zákonů ($\nu o\mu o\iota$). Tyto zákony nejsou závislé na čase, proto se na pravé straně rovnice neobjevuje nezávisle proměnná.

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y)$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \mathrm{d}x$$

Autonomní rovnice
$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c.$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme y.

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme y.

Úvaha je korektní pouze pro $g(y) \neq 0$.

Autonomní rovnice $y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme y.

Pokud existují hodnoty $y^* \in D(g)$ takové, že $g(y^*) = 0$, pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané autonomní rovnice.

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme y.

Pokud existují hodnoty $y^* \in D(g)$ takové, že $g(y^*) = 0$, pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané autonomní rovnice.

Konstantní řešení nazýváme *stacionární* nebo *rovnovážná*.
Je-li nezávisle proměnnou čas, pak vyjadřují nějakou dynamickou rovnováhu modelovaného děje.

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

Autonomní rovnice

$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{2y - 3} \quad = \quad \int \mathrm{d}x$$

Autonomní rovnice
$$y' = g(y),\ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} &= \int \mathrm{d}x \\ \tfrac{1}{2}\ln|2y-3| &= x + c \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} &= \int \mathrm{d}x \\ \tfrac{1}{2}\ln|2y-3| &= x + c \qquad c \in \mathbb{R} \\ |2y-3| &= \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2c} \end{aligned}$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \;\; g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} &= \int \mathrm{d}x \\ \tfrac{1}{2}\ln|2y-3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\ |2y-3| &= \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2c} \\ 2y - 3 &= c_1\mathrm{e}^{2x} && c_1 = \pm\mathrm{e}^{2c} \neq 0 \end{aligned}$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \ \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} &= \int \mathrm{d}x \\
\tfrac{1}{2}\ln|2y-3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\
|2y-3| &= \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2c} \\
2y - 3 &= c_1 \mathrm{e}^{2x} && c_1 = \pm\mathrm{e}^{2c} \neq 0 \\
y &= \tfrac{1}{2}\left(c_1\mathrm{e}^{2x} + 3\right)
\end{aligned}$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \;\; g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$y = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{2y-3} &= \int \mathrm{d}x \\
\tfrac{1}{2}\ln|2y-3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\
|2y-3| &= \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2c} \\
2y-3 &= c_1\mathrm{e}^{2x} && c_1 = \pm\mathrm{e}^{2c} \neq 0 \\
y &= \tfrac{1}{2}\left(c_1\mathrm{e}^{2x} + 3\right) \\
y &= C\mathrm{e}^{2x} + \tfrac{3}{2} && C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklad: Řešte rovnici $y' = 2y - 3$.

$$y = C\mathrm{e}^{2x} + \tfrac{3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \ g(y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

1. Identifikace konstanty z obecného řešení
2. Přímá integrace v mezích od y_0 do y (na levé straně) a od x_0 do x (na pravé straně)

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = 2y - 3$, $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = 2y - 3$, $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

1. Z obecného řešení: $y = C\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$
   $-\frac{1}{2} = C\mathrm{e}^{1} + \frac{3}{2} \quad \to \quad C = -2\mathrm{e}^{-1}$

$y = \frac{3}{2} - 2\mathrm{e}^{2x-1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + c, \qquad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = 2y - 3$, $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

1. Z obecného řešení: $y = C\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$
   $-\frac{1}{2} = C\mathrm{e}^{1} + \frac{3}{2} \quad \to \quad C = -2\mathrm{e}^{-1}$ $\qquad y = \frac{3}{2} - 2\mathrm{e}^{2x-1}$

2. Přímá integrace: $y_0 = -\frac{1}{2} \neq 0$, tedy $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{2\eta - 3} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \mathrm{d}\xi$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{2\eta - 3} = \left[\tfrac{1}{2} \ln|2\eta - 3|\right]_{\eta=-\frac{1}{2}}^{y} = \tfrac{1}{2} \ln \frac{|2y-3|}{|-4|} = \tfrac{1}{2} \ln \frac{3-2y}{4}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \mathrm{d}\xi = x - \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \ln \frac{3-2y}{4} = 2x - 1$$

Rovnici přepíšeme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

Rovnici přepíšeme, upravíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y),\ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

To je *implicitní* zápis řešení rovnice, z něho (někdy) vyjádříme řešení $y = y(x)$ *explicitně*.

Rovnice se separovanými proměnnými
$y' = f(x)g(y),\ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

To je *implicitní* zápis řešení rovnice, z něho (někdy) vyjádříme řešení $y = y(x)$ *explicitně*.

Pokud existují hodnoty $y^* \in D(g)$ takové, že $g(y^*) = 0$, pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané diferenciální rovnice.

Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \ \ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = 0 \qquad\qquad \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = 0 \qquad\qquad \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = 0 \qquad \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \frac{y^2}{x}$.

$$y = 0 \qquad\qquad \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = -\frac{1}{c + \ln|x|}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = -\frac{1}{c + \ln|x|}, \; y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{y^2}{x}$.

$$y = -\frac{1}{c + \ln|x|}, \; y = 0$$

$C = -\dfrac{1}{c}$

$$y = \frac{C}{1 - C\ln|x|}$$

Rovnice se separovanými proměnnými
$y' = f(x)g(y),\ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{x(1-y)}{1+x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$ případně také $y = y^*$ kde $g(y^*) = 0$

Příklady: Řešte rovnici $y' = \dfrac{x(1-y)}{1+x}$.

$y = 1$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$-\ln|1-y| = x - \ln|1+x| + c$$

$$|1-y| = |1+x|\mathrm{e}^{-x-c}$$

$$1 - y = C(1+x)\mathrm{e}^{-x}$$

$$y = 1 - C(1+x)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

1. Identifikace konstanty z obecného řešení
2. Přímá integrace v mezích od y_0 do y (na levé straně) a od x_0 do x (na pravé straně)

Rovnice se separovanými proměnnými
$y' = f(x)g(y),\ a(x)\mathrm{d}x + b(y)\mathrm{d}y = 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = \dfrac{x(1-y)}{1+x}$, $y(1) = -1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = \dfrac{x(1-y)}{1+x}$, $y(1) = -1$.

$$\int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{1-\eta} = \int_{1}^{x} \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) \mathrm{d}\xi$$

$$-\ln\left|\frac{1-y}{2}\right| = x - 1 - \ln\left|\frac{1+x}{2}\right|$$

$$\ln\frac{1-y}{2} = -x + 1 + \ln\frac{1+x}{2}$$

$$1 - y = \mathrm{e}^{1-x}(1+x)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Příklad: Řešte úlohu $y' = \dfrac{x(1-y)}{1+x}$, $y(1) = -1$.

$$\int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{1-\eta} = \int_{1}^{x} \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) \mathrm{d}\xi$$

$$-\ln\left|\frac{1-y}{2}\right| = x - 1 - \ln\left|\frac{1+x}{2}\right|$$

$$\ln\frac{1-y}{2} = -x + 1 + \ln\frac{1+x}{2}$$

$$1 - y = \mathrm{e}^{1-x}(1+x)$$

$$y = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{1-x}$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]

$v\Delta t$ – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]
$v\Delta t$ – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky Δt
$vx(t)\Delta t$ – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \frac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]

$v\Delta t$ – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

$vx(t)\Delta t$ – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

$$Vx(t + \Delta t) = Vx(t) - vx(t)\Delta t$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]
$v\Delta t$ – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky Δt
$vx(t)\Delta t$ – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

$$\begin{aligned} Vx(t+\Delta t) &= Vx(t) - vx(t)\Delta t \\ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -\frac{V}{v}x(t) \end{aligned}$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$ – množství polutantu v jezeře v čase t [g]
$v\Delta t$ – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky Δt
$vx(t)\Delta t$ – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky Δt

$$\begin{aligned}
Vx(t+\Delta t) &= Vx(t) - vx(t)\Delta t \\
\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -\frac{V}{v}x(t) \\
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{V}{v}x(t)
\end{aligned}$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \frac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{V}{v}\mathrm{d}t$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{V}{v}\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{m/V}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int\limits_{0}^{t} \frac{V}{v}\mathrm{d}\tau$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{V}{v}\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{m/V}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int\limits_{0}^{t} \frac{V}{v}\mathrm{d}\tau$$

$$[\ln \xi]_{\xi=m/V}^{x} = -\frac{V}{v}\,[\tau]_0^t$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]

$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{V}{v}\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{m/V}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int\limits_{0}^{t} \frac{V}{v}\mathrm{d}\tau$$

$$[\ln \xi]_{\xi=m/V}^{x} = -\frac{V}{v}\,[\tau]_0^t$$

$$\ln \frac{x}{m/V} = -\frac{V}{v}t$$

Příklady

Do jezera o objemu V [m^3] přitéká i odtéká voda rychlostí v [m^{3}s^{-1}]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti m [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení: $x(t)$ – koncentrace polutantu v čase t [g m^{-3}]
$t = 0$ – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera
$x(0) = \dfrac{m}{V}$ – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{v}x \qquad\qquad [\ln\xi]_{\xi=m/V}^{x} = -\frac{V}{v}\,[\tau]_0^t$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{V}{v}\mathrm{d}t \qquad\qquad \ln\frac{x}{m/V} = -\frac{V}{v}t$$

$$\int\limits_{m/V}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int\limits_0^t\frac{V}{v}\mathrm{d}\tau \qquad\qquad x(t) = \frac{V}{m}\mathrm{e}^{-\frac{V}{v}t}$$

Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnost s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnost s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

Předpoklady:
- káva je v hrnku promícháván konvektivními proudy
- změna teploty za krátký časový interval je úměrná
  - rozdílu teplot
  - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
  - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnost s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

Předpoklady:
- káva je v hrnku promícháváná konvektivními proudy
- změna teploty za krátký časový interval je úměrná
  - rozdílu teplot
  - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
  - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení: $x(t)$ – teplota kávy v čase t [$^\circ$C]
T – pokojová teplota [$^\circ$C]
S – obsah hladiny [cm^2]
κ – konstanta úměrnosti [cm^{-2} s^{-1}]

Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnost s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

Předpoklady:
- káva je v hrnku promícháván konvektivními proudy
- změna teploty za krátký časový interval je úměrná
  - rozdílu teplot
  - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
  - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení: $x(t)$ – teplota kávy v čase t [$^\circ$C]
T – pokojová teplota [$^\circ$C]
S – obsah hladiny [cm^2]
κ – konstanta úměrnosti [cm^{-2} s^{-1}]

$$\begin{aligned}
x(t+\Delta t) - x(t) &= \kappa S\big(T - x(t)\big)\Delta t \\
\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= \kappa S\big(T - x(t)\big) \\
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \kappa S\big(T - x(t)\big)
\end{aligned}$$

Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnost s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

Předpoklady:
- káva je v hrnku promícháváná konvektivními proudy
- změna teploty za krátký časový interval je úměrná
  - rozdílu teplot
  - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
  - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení: $x(t)$ – teplota kávy v čase t [°C]
T – pokojová teplota [°C]
S – obsah hladiny [cm^2]
κ – konstanta úměrnosti [cm^{-2} s^{-1}]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\kappa S(T-x)} = \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\kappa S}\int_{100}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{T-\xi} = \int_{0}^{t} \mathrm{d}\tau$$

$$-\frac{1}{\kappa S}\left[\ln(T-\xi)\right]_{100}^{x} = [\tau]_0^t$$

$$\ln\frac{T-x}{T-100} = -\kappa St$$

$$T-x = (T-100)\mathrm{e}^{-\kappa St}$$

$$x(t) = T-(T-100)\mathrm{e}^{-\kappa St}$$

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení: $x(t)$ – množství atomů ve vzorku v čase t
τ – poločas rozpadu

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení: $x(t)$ – množství atomů ve vzorku v čase t
τ – poločas rozpadu

$$\text{P}(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t$$

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení: $x(t)$ – množství atomů ve vzorku v čase t
τ – poločas rozpadu

$$\mathrm{P}(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{x(t)}$$

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení: $x(t)$ – množství atomů ve vzorku v čase t
τ – poločas rozpadu

$$\text{P(jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{x(t)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -px(t) \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -px \\
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna $p > 0$. Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení: $x(t)$ – množství atomů ve vzorku v čase t
τ – poločas rozpadu

$$\mathrm{P}(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{x(t)}$$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -px(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -px$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$$

$$\int_N^{\frac{1}{2}N} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -p\int_0^{\tau} \mathrm{d}t$$

$$\ln \frac{\frac{1}{2}N}{N} = -p\tau$$

$$\tau = \frac{1}{p}\ln 2$$

Aplikace

Průběh přímých chemických reakcí

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \rightarrow \quad \mathsf{Y}$$

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \rightarrow \quad \mathsf{Y}$$

Wilhelmyho zákon: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \to \quad \mathsf{Y}$$

Wilhelmyho zákon: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení: $[\mathsf{Z}] = [\mathsf{Z}](t)$ Koncentrace látky Z v čase t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{Y}] = k[\mathsf{X}_1][\mathsf{X}_2]\cdots[\mathsf{X}_n]$$

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \to \quad \mathsf{Y}$$

Wilhelmyho zákon: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení: $[\mathsf{Z}] = [\mathsf{Z}](t)$ Koncentrace látky Z v čase t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{Y}] = k[\mathsf{X}_1][\mathsf{X}_2]\cdots[\mathsf{X}_n]$$

Příklad: Oxidace $2NO + O_2 \to 2NO_2$

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \to \quad \mathsf{Y}$$

Wilhelmyho zákon: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení: $[\mathsf{Z}] = [\mathsf{Z}](t)$ Koncentrace látky Z v čase t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{Y}] = k[\mathsf{X}_1][\mathsf{X}_2]\cdots[\mathsf{X}_n]$$

Příklad: Oxidace $2NO + O_2 \to 2NO_2$

Označení: $x(t) = [NO_2](t)$
a – počáteční koncentrace NO
b – počáteční koncentrace O_2

Průběh přímých chemických reakcí

$$\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \cdots + \mathsf{X}_n \quad \rightarrow \quad \mathsf{Y}$$

Wilhelmyho zákon: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení: $[\mathsf{Z}] = [\mathsf{Z}](t)$ Koncentrace látky Z v čase t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{Y}] = k[\mathsf{X}_1][\mathsf{X}_2]\cdots[\mathsf{X}_n]$$

Příklad: Oxidace $2\mathsf{NO} + \mathsf{O}_2 \rightarrow 2\mathsf{NO}_2$

Označení: $x(t) = [\mathsf{NO}_2](t)$
a – počáteční koncentrace NO
b – počáteční koncentrace O_2

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)^2(b-x)$$
$$x(0) = 0$$

Průběh přímých chemických reakcí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)^2(b-x)$$
$$x(0) = 0$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(a-\xi)^2(b-\xi)} = k\int_0^t \mathrm{d}\tau$$

$$kt = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(a-\xi)^2(b-\xi)} = \int_0^x \left(\frac{1}{b-a}\frac{1}{(a-\xi)^2} + \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{b-\xi} - \frac{1}{a-\xi}\right)\right)\mathrm{d}\xi =$$
$$= \left[\frac{1}{b-a}\frac{-1}{a-\xi} + \frac{1}{(b-a)^2}\left(-\ln|b-\xi| + \ln|a-\xi|\right)\right]_{\xi=0}^{x} =$$
$$= \left[\frac{1}{(a-b)(a-\xi)} + \ln\left|\frac{a-\xi}{b-\xi}\right|\right]_{\xi=0}^{x} = \frac{1}{(a-b)(a-x)} - \frac{1}{a(a-b)} + \ln\left|\frac{a-x}{b-x}\frac{b}{a}\right| =$$
$$= \frac{1}{(a-x)(a-b)}\frac{x}{a} + \ln\frac{a-x}{b-x}\frac{b}{a}$$